e
+

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Д17-81-250

Г.М.Гавриленко, Д.Михалаке, В.К. Федянин

ОСОБЕННОСТИ СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПОЗИТРОНОВ ПРИ ПЛОСКОСТНОМ КАНАЛИРОВАНИИ ЧЕРЕЗ КРИСТАЛЛЫ ТИПА NaCl И CaF_2

Направлено на XI Совещание по физике
взаимодействия заряженных частиц
с кристаллами /Москва, 1981/

1981

В настоящее время наблюдается большой интерес к изучению, как теоретически, так и экспериментально, спонтанного излучения, возникающего при каналировании электронов и позитронов /1-3/.

В данной работе мы изучаем спонтанное излучение релятивистских позитронов, каналируемых в плоскости /111/ через кристаллы KCl , KBr и KI /4/, и в плоскости /100/ в кристаллах типа CaF_2. Все характеристики рассчитываются в дипольном приближении, т.е. для энергии падающих позитронов до 10 ГэВ.

Хорошо известно, что в некоторых соединениях типа / AB и AB_2 /, имеющих кубическую структуру, есть кристаллические плоскости, заселенные одним типом атомов. Так, в соединениях типа AB KCl , KBr , KI плоскости /111/ поочередно заселены атомами вида A и вида B, аналогичное чередование заселенности наблюдается для плоскостей /100/ в соединениях типа $AB_2(CaF_2)$. Аппроксимируем континуум потенциала Линдхарда для этих соединений функцией вида

$$V(x)=\frac{k}{2}(x-x_0)^2, \quad x>0, \qquad V(x)=\frac{k}{2}(x+x_0)^2, \quad x<0, \qquad /1/$$

которая есть потенциальная функция симметричного двухъямного осциллятора. Здесь $k=Ab_{12}^2+Bb_{13}^2$, $x_0=[1+\frac{A}{B}(\frac{b_{12}}{b_{13}})^2]^{-1}d_p$,

$$A=A_{12}e^{-b_{12}\frac{d_p}{2}}, \qquad B=A_{13}e^{-b_{13}\frac{d_p}{2}},$$

$$A_{12}=\frac{0{,}35}{0{,}3}(2\pi Z_1 Z_2 e^2 a_{12}\, n_p), \qquad b_{12}=0{,}3/a_{12},$$

a_{12} - томас-ферми-радиус экранировки и d_p - расстояние между кристаллическими плоскостями. Величины потенциальных барьеров плоскостей $B_1=\frac{k}{2}x_0^2$, $B_2=\frac{k}{2}(d_p-x_0)^2$

Для значений параметров, входящих в потенциал, имеем следующую таблицу:

KCl /$k=24{,}28$ эВ/Å^2, $x_0=0{,}95$ Å, $B_1=10{,}95$ эВ, $B_2=9{,}12$ эВ/
KBr /$k=27{,}43$ эВ/Å^2, $x_0=1{,}16$ Å, $B_1=18{,}52$ эВ, $B_2=7{,}58$ эВ/
KI /$k=24{,}38$ эВ/Å^2, $x_0=1{,}34$ Å, $B_1=21{,}99$ эВ, $B_2=5{,}91$ эВ/.

В системе отсчета, связанной с позитроном, собственные функции и соответствующие им собственные значения спектра поперечной энергии определяются уравнением

$$\left[\frac{p^2}{2m_0}+\gamma V(x)\right]\Psi_{\epsilon_n}=\epsilon_n\Psi_{\epsilon_n}, \qquad \text{где } \gamma=(1-v_z^2/c^2)^{-1/2} \qquad /2/$$

Излучение позитронов возникает в результате переходов между этими уровнями. Энергетический спектр и собственные функции задачи /2/ с потенциалом /1/ даются выражениями

$$\epsilon_n=\hbar\omega_0(\nu_n+\frac{1}{2}), \quad \omega_0=(\gamma k/m_0)^{1/2} \qquad /3/$$

$$\Psi_{\epsilon_n}=c_n D_{\nu_n}[\sqrt{2}\,a(x-x_0)],\ x>0;\ (-1)^n c_n D_{\nu_n}[-\sqrt{2}\,a(x+x_0)],\ x<0 \qquad /4/$$

$$a=(m_0\omega_0/\hbar)^{1/2},$$

где $D_\nu(x)$ - функция параболического цилиндра[5]:

$$D_\nu(x)=2^{\nu/2}e^{-\frac{x^2}{4}}\left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})}\,{}_1F_1(-\frac{\nu}{2},\frac{1}{2},\frac{x^2}{2})+\frac{x}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\nu}{2})}\,{}_1F_1(\frac{1-\nu}{2},\frac{3}{2},\frac{x^2}{2})\right] \qquad /5/$$

и ${}_1F_1(a,b,x)$ - вырожденная гипергеометрическая функция, $\Gamma(x)$ - гамма-функция. Имеем $D_\nu(\sqrt{2}\,x)=2^{-\frac{\nu}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}H_\nu(x)$, где $H_\nu(x)$ - функция Эрмита. Нормировочная константа

$$c_n^{-2}=\frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2}{a\,\Gamma(-\frac{1}{2}\nu_n)\Gamma(\frac{1-\nu_n}{2})}\left[\psi(\frac{1-\nu_n}{2})-\psi(-\frac{\nu_n}{2})\right]+2\dot{I}_n, \qquad /6/$$

$$\dot{I}_n=(a\,2^{\nu_n+1})^{-1}\int_0^{a^2x_0^2}e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}H_{\nu_n}^2(x)dx,$$

где $\psi(x)=\Gamma'(x)/\Gamma(x)$ ψ-функция. Спектр ν_n определяется из условия сшивания решений при $x=0$. Из условия $\Psi_{\epsilon_n}(x\to-0)=\Psi_{\epsilon_n}(x\to+0)$ мы получаем для нечетных функций состояния

$$H_{\nu_{2\ell+1}}(-a x_0)=0. \qquad /7/$$

Для $n=2\ell$ мы получим следующее условие из $\Psi'_{\epsilon_n}(x\to-0)=\Psi'_{\epsilon_n}(x\to+0)$:

$$a x_0 H_{\nu_{2\ell}}(-a x_0)+2\nu_{2\ell}H_{\nu_{2\ell}-1}(-a x_0)=0. \qquad /8/$$

Для матричных элементов оператора положения $x-x_0$ позитрона имеем:

$$\langle\nu_n|x-x_0|\nu_{n'}\rangle=\frac{2c_n c_{n'}}{a^2}2^{-(\nu_n+\nu_{n'})}[\nu_n\dot{I}(\nu_n-1,\nu_{n'},a x_0)+ \qquad /9/$$

$$+\nu_{n'}\dot{I}(\nu_n,\nu_{n'}-1,a x_0)+\frac{1}{2}e^{-a^2x_0^2}H_{\nu_n}(a x_0)H_{\nu_{n'}}(a x_0)].$$

где $I(\nu_n, \nu_{n'}, \alpha x_0) = \int\limits_{\alpha x_0}^{\infty} e^{-x^2} H_{\nu_n}(x) H_{\nu_{n'}}(x) dx$.

Заметим, что $\langle \nu_n | x - x_0 | \nu_{n'} \rangle = 0$, если $n+n'$ четно. В системе отсчета позитрона интенсивность излучения в дипольном приближении [6] дается формулой

$$\frac{d^2 P_{r,ij}}{d\Omega_r \, d\omega_r} = \frac{\omega_r^4 e^2}{2\pi c^3} |\langle i|x|j\rangle|^2 (1 - \sin^2\theta_r \cos^2\phi_r) \delta(\omega_r - \omega_{ij}). \qquad /10/$$

Принимая во внимание, что [8]

$$d\Omega_r = \frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta\cos\theta)^2} d\Omega \ , \quad d\omega_r = \gamma(1-\beta\cos\theta)\, d\omega$$
$$\sin^2\theta_r = \frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta\cos\theta)^2} \sin^2\theta, \quad \phi_r = \phi, \quad dP_r = \frac{(1-\beta\cos\theta)}{1-\beta^2} dP, \qquad /11/$$

имеем следующее выражение для интенсивности излучения в лабораторной системе отсчета:

$$\frac{d^2 P_{ij}}{d\omega \, d\Omega} = \frac{\gamma(1-\beta^2)^2}{(1-\beta\cos\theta)^2} \frac{d^2 P_{r,ij}}{d\omega_r d\Omega_r} = \qquad /12/$$
$$= \frac{\gamma\omega^4 e^2}{2\pi c^3} |\langle i|x|j\rangle|^2 [(1-\beta\cos\theta)^2 - (1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\phi]\, \delta[\gamma\omega(1-\beta\cos\theta) - \omega_{ij}].$$

Спектральное распределение есть

$$\frac{dP_{ij}}{d\omega} = \frac{3P_{ij}}{\omega_m^{(ij)}} \frac{\omega}{\omega_m^{(ij)}} \frac{(1+\beta)^2}{4\beta} \left[\frac{(1+\beta)^2}{2\beta^2} \left(\frac{\omega}{\omega_m^{(ij)}}\right)^2 - \frac{(1+\beta)}{\beta} \frac{\omega}{\omega_m^{(ij)}} + \frac{(1+\beta^2)}{2\beta^2}\right], \qquad /13/$$

где $P_{ij} = \frac{3+\beta^2}{3\beta^2} \frac{e^2 \omega_{ij}^4}{c^3} |\langle i|x|j\rangle|^2$ - интенсивность излучения и $\omega_m^{(ij)} = \frac{\omega_0(\nu_{n_i} - \nu_{n_j})}{\gamma(1-\beta)}$ - максимальная частота излучения в направлении вперед. В качестве оценки величин учтем только $n \to n-1$ переходы

$$P(\delta) = \sum_{n=0}^{n_{max}} p_n(\delta) P_n \ , \quad \frac{dP(\delta)}{d\omega} = \sum_{n=0}^{n_{max}} p_n(\delta) \frac{dP_n}{d\omega}$$

$$P_n = \frac{(3+\beta^2)}{3\beta^2} \frac{e^2}{c^3} |\langle \nu_n | x | \nu_{n-1} \rangle|^2 \omega_{n,n-1}^4 \qquad /14/$$

$$\frac{dP_n}{d\omega} = \frac{3P_n}{\omega_m^{(n,n-1)}} \frac{\omega}{\omega_m^{(n,n-1)}} \frac{(1+\beta)^2}{4\beta} \left[\frac{(1+\beta)^2}{2\beta^2} \left(\frac{\omega}{\omega_m^{(n,n-1)}}\right)^2 - \frac{(1+\beta)}{\beta} \frac{\omega}{\omega_m^{(n,n-1)}} + \frac{(1+\beta^2)}{2\beta^2}\right],$$

где n_{max} - наибольшее значение, для которого собственное значение ϵ_{ν_n} меньше, чем величина большего потенциального барьера плоскости, $p_n(\delta)$ - вероятность того, позитрон первоначально будет в состоянии ν_n, δ - угол влета позитрона к плоскости $y-z$. Для коллимированных пучков позитронов определим $p_n(\delta)$ следующей формулой:

$$p_n(\delta)=2^{-\nu_n}\ \frac{\pi\hbar\tilde{\omega}_0}{kd_p}\ c_n^2\exp\left(-\frac{m_0\gamma c^2\delta^2}{\hbar\tilde{\omega}_0}\right)H_{\nu_n}\left[\left(\frac{m_0\gamma c^2}{\hbar\tilde{\omega}_0}\right)^{1/2}\delta\right],\ \tilde{\omega}_0=\omega_0/\gamma. \qquad /15/$$

Для позитронов 50 МэВ мы имеем γ = 98,85, $\alpha x_0(KCl)$ = 3,99, $\alpha x_0(KBr)$ = 5,03, $\alpha x_0(KI)$ = 5,66, $\hbar\tilde{\omega}_0(KCl)$ = 1,36 эВ, $\hbar\tilde{\omega}_0(KBr)$ = 1,44 эВ, $\hbar\tilde{\omega}_0(KI)$ = 1,37 эВ. Максимальная частота излучения вперед

$$\hbar\omega_m^{(n,n-1)}=\frac{\hbar\omega_0}{\gamma(1-\beta)}(\nu_n-\nu_{n-1}),\quad \frac{\hbar\omega_0}{\gamma(1-\beta)}=26{,}53 \text{ кэВ (KCl)},$$

28,20 кэВ (KBr), 26,76 кэВ (KI).

Для позитронов 1 ГэВ $\alpha x_0(KCl)$ = 8,44, $\alpha x_0(KBr)$ = 10,65, $\alpha x_0(KI)$ = = 11,95, $\frac{\hbar\omega_0}{\gamma(1-\beta)}$ = 2,36 МэВ (KCl), 2,50 МэВ (KBr), 2,36 МэВ (KI).

Для 10 ГэВ позитронов $\alpha x_0(KCl)$ = 15,01, $\alpha x_0(KBr)$ = 18,93, $\alpha x_0(KI)$= = 21,25, $\frac{\hbar\omega_0}{\gamma(1-\beta)}$ = 74,45 МэВ (KCl), 79,14 МэВ (KBr), 74,60 МэВ (KI).

Более подробные численные расчеты интенсивности и частоты излучения позитронов при плоскостном каналировании через кристаллы KCl , KBr , KI для энергий позитронов E = 50 МэВ, 1 ГэВ, 10 ГэВ будут опубликованы позднее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кумахов М.А. ДАН СССР, 1976, т.230, с.1077.
2. Базылев В.А. и др. ДАН СССР, 1980, т.253, с.1100.
3. Weddel R. phys.stat.sol.(b), 1980, v.99, p.11.
4. Диденко А.Н., Воробьев С.А., Цехановский И.А. Письма в ЖЭТФ, 1970, т.12, с.310.
5. Abramowitz M., Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards, Applied Mathematics series 55, Washington, 1964.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. "Наука", М., 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 апреля 1981 года.