СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Д17 - 9737

Н.Н.Боголюбов (мл.), А.М.Курбатов, В.Н.Плечко

СТРОГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ МНОГОЧАСТИЧНЫХ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С БОЗОННЫМ ПОЛЕМ

1976

Д17 - 9737

Н.Н.Боголюбов (мл.), А.М.Курбатов, В.Н.Плечко

СТРОГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ МНОГОЧАСТИЧНЫХ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ, ВЗАЙМОДЕЙСТВУЮЩИХ С БОЗОННЫМ ПОЛЕМ

Боголюбов Н.Н. (мл.), Курбатов А.М., Плечко В.Н., Д17 - 9737

Строгие результаты для многочастичных модельных систем, взаимодействующих с бозонным полем

Для класса квантово-статистических моделей, взаимодействующих с бозонным полем, развита методика асимптотически точного вычисления функций свободной энергии и термодинамических средних. С единой точки зрения исследован фазовый переход в таких системах. Получены неравенства общего вида, которые могут быть использованы при исследовании модельных систем.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Bogolubov N.N. (Jr.), Kurbatov A.M., Plechko V.N. D17 - 9737

Exact Results for the Many-Body Model Systems Interacting with the Boson Field

For the class of quantum statistical models interacting with the boson field methods are developed for the asymptotically exact calculations of the free energy function and thermodynamical averages. The phase transition in such systems is analysed from the unique point of view. Inequalities of a general form are found which can be used in studying model systems.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

I. Введение

Большинство физически интересных задач статистической механики крайне трудно решить непосредственно и поэтому существенный интерес представляют модельные системы, допускающие строгое математическое рассмотрение. Именно эти модели позволили внести существенный вклад в понимание таких важных явлений, как сверхтекучесть, сверхпроводимость, ферромагнетизм и другие (см.,например, работы /1-7/ и цитированную в них литературу). Этим и объясняется существенное внимание к развитию математических методов исследования модельных систем статистической физики. Особое место среди них занимают строгие методы, не использующие каких-либо вариантов теории возмущений. Заметим, что лишь в рамках такого рода исследований становится возможным добиться адекватного соответствия полученного решения и свойств исходной модели. С другой стороны,строгие результаты могут быть использованы в качестве основы для дальнейших и, возможно, менее строгих исследований.

Примером строгого подхода является метод аппроксимирующих гамильтонианов, развитый одним из авторов (Н.Н.Б.) в ряде работ (см.,например, /6,7/), в которых предложена специальная математическая техника построения точных в термодинамическом пределе*) решений для определенных типов модельных гамильтонианов.

*) Т.е. в пределе $N \to \infty$, $V \to \infty$, $N/V = \mathrm{const}$, где N число частиц, V - объем системы.

Этот подход основан на переходе от задачи с модельным гамильтонианом H, решение которой для конечных систем не представляется возможным, к точно решаемой модельной задаче со специально выбираемым аппроксимирующим гамильтонианом $H_0(C)$. Метод такого рода аппроксимации гамильтониана включает в себя доказательство асимптотической (в пределе $N\to\infty$) близости функций свободной энергии и термодинамических средних, вычисляемых по основному H и аппроксимирующему $H_0(C)$ гамильтонианам.

Метод аппроксимирующих гамильтонианов нашел широкое применение в современной квантовой теории многочастичных систем. При помощи этого метода были получены строгие результаты для ряда конкретных квантово-статистических систем: модели БКШ в теории сверхпроводимости /6,7/, ферро- и анти-ферромагнитных моделей с дальнодействием типа J/N /8,9/, модели Дикке-Хакена-Лакса в теории лазера /10/, модели ферроэлектрических кристаллов с учетом протонно-решеточного взаимодействия /11/, моделей для фазового перехода металл-изолятор /12/ и для сверхпроводника с учетом электрон-дырочного спаривания /13/, и ряда других.

Следует отметить, что если модельные гамильтонианы /6-9/ построены на ограниченных по норме фермионных и квазиспиновых операторах, то гамильтонианы моделей /10-13/, описывающие взаимодействие бозонного поля с веществом, содержат неограниченные по норме операторы бозонного поля (электромагнитного, фононного

и т.д.). Этот факт привел к необходимости некоторой модификации и обобщения мажорационной техники метода /7/. Заметим также, что оказалось возможным рассмотреть с единой точки зрения и целые классы модельных гамильтонианов. При этом обнаружены весьма интересные общие закономерности в поведении физически различных многочастичных систем /7,14/.

Следует отметить, что за последнее время было предложено несколько методов конструирования точных в термодинамическом пределе решений для различных модельных задач в теории многих тел. Например, метод асимптотически точного вычисления свободной энергии для определенного типа модельных гамильтонианов, содержащих "одночастичную" и "двухчастичную" части, был развит Тиндемансом и Капелем в работах /15,16/. Весьма интересное строгое исследование термодинамических свойств мазерной модели Дикке-Хакена-Лакса (см. раздел 2, (4)) было осуществлено Хеппом и Либом с помощью тонких современных математических методов в /17/. Несколько отличный подход основан на технике C^*- алгебр и других методах, когда как модельный, так и аппроксимирующий гамильтонианы рассматриваются сразу для бесконечных систем (см., например, /18-20/). Некоторые дополнительные ссылки можно найти в /15/.

Однако следует отметить, что все эти подходы существенно основаны на использовании структуры гильбертова пространства, в котором определен соответствующий модельный гамильтониан. Таким образом, они пригодны только для той или иной конкретной модели или же, в лучшем случае, для определенной группы моделей с индентичной структурой соответствующих гильбертовых пространств. В то же время метод аппроксимирующих гамильтонианов не использует конкретную структуру гильбертова пространства, что дает возможность исследовать широкие классы модельных задач с единой точки зрения /7,I4/ .

Общий класс модельных гамильтонианов теории многих тел со взаимодействием вещества и бозонного поля был исследован в работе /I4/, где было получено асимптотически точное решение одновременно для всего класса задач. В настоящей работе предлагается иной подход к этой проблеме. Обсудим постановку задачи в следующем разделе.

2. Модельный гамильтониан

Прежде всего, опишем модели, с которыми будем иметь дело ниже. В данной работе рассматривается класс модельных гамильтонианов следующего вида/I4/:

$$H = \sum_{\alpha=1}^{S} \omega_\alpha a_\alpha^+ a_\alpha + \sqrt{N} \sum_{\alpha=1}^{S} (\lambda_\alpha^* a_\alpha L_\alpha^+ + \lambda_\alpha a_\alpha^+ L_\alpha) + T - N \sum_{\alpha=1}^{S} \varkappa_\alpha L_\alpha^+ L_\alpha, \tag{I}$$

где

а) a_α^+ и a_α - операторы рождения и уничтожения для α -ой моды бозонного поля; a_α^+, a_α удовлетворяют известным коммутационным соотношениям:

$$a_\alpha a_\beta^+ - a_\beta^+ a_\alpha = \delta_{\alpha\beta}, \tag{2}$$
$$a_\alpha a_\beta - a_\beta a_\alpha = 0, \quad a_\alpha^+ a_\beta^+ - a_\beta^+ a_\alpha^+ = 0 .$$

б) $T = T^+$; L_α, L_α^+ $(1 \le \alpha \le S)$- операторы, представляющие "вещество" или "L - подсистему"*). Эти операторы

*) Название выбрано, исходя из обозначения операторов L_α, L_α^+.

обладают различной конкретной структурой для различных конкретных моделей. Единственными общими дополнительными условиями являются:

$$\|L_\alpha\| \le M_1, \tag{3a}$$
$$\|L_\alpha T - T L_\alpha\| \le M_2, \tag{3б}$$
$$\|L_\alpha L_\beta - L_\beta L_\alpha\| \le \frac{M_3}{N}, \quad \|L_\alpha L_\beta^+ - L_\beta^+ L_\alpha\| \le \frac{M_3}{N}, \tag{3в}$$

где $\|\dots\|$ обозначает норму оператора и M_1, M_2, M_3 - константы, не зависящие от N (N число частиц в "веществе"). Кроме того, свободная энергия (на одну частицу) $f[T]$*) должна существовать как для конечного N, так и при $N \to \infty$.

в) ω_α $(1 \le \alpha \le S)$- вещественные положительные параметры, $\omega_\alpha > 0$, $\varkappa_\alpha$ $(1 \le \alpha \le S)$ вещественные неотрицательные параметры, $\varkappa_\alpha \ge 0$; $\lambda_\alpha, \lambda_\alpha^*$ -, вообще говоря, комплексные параметры.

г) N- число частиц в "веществе". Нас будут интересовать только те свойства рассматриваемых модельных систем, которые инвариантны по отношению к предельному переходу $N \to \infty$ (термодинамический предел), причем рассмотрение будет осуществлено для конечного фиксированного N, а предельный переход $N \to \infty$ будет выполнен в конце вычислений.

*) Определение $f[\dots]$ дано ниже (см. (I6a)).

д). Опишем детально структуру гильбертова пространства, на котором определен гамильтониан (I). Для заданного фиксированного α бозе-операторы a^+_α, a_α определены в фоковском пространстве, которое мы обозначим $\mathcal{H}_B^{(\alpha)}$; введем также обозначение $\mathcal{H}_B = \bigoplus_{\alpha=1}^{S} \mathcal{H}_B^{(\alpha)}$. Предполагается, что операторы T, L_α, L^+_α $(1 \le \alpha \le S)$ определены в сепарабельном (для конечного N) гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_L$, не зависящем от пространства $\mathcal{H}_B$, то есть $\mathcal{H}_L$ и $\mathcal{H}_B$ не содержат общих векторов $(\mathcal{H}_L \cap \mathcal{H}_B = \emptyset)$. Это условие по существу отражает физическое предложение о различной природе "вещества" и "бозонного поля". В частности, благодаря независимости пространств $\mathcal{H}_L$ и $\mathcal{H}_B$ операторы T, L_α, L^+_α коммутируют с операторами a^+_β, a_β для любого α и β $(1 \le \alpha, \beta \le S)$. Гамильтониан H (1) определен в пространстве $\mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_B$ и описывает L-подсистему, взаимодействующую с конечным числом мод бозонного поля*).

Первый член в (I) представляет свободное бозонное поле. Второй член описывает взаимодействие и последние два члена представляют "вещество".

Приведем конкретные примеры систем, которые входят в класс (I) как частные случаи.

I). Модель Дикке-Хакена-Лакса в теории мазера (см., например, /I0,I7/ и указанную там литературу). Модельный гамильтониан имеет вид:

*) При определенных дополнительных условиях допустим случай бесконечного (посчетного) числа мод $S=\infty$ I4.

$$H_D = \omega a^+ a + \lambda\sqrt{N}(J^+ a + J^- a^+) + \epsilon N S^z, \tag{4}$$

где

$$J^\pm = S^\pm + \mu S^\mp, \quad S^\pm = S^x + i S^y,$$
$$S^{x,y,z} = (1/2N)\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^{x,y,z},$$

$\sigma^{x,y,z}$ – матрицы Паули, a^+ и a – операторы рождения и уничтожения фотона; $\omega, \epsilon, \lambda$ и μ вещественные параметры, $\omega > 0, \epsilon > 0, 0 \le \mu \le 1$. Модель (4) описывает N двухуровневых молекул, взаимодействующих с одной модой квантованного электромагнитного поля (дипольное взаимодействие). Она находит применение в теории мазеров и лазеров.

2). Модель ферроэлектриков типа KDP /II,I4/. Модельная система состоит из подсистемы тяжелых ионных комплексов, связанных короткими водородными связями, и подсистемы протонов на этих связях. Для описания движения протонов в поле эффективного потенциала (в форме потенциальной ямы с двумя минимумами) используется квазиспиновый формализм. Ферроэлектрические явления в таких веществах обусловлены взаимодействием ионной и протонной подсистем.

В работе /II/ рассмотрена упрощенная модель ферроэлектриков типа КДР, которая учитывает взаимодействие протонов только с длинноволновыми оптическими колебаниями ионной подсистемы. Существенная часть соответствующего модельного гамильтониана может быть представлена в виде /I4/ :

$$H_F = \omega_0 a_0^+ a_0 - \frac{K}{\sqrt{2M\omega_0}} \frac{a_0^+ + a_0}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^z - $$
$$- \Omega \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^x - \frac{I}{2N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_i^z \sigma_j^z , \qquad (5)$$

где a_0^+ и a_0 – операторы рождения и уничтожения длинноволновых $(k=0)$ фононов, σ^x, σ^z – матрицы Паули; M –приведенная масса ионного комплекса, ω_0 – оптическая частота колебаний решетки в длинноволновом пределе $k \to 0$; Ω – частота туннелирования Де-Женна, $\Omega > 0$; K и I – вещественные параметры взаимодействия, $I > 0$.

Модель (5) допускает точное решение в термодинамическом пределе и описывает фазовый переход второго рода из неупорядоченного в упорядоченное состояние (происходящий при определенной критической температуре $\theta = \theta_c$). Здесь спонтанная поляризация появляется благодаря упорядочению протонов на связях, сопровождаемому макроскопическим смещением тяжелых ионных комплексов[11,14].

3). Модель для фазового перехода металл-диэлектрик[13,21]. Модельный гамильтониан здесь – это гамильтониан Фрелиха со специально выделенной модой колебаний решетки Q *):

*) $Q = (\pi/a)(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, где a – постоянная решетки; в (6) $\epsilon_{k+Q} = -\epsilon_k$.

$$H_{МД} = \sum_{k\sigma} (\epsilon_k - \mu) C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \omega_Q b_Q^+ b_Q +$$
$$+ \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{k\sigma} \left(C_{k+Q,\sigma}^+ C_{k,\sigma} b_Q + C_{k,\sigma}^+ C_{k+Q,\sigma} b_Q^+ \right), \qquad (6)$$

где C^+, C и b^+, b – операторы рождения и уничтожения соответственно электронов и фононов.

Модель (6) также входит в общий класс модельных гамильтонианов (1), и соответствующий аппроксимирующий гамильтониан точно решаем, что дает возможность исследовать термодинамику системы (6). Оказывается, в частности, что при определенной критической температуре θ_c в модельной системе (6) происходит фазовый переход (второго рода) типа металл-диэлектрик, обусловленный нестабильностью решетки и удвоением периода[21].

4) Отметим также недавние исследования некоторых модельных систем, допускающих одновременно фазовые переходы типа металл-диэлектрик и металл-сверхпроводник на основе гамильтониана, составленного из $H_{МД}$ (6) и модельного гамильтониана типа БКШ[13,21]:

$$H_{МД/МС} = H_{МД} + H_{БКШ} . \qquad (7)$$

Такие модели дают возможность исследовать влияние электронно-дырочного спаривания на температуру сверхпроводящего перехода, что представляет значительный интерес в связи с проблемой высокотемпературной сверхпроводимости.

Модельные гамильтонианы (4) - (7), являясь частными случаями общего гамильтониана (I), допускают точное решение в термодинамическом пределе, при $N\to\infty$ (см.ниже). Детальное обсуждение их физических свойств можно найти в приведенной выше литературе. Некоторые из этих моделей, так же как и методы, применяемые в соответствующих работах, обсуждаются в /I4/.

Вернемся к гамильтониану (I). Соответствующий аппроксимирующий гамильтониан $H_0(C)$, зависящий от комплексных параметров $\{C_\alpha\}$, имеет здесь вид /14/:

$$H_0(C) = T + N\sum_{\alpha=1}^{S}\left(g_\alpha C_\alpha L_\alpha^+ + g_\alpha C_\alpha^* L_\alpha\right) + N\sum_{\alpha=1}^{S} g_\alpha C_\alpha C_\alpha^*, \tag{8a}$$

где

$$g_\alpha = \varkappa_\alpha + |\lambda_\alpha|^2/\omega_\alpha. \tag{8б}$$

В работе /I4/ получены мажорационные оценки, доказывающие асимптотическую близость (при $N\to\infty$) свободных энергий, соответствующих гамильтонианам H (1) и $H_0(C)$(8)(при специальном выборе параметров C_α), одновременно для всего класса моделей:

$$\left|f[H] - \operatorname{abs}\min_C f[H_0(C)]\right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{9}$$

Как легко видеть, аппроксимирующий гамильтониан $H_0(C)$ имеет гораздо более простую структуру, чем исходный (I).
При этом для ряда конкретных моделей, (в частности, для моделей (4) -(7), свободная энергия может быть вычислена явно и существует предел

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\operatorname{abs}\min_C f[H_0(C)]\right\}.$$

Тогда, если справедливо соотношение (9), свободная энергия $f[H]$ существует и может быть вычислена с асимптотически малой погрешностью*). Другим важным результатом, полученным в /I4/, является ряд асимптотически точных соотношений для средних, построенных из бозе-операторов a_α^+, a_β с одной стороны, и операторов L_α^+, L_β с другой. Основное неравенство имеет здесь следующий вид:

$$\sum_{\alpha=1}^{S}\omega_\alpha\langle B_\alpha^+ B_\alpha\rangle_H \le \varepsilon_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0, \tag{I0a}$$

где

$$B_\alpha^+ = \frac{a_\alpha^+}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha^*}{\omega_\alpha}L_\alpha^+,\quad B_\alpha = \frac{a_\alpha}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda_\alpha}{\omega_\alpha}L_\alpha. \tag{I0б}$$

*) Возможны также другие причины, по которым $H_0(C)$ удобнее для изучения, чем H.

Оценка (I0a) была доказана в работе /I4/ на основе некоторых промежуточных соотношений, полученных при доказательстве (9).

В настоящей работе разовьем несколько иной подход к проблеме. В разделе 3 дадим прямое доказательство неравенства (I0a) без применения каких-либо соотношений для свободных энергий, но используя специальное неравенство для средних, впервые полученное одним из авторов (Н.Н.Б) в работе /6/ (см.ниже (I7а-в)). В разделе 4, используя вспомогательный гамильтониан $\tilde{H}$ вида /I4/ :

$$\tilde{H} = T - N\sum_{\alpha=1}^{S} g_\alpha L^+_\alpha L_\alpha, \qquad \text{(IIa)}$$

где

$$g_\alpha = \varkappa_\alpha + |\lambda_\alpha|^2/\omega_\alpha \geqslant 0, \qquad \text{(IIб)}$$

мы получим неравенства:

$$-\xi_N \leq f[H] - f[\tilde{H}] \leq \eta_N, \qquad \text{(I2)}$$

где $\xi_N \to 0$, $\eta_N \to 0$ при $N \to \infty$.

Такой подход обладает определенными преимуществами, например, мажорационная оценка в (I0a) оказывается более сильной (по степени $1/N$), чем прежняя /I4/ (см.раздел 3). Вероятно, такое улучшение будет полезным при оценке флуктуаций в рассматриваемых системах (например, в модели Дикке-Хакена-Лакса, где флуктуации представляют существенный физический интерес).

Оценки (I2) доказывают термодинамическую эквивалентность (в смысле близости свободных энергий) гамильтонианов H(I) и $\tilde{H}$ (II). Заметим теперь, что, в свою очередь, гамильтониан $\tilde{H}$ (II) эквивалентен (в термодинамическом пределе) гамильтониану $H_0(C)$(8) (при соответствующем выборе $\{C_\alpha\}$). Именно, справедливо следующее утверждение:

Теорема I. (Н.Н.Боголюбов(мл.) /6,7/). Пусть даны гамильтонианы $H_0(C)$ (8) и $\tilde{H}$ (II), где $g_\alpha \geqslant 0$ $(1 \leq \alpha \leq S)$. Пусть далее операторы T, L_α, L^+_α удовлетворяют условиям (3а-в) и другим требованиям, сформулированным в разделе I (см.описание гамильтониана (I), б и g). Тогда свободная энергия $f[H_0(C)]$ как функция параметров $\{C_\alpha\}$ достигает абсолютного минимума в некоторых конечных точках $\{\bar{C}_\alpha\}$, которые, следовательно, удовлетворяют системе уравнений:

$$C_\alpha = \langle L_\alpha \rangle_{H_0(C)}, \quad 1 \leq \alpha \leq S, \qquad \text{(I3)}$$

и справедливы неравенства:

$$0 \leq f[H_0(\bar{C})] - f[H] \leq \frac{S P_1}{N^{2/5}} + \frac{\theta S P_2}{N^{3/5}}, \qquad \text{(I4)}$$

где P_1 и P_2 простые комбинации чисел M_1, M_2, M_3 (см(3а-в)) и $G = \max_\alpha g_\alpha$.

Заметим, что неравенства (I2) и (I4) доказывают (9).

В разделе 4 будет использовано также следующее фундаментальное утверждение:

Теорема 2 (Н.Н.Боголюбов; доказательство дано, например, в работах /6,7/). Справедливы неравенства:

$$\frac{1}{N}\langle \mathcal{U}_1-\mathcal{U}_2\rangle_{\mathcal{U}_1} \le f[\mathcal{U}_1]-f[\mathcal{U}_2] \le \frac{1}{N}\langle \mathcal{U}_1-\mathcal{U}_2\rangle_{\mathcal{U}_2}, \qquad (15)$$

где $\mathcal{U}_1=\mathcal{U}_1^+$ и $\mathcal{U}_2=\mathcal{U}_2^+$. Здесь плотность свободной энергии $f[\mathcal{U}]$ определяется известным выражением:

$$f[\mathcal{U}] = -\frac{\theta}{N}\ln \operatorname{Tr} e^{-\frac{\mathcal{U}}{\theta}}, \quad \mathcal{U}=\mathcal{U}^+, \qquad (16а)$$

а среднее по гамильтониану $\mathcal{U}=\mathcal{U}^+$ суть :

$$\langle \dots \rangle_{\mathcal{U}} = \operatorname{Tr}\left(\dots e^{-\mathcal{U}/\theta}\right)/\operatorname{Tr} e^{-\mathcal{U}/\theta}. \qquad (16б)$$

Отметим, что гамильтонианы $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ в (15) определены в одном и том же пространстве и при вычислении любого члена в (15) след (Tr) берется по всему этому пространству.

В заключение этого раздела приведем специальное неравенство, позволяющее оценивать средние вида $\langle B^+B\rangle$ сверху. Лемма (Н.Н.Боголюбов (мл.), /6,7/). Обозначим

$$B^+(\tau) = e^{\tau H/\theta} B^+ e^{-\tau H/\theta}, \qquad (17а)$$

$$R = BH - HB, \quad R^+ = HB^+ - B^+H, \qquad (17б)$$

тогда справедливо следующее неравенство .

$$\langle B^+B\rangle_H \le \int_0^1 \langle B^+(\tau)B\rangle_H\, d\tau + \left(\frac{1}{\theta}\int_0^1 \langle B^+(\tau)B\rangle_H\, d\tau\right)^{2/3}\left(\frac{1}{2}\langle RR^+ + R^+R\rangle_H\right)^{1/3}, \qquad (17в)$$

где H -гамильтониан соответствующей системы, θ - температура в энергетических единицах; $\langle \dots \rangle_H$ определяется согласно (16б) .

3. Основное неравенство

Здесь мы докажем оценку (10а), исходя непосредственно из неравенства (17в). Полагая в (17в) $B^+ = B_\alpha^+$, $B = B_\alpha$ (см. (10б)) и суммируя по α с весом ω_α от I до S, получаем**)

$$\sum_{\alpha=1}^{S}\omega_\alpha\langle B_\alpha^+B_\alpha\rangle \le \sum_{\alpha=1}^{S}\omega_\alpha\int_0^1\langle B_\alpha^+(\tau)B_\alpha\rangle\, d\tau + \sum_{\alpha=1}^{S}\left(\frac{\omega_\alpha}{\theta}\int_0^1\langle B_\alpha^+(\tau)B_\alpha\rangle\, d\tau\right)^{2/3}\left(\frac{\omega_\alpha}{2}\langle R_\alpha R_\alpha^+ + R_\alpha^+R_\alpha\rangle\right)^{1/3}, \qquad (18а)$$

где

$$R_\alpha = B_\alpha H - HB_\alpha, \quad R_\alpha^+ = HB_\alpha^+ - B_\alpha^+H, \qquad (18б)$$

H - гамильтониан (I).

**) Из соображений удобства в этом разделе будем опускать индекс в статистических средних по гамильтониану H, т.е. будем писать $\langle \dots \rangle \equiv \langle \dots \rangle_H$.

Вычислим величину $\int_0^1 \langle B_\alpha^+(\tau) B_\alpha \rangle d\tau$ правой части (18а). Нетрудно проверить, что оператор $B_\alpha^+(\tau)$ (см. (10а) и (17а)) представим в виде:

$$B_\alpha^+(\tau) = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\theta}{\omega_\alpha} \frac{d}{d\tau}\left(e^{\tau \frac{H}{\theta}} a_\alpha^+ e^{-\tau\frac{H}{\theta}}\right). \qquad (19)$$

Используя (19) и учитывая (2), (16б), а также возможность циклических перестановок под знаком "T_r", получаем окончательно:

$$\frac{\omega_\alpha}{\theta}\int_0^1 \langle B_\alpha^+(\tau) B_\alpha\rangle d\tau = \frac{\langle B_\alpha a_\alpha^+ - a_\alpha^+ B_\alpha\rangle}{\sqrt{N}} = \frac{1}{N}. \qquad (20)$$

Рассмотрим теперь среднее $\langle R_\alpha R_\alpha^+ + R_\alpha^+ R_\alpha\rangle$.
На основании (2),(3а-в) и неравенства Н.Н.Боголюбова [24]

$$|\langle \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2\rangle| \le \sqrt{\langle \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1^+\rangle\langle \mathfrak{A}_2^+\mathfrak{A}_2\rangle} \qquad (21)$$

можно доказать следующую оценку (детали см. в приложении,(П10)

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \left[\frac{\omega_\alpha}{2}\langle R_\alpha R_\alpha^+ + R_\alpha^+ R_\alpha\rangle\right]^{1/3} \le (s d_1)^{2/3}\left(\sum_{\beta=1}^{s} \omega_\beta\langle B_\beta^+ B_\beta\rangle\right)^{1/3} + (s d_{2,N})^{2/3}, \qquad (22)$$

где d_1 и $d_{2,N}$ простые комбинации постоянных M_1, M_2 и M_3 (см. 3а-в), и параметров гамильтониана (I) (см.приложение, (П9б)).

На основании (18а),(20) и (22) имеем:

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \omega_\alpha\langle B_\alpha^+ B_\alpha\rangle \le (s d_1/N)^{2/3}\left(\sum_{\beta=1}^{s}\omega_\beta\langle B_\beta^+B_\beta\rangle\right)^{1/3} + (s d_{2,N}/N)^{2/3} + s\theta/N, \qquad (23)$$

откуда, в свою очередь, следует*):

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \omega_\alpha \langle B_\alpha^+B_\alpha\rangle \le 2(s d_{2,N}/N)^{2/3} + 2s(\theta + d_1\sqrt{2})/N \equiv \varepsilon_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \qquad (24)$$

Таким образом, оценка (10а) доказана.
Заметим, что мажорационная оценка $\varepsilon_N \sim N^{-2/3}$ в (24) убывает при $N\to\infty$ быстрее, чем аналогичная оценка работы /14/ $\sim N^{-2/5}$.

На основании (21) и (24) нетрудно получить ряд важных соотношений для средних /14/. Так, например, используя (3а),(21) и (24), имеем:

$$\left|\left\langle \frac{a_\alpha^+}{\sqrt{N}} L_\beta\right\rangle + \frac{\lambda_\alpha^*}{\omega_\alpha}\langle L_\alpha^+ L_\beta\rangle\right| = |\langle B_\alpha^+ L_\beta\rangle| \le \sqrt{\langle B_\alpha^+B_\alpha\rangle\langle L_\beta^+L_\beta\rangle} \le M_1\left(\frac{\varepsilon_N}{\omega_\alpha}\right)^{1/2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \qquad (25а)$$

*) При переходе от (23) к (24) мы использовали следующие простые соображения: неравенство (23) имеет вид $b \le a^{2/3} b^{1/3} + d$ и есть две возможности: 1. $a^{2/3}b^{1/3} \ge d$, тогда $b^{2/3}\le 2a^{2/3}$ и $b \le 2^{3/2} a$; 2. $a^{2/3}b^{1/3} < d$, тогда $b<2d$, следовательно, в любом случае $b \le 2^{3/2} a + d$, что эквивалентно (24).

$$\left|\left\langle\frac{a^+_\alpha a_\beta}{N}\right\rangle + \frac{\lambda_\beta}{\omega_\beta}\left\langle\frac{a^+_\alpha}{\sqrt{N}} L_\beta\right\rangle\right| =$$

$$= \left|\langle B^+_\alpha B_\beta\rangle - \frac{\lambda^*_\alpha}{\omega_\alpha}\langle L_\alpha B_\beta\rangle\right| \le \tag{25б}$$

$$\le M_1 \frac{|\lambda_\alpha|}{\omega_\alpha}\left(\frac{\varepsilon_N}{\omega_\beta}\right)^{1/2} + \frac{\varepsilon_N}{\sqrt{\omega_\alpha\omega_\beta}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Из (25а) и (25б), в частности, следует:

$$\langle a^+_\alpha a_\alpha\rangle = N\frac{|\lambda_\alpha|^2}{\omega^2_\alpha}\langle L^+_\alpha L_\alpha\rangle\left(1+O(N^{-1/3})\right). \tag{25в}$$

Соотношения типа (25а–в) и их физический смысл детально обсуждаются в работе /I4/. Здесь мы только заметим, что для ряда конкретных моделей (в частности, для моделей (4)-(7), средние $\langle L^+_\alpha L_\alpha\rangle$ характеризуют дальний порядок в подсистеме (намагниченность, поляризация, щель в спектре элементарных возбуждений в теории сверхпроводимости и т.п.). Тогда (25в) означает, что фазовые переходы в L -подсистеме из неупорядоченного, $\langle L^+_\alpha L_\alpha\rangle = 0$, в упорядоченное, $\langle L^+_\alpha L_\alpha\rangle \ne 0$, состояние автоматически сопровождаются компенсирующим макроскопическим заполнением бозонных мод: $\langle a^+_\alpha a_\alpha\rangle \sim N$. Такое заполнение, обеспечивающее малость среднего $\langle B^+_\alpha B_\alpha\rangle$ (см. (24)), энергетически выгодно (см. ниже (26)).

4. Свободная энергия

В этом разделе мы докажем верхнюю и нижнюю оценку в (I2).

а) Оценка сверху. Прежде всего заметим, что гамильтониан (I) может быть записан в виде:

$$H = \tilde{H} + N\sum_{\alpha=1}^{s}\omega_\alpha B^+_\alpha B_\alpha, \tag{26}$$

где $\tilde{H}$ определяется (II). Введем вспомогательный гамильтониан

$$H_\rho = \tilde{H} + \rho N\sum_{\alpha=1}^{s}\omega_\alpha B^+_\alpha B_\alpha, \tag{27}$$

где ρ – положительный действительный параметр, $0 < \rho < 1$. Полагая в неравенствах (I5) $\mathcal{U}_1 = H(1)$ и $\mathcal{U}_2 = H_\rho$ (27), получаем:

$$f[H] - f[H_\rho] \le (1-\rho)\sum_{\alpha=1}^{s}\omega_\alpha\langle B^+_\alpha B_\alpha\rangle_{H_\rho}. \tag{28}$$

С другой стороны, гамильтониан H_ρ (27) можно получить из гамильтониана $H(1)$ путем перенормирования в последнем параметров $\varkappa_\alpha, \omega_\alpha$ и $\lambda_\alpha, \lambda^*_\alpha$:

$$\begin{gathered}\varkappa_\alpha \to \varkappa_\alpha + (1-\rho)|\lambda_\alpha|^2/\omega_\alpha;\\ \omega_\alpha \to \rho\,\omega_\alpha;\ \ \lambda_\alpha \to \rho\lambda_\alpha,\ \lambda^*_\alpha \to \rho\lambda^*_\alpha.\end{gathered} \tag{29}$$

Замечая, что операторы B_α^+, B_α (10б) инвариантны по отношению к преобразованиям (29), видим, что правую часть неравенства (28) можно оценить, проделав преобразования (29) в обеих частях неравенства (24). При этом (см. (II.9а) и (II.9б)):

$$d_1 \to d_1^{transf.} = \rho d_1 \le d_1,$$
$$d_{2,N} \to d_{2,N}^{transf} \le \sqrt{\rho}\, d_{2,N}.$$

В результате получаем:

$$\sum_{\alpha=1}^{S} \omega_\alpha \langle B_\alpha^+ B_\alpha \rangle_{H_\rho} \le 2\left(\frac{S d_{2,N}}{N\rho}\right)^{2/3} + \frac{2S(\theta + d_1\sqrt{2})}{N\rho}. \quad (30)$$

Воспользовавшись теперь теоремой 2, полагая в (15) $\mathcal{U}_1 = H_\rho$ и $\mathcal{U}_2 = \tilde{H} + \rho H_B$,

где

$$H_B = \sum_{\alpha=1}^{S} \omega_\alpha a_\alpha^+ a_\alpha, \quad (31)$$

получаем

$$f[H_\rho] - f[\tilde{H} + \rho H_B] \le \quad (32)$$
$$\le \rho \sum_{\alpha=1}^{S} \left\langle \frac{|\lambda_\alpha|^2}{\omega_\alpha} L_\alpha^+ L_\alpha + \lambda_\alpha \frac{a_\alpha^+}{\sqrt{N}} L_\alpha + \lambda_\alpha^* \frac{a_\alpha}{\sqrt{N}} L_\alpha^+ \right\rangle,$$
$$\langle \cdots \rangle \equiv \langle \cdots \rangle_{\tilde{H} + \rho H_B}.$$

Вследствие независимости гильбертовых пространств $\mathcal{H}_L$ и $\mathcal{H}_B$, на которых определены гамильтонианы $\tilde{H}$ (11) и H_B (31), имеем[*]:

$$f[\tilde{H} + \rho H_B] = f[\tilde{H}] + f[\rho H_B] \quad (33)$$

и

$$\langle a_\alpha^+ L_\alpha \rangle_{\tilde{H} + \rho H_B} = \langle a_\alpha^+ \rangle_{\rho H_B} \langle L_\alpha \rangle_{\tilde{H}} = 0, \quad (34а)$$

$$\langle a_\alpha L_\alpha^+ \rangle_{\tilde{H} + \rho H_B} = \langle a_\alpha \rangle_{\rho H_B} \langle L_\alpha^+ \rangle_{\tilde{H}} = 0. \quad (34б)$$

Правые равенства в (34а,б) справедливы в силу калибровочной инвариантности гамильтониана H_B (31) по отношению к преобразованиям $a_\alpha \to a_\alpha e^{i\varphi_\alpha}, a_\alpha^+ \to a_\alpha^+ e^{-i\varphi_\alpha}$. Заметим далее, что свободная энергия $f[\rho H_B]$ для свободного бозе-газа определена хорошо известной формулой и отрицательна:

$$f[\rho H_B] = \frac{\theta}{N} \sum_{\alpha=1}^{S} \ln\left(1 - e^{-\rho\frac{\omega_\alpha}{\theta}}\right) \le 0. \quad (35)$$

---

*) Благодаря независимости пространств $\mathcal{H}_L$ и $\mathcal{H}_B$ для произвольного оператора $\mathcal{U}_{L\otimes B} = \mathcal{U}_L \otimes \mathcal{U}_B \in \mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_B$, где $\mathcal{U}_L \in \mathcal{H}_L$ и $\mathcal{U}_B = \mathcal{H}_B$, имеем

$$\mathrm{Tr}_{L\otimes B}\left(\mathcal{U}_{L\otimes B}\, e^{-\frac{\tilde{H} + \rho H_B}{\theta}}\right) =$$
$$= \mathrm{Tr}_L\left(\mathcal{U}_L e^{-\frac{\tilde{H}}{\theta}}\right) \mathrm{Tr}_B\left(\mathcal{U}_B\, e^{-\rho\frac{H_B}{\theta}}\right),$$

откуда следуют равенства (33) и (34, левые). Здесь индексы $L\otimes B, L, B$ означают, что след нужно брать в пространствах $\mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_B$, $\mathcal{H}_L$, $\mathcal{H}_B$ соответственно. Свободные энергии (см. (16а)) в (33) понимаются как $f[\tilde{H} + \rho H_B]_{L\otimes B}$, $f[\tilde{H}]_L$, $f[\rho H_B]_B$.

на основании (3а) и (32)-(35) получаем:

$$f[H_\rho] - f[\tilde{H}] \le \rho M_1^2 \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{|\lambda_\alpha|^2}{\omega_\alpha} . \tag{36}$$

из (28),(30) и (36) в свою очередь следует:

$$f[H] - f[\tilde{H}] \le \rho M_1^2 \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{|\lambda_\alpha|^2}{\omega_\alpha} + $$
$$+ 2\left(\frac{s d_{2,N}}{\rho N}\right)^{2/3} + \frac{2s(\theta + d_1\sqrt{2})}{N\rho} . \tag{37}$$

Так как левая часть этого неравенства не зависит от $\rho\ (0<\rho<1)$, мы можем выбрать ρ в правой его части по своему усмотрению. Выберем $\rho = N^{-\frac{2}{5}}$ и получим:

$$f[H] - f[\tilde{H}] \le$$
$$\le \left[M_1^2 \sum_{\alpha=1}^{s} (|\lambda_\alpha|^2/\omega_\alpha) + 2(s d_{2,N})^{2/3}\right]/N^{2/5} + \tag{38}$$
$$+ \left[2s(\theta + d_1\sqrt{2})\right]/N^{3/5} \equiv \eta_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 .$$

Таким образом, верхняя оценка в (12) доказана.

б). Оценка снизу. Оценка снизу в (12) доказана в работе /14/. Для полноты мы приводим здесь это доказательство. Полагая в (15) $\mathfrak{A}_1 = H$ и $\mathfrak{A}_2 = \tilde{H} - \Delta_\rho + \rho H_B$,

где

$$\Delta_\rho = N \frac{\rho}{1-\rho} \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{|\lambda_\alpha|^2}{\omega_\alpha} L_\alpha^+ L_\alpha , \quad 0<\rho<1 ,$$

а H_B определяется формулой (31), получаем:

$$0 \le f[H] - f[\tilde{H} - \Delta_\rho + \rho H_B] . \tag{39}$$

С другой стороны:

$$f[\tilde{H} - \Delta_\rho + \rho H_B] = f[\tilde{H} - \Delta_\rho] + f[\rho H_B], \tag{40}$$

где (см.(35)):

$$f[\rho H_B] \ge -\sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\theta}{N} \ln \frac{\theta}{\rho\omega_\alpha} + \frac{\rho\omega_\alpha}{N}\right) . \tag{41}$$

Далее, полагая в формуле (15) $\mathfrak{A}_1 = \tilde{H} - \Delta_\rho$ и $\mathfrak{A}_2 = \tilde{H}$, находим:

$$-\frac{\rho}{1-\rho} M_1^2 \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{|\lambda_\alpha|^2}{\omega_\alpha} \le f[\tilde{H} - \Delta_\rho] - f[\tilde{H}] . \tag{42}$$

Исходя из (39)-(42), легко получаем неравенство:

$$-\sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\rho}{1-\rho} M_1^2 \frac{|\lambda_\alpha|^2}{\omega_\alpha} + \frac{\theta}{N} \ln \frac{\theta}{\rho\omega_\alpha} + \right. \tag{43}$$
$$\left. + \frac{\rho\omega_\alpha}{N}\right) \le f[H] - f[\tilde{H}] ,$$

где правая часть не зависит от ρ. Выбирая в левой части $\rho = N^{-1}$, находим окончательно:

$$-\xi_N \le f[H] - f[\tilde{H}] , \tag{44a}$$

где

$$\xi_N = \frac{s\theta \ln N}{N} + \frac{M_1^2}{N-1}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{|\lambda_\alpha|^2}{\omega_\alpha} + \qquad (44б)$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\theta \ln\frac{\theta}{\omega_\alpha} + \frac{\omega_\alpha}{N}\right);\ \xi_N \sim \left.\frac{\ln N}{N}\right|_{N\to\infty}.$$

Тем самым доказательство неравенств (I2) завершено.

Приложение.

Докажем оценку (22). Учитывая, что a_α^+, a_α коммутируют с T, L_β^+, L_β $(1\le\alpha,\beta\le s)$ (см. раздел I) и используя (2), нетрудно вычислить оператор R_α (I8б):

$$R_\alpha = \omega_\alpha B_\alpha + \frac{\lambda_\alpha}{\omega_\alpha}\left(X_\alpha + Y_\alpha + Z_\alpha\right), \qquad (\text{П1})$$

где

$$X_\alpha = \sum_{\beta=1}^{s}\lambda_\beta^* N[L_\alpha; L_\beta^+]B_\beta, \qquad (\text{П2а})$$

$$Y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{s}\lambda_\beta N[L_\alpha; L_\beta]B_\beta^+, \qquad (\text{П2б})$$

$$Z_\alpha = -\sum_{\beta=1}^{s}\frac{|\lambda_\beta|^2}{\omega_\beta}N\left([L_\alpha; L_\beta^+]L_\beta + \right.$$

$$\left. + [L_\alpha; L_\beta]L_\beta^+\right) + [L_\alpha; T]. \qquad (\text{П2в})$$

Используя (2I),(П1) и элементарное неравенство $2|xy|\le x^2+y^2$, находим:

$$\langle R_\alpha^+ R_\alpha\rangle \le 4\omega_\alpha^2\langle B_\alpha^+ B_\alpha\rangle + \qquad (\text{П3})$$

$$+\frac{4|\lambda_\alpha|^2}{\omega_\alpha^2}\left(\langle X_\alpha^+ X_\alpha\rangle + \langle Y_\alpha^+ Y_\alpha\rangle + \langle Z_\alpha^+ Z_\alpha\rangle\right).$$

Исходя из (3в),(2I),(П2а) и неравенства Коши-Буняковского, в свою очередь, получаем:

$$\langle X_\alpha^+ X_\alpha\rangle \le M_3^2\left(\sum_{\beta=1}^{s}|\lambda_\beta|\sqrt{\langle B_\beta^+ B_\beta\rangle}\right)^2 \le$$

$$\le M_3^2\left(\sum_{\beta=1}^{s}|\lambda_\beta|^2/\omega_\beta\right)\left(\sum_{\beta=1}^{s}\omega_\beta\langle B_\beta^+ B_\beta\rangle\right) \le \qquad (\text{П.4})$$

$$\le M_3^2 P_s\left(\sum_{\beta=1}^{s}\omega_\beta\langle B_\beta^+ B_\beta\rangle\right),$$

где

$$P_s = \sum_{\beta=1}^{s}|\lambda_\beta|^2/\omega_\beta. \qquad (\text{П5})$$

Аналогичным способом находим:

$$\langle Y_\alpha^+ Y_\alpha\rangle \le M_3^2 P_s \sum_{\alpha=1}^{s}\langle B_\alpha B_\alpha^+\rangle =$$

$$= M_3^2 P_s \sum_{\alpha=1}^{s}\langle B_\alpha^+ B_\alpha + [B_\alpha; B_\alpha^+]\rangle \le \qquad (\text{П6})$$

$$\le M_3^2 P_s\left[\sum_{\alpha=1}^{s}\omega_\alpha\langle B_\alpha^+ B_\alpha\rangle + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{N}\left(M_3 P_s + \sum_{\alpha=1}^{s}\omega_\alpha\right)\right].$$

Кроме того, благодаря дополнительным условиям (3а-в), имеем:

$$\langle Z_\alpha^+ Z_\alpha \rangle \leq \| Z_\alpha \|^2 \leq \left(M_2 + 2 M_1 M_3 P_s \right)^2. \tag{П7}$$

Подставляя оценки (П4)-(П7) в (П3), мы получим оценку для $\langle R_\alpha^+ R_\alpha \rangle$ сверху. Точно такая же оценка может быть выведена для средних вида $\langle R_\alpha R_\alpha^+ \rangle$. В результате находим:

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\omega_\alpha}{2} \langle R_\alpha R_\alpha^+ + R_\alpha^+ R_\alpha \rangle \leq 4 \sum_{\alpha=1}^{s} \omega_\alpha^3 \langle B_\alpha^+ B_\alpha \rangle +$$
$$+ 8 \left(M_3 P_s \right)^2 + \sum_{\beta=1}^{s} \omega_\beta \langle B_\beta^+ B_\beta \rangle + \tag{П8}$$
$$+ 4 P_s \left(M_2 + 2 M_1 M_3 P_s \right)^2 + N^{-1} \{ (2 M_3 P_s)^2 \cdot$$
$$\cdot \left(M_3 P_s + \sum_{\beta=1}^{s} \omega_\beta \right) \} \leq d_1^2 \sum_{\alpha=1}^{s} \omega_\alpha \langle B_\alpha^+ B_\alpha \rangle + d_{2,N}^2,$$

где

$$(d_1)^2 = 4 \left[2 \left(M_3 P_s \right)^2 + \sum_{\beta=1}^{s} \omega_\beta^2 \right], \tag{П9а}$$

$$(d_{2,N})^2 = 4 P_s \left(M_2 + 2 M_1 M_3 P_s \right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{N} \left(2 M_3 P_s \right)^2 \left(M_3 P_s + \sum_{\beta=1}^{s} \omega_\beta \right). \tag{П9б}$$

Здесь P_s определяется формулой (П5). Далее, на основании оценки (П8), неравенства Гельдера и элементарного неравенства

$$(x+y)^{1/3} \leq x^{1/3} + y^{1/3}$$

получаем окончательную оценку в виде:

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \left[\frac{\omega_\alpha}{2} \langle R_\alpha R_\alpha^+ + R_\alpha^+ R_\alpha \rangle \right]^{1/3} \leq$$
$$\leq \left(s d_1 \right)^{2/3} \left(\sum_{\beta=1}^{s} \omega_\beta \langle B_\beta^+ B_\beta \rangle \right)^{1/3} + \left(s d_{2,N} \right)^{2/3}. \tag{П10}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н.Боголюбов. Изв. АН СССР, сер. физ. II,23(1947); Вестник МГУ № 7(1947).
2. Bardeen, J., Cooper, L.N. and Schrieffer, J.R., Phys. Rev., 108, 1175 (1957).
3. Н.Н.Боголюбов. Препринт ОИЯИ Р-5II, Дубна, 1960. Physica 26 (Supplement) (1960).
4. Onsager L., Phys. Rev., 65, 117 (1944); Yang. C.N., Phys. Rev., 85, 808 (1952).
5. Yang C.N., Some Exactly Soluble Problems in Statistical Mechanics (Lectures given at the Karpacz School, Poland, 1970).
6. Bogolubov N.N., Jr., Physica 32, 333 (1966).
7. Н.Н.Боголюбов(мл.) Метод исследования модельных гамильтонианов. "Наука", Москва. 1974.

8. Brankov J.G., Shumovsky A.S., and Zagrebnov V.A., Physica 78, 183 (1974).

9. С.С.Лапушкин.Сообщение ОИЯИ PI7-9I06,Дубна,I974.

10. Й.Г.Бранков, В.А.Загребнов,Н.С.Тончев.ТМФ 22,20(I975).

11. А.М.Курбатов,В.Н.Плечко.ТМФ 26,I09(I976).

12 Brankov J.G., Tonchev N.S., and Zagrebnov V.A., Physica 79, 125 (1975).

13 Й.Г.Бранков,Н.С.Тончев. Сообщения ОИЯИ P4-8I50,Дубна, I974; P4-8940,Дубна,I975.

14. Bogolubov N.N., Jr. and Plechko V.N., Preprint IC/75/68, Trieste, 1975.

15. Tindemans P.A.J., and Capel H.W., Physica 72, 433 (1974).

16. Tindemans P.A.J. and Capel H.W., Physica 75, 407 (1974).

17. Hepp K. and Lieb E.H. Ann. Phys., (N.Y.) 76, 360 (1973); Phys. Rev., A5, 2517 (1973).

18. Haag R. Nuovo Cimento 25, 287 (1962).

19. Kastler D. and Robinson D.W. Commun. Math. Phys., 3, 151 (1966).

20. Д.Я.Петрина.ТМФ 4, 389(I970).

21. Mattis D.S. and Langer W.D. Phys. Rev. Lett., 25, 376 (1970).

22. Н.Н.Боголюбов(мл.),В.Н.Плечко,Н.Ф.Репников.ТМФ 24, 357(I975).

23. Н.Н.Боголюбов.Препринт ОИЯИ Д-78I, Дубна, I96I. Phys. Abhandl. I, II3 (I962) (на немецком языке).

Рукопись поступила в издательский отдел
22 апреля I976 года