СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Д17 - 10418

Н.Н.Боголюбов (мл.)

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ ТЕОРЕМАХ В ТЕОРИИ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

1977

Д17 - 10418

Н.Н.Боголюбов (мл.)

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ ТЕОРЕМАХ В ТЕОРИИ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Боголюбов Н.Н. (мл.)

Д17 - 10418

О некоторых обобщенных теоремах в теории модельных систем

Предлагается обобщенный метод вычисления одновременных и многовременных корреляционных средних, составленных из ограниченных операторов, в представлении чисел заполнения. Показывается, что при некотором общем условии, легко проверяемом для конкретных модельных систем, справедлива теорема, из которой следует вычисление корреляционных средних сразу для целого класса модельных систем.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Д17 - 10418

Bogolubov N.N. (Jr.)

Generalized Theorems in Model System Theory

In this paper a generalized method of calculation of one-time and many-time correlation functions for a product of the bound operators in second quantized representation is presented.

An important theorem is proved from which follows the possibility to calculate correlation averages for a whole class of model systems.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

О некоторых обобщенных теоремах в теории модельных систем

В последнее время модельные задачи, в которых взаимодействие, как правило, имеет дальнодействующий вид, получили дальнейшее развитие. Во многих случаях ряда таких задач свободную энергию, отнесенную к единице объема, можно точно подсчитать, и при этом такой подсчет будет совпадать с обычными результатами молекулярной теории среднего поля.

В этой связи можно условно разбить такие задачи на два класса: это классические задачи с несепарабельным взаимодействием и модельные задачи с сепарабельным взаимодействием, гамильтонианы которых удобно записывать и рассматривать в представлении вторичного квантования.

Для ряда модельных систем с особым типом несепарабельного взаимодействия Каца /1/, то есть когда взаимодействие между двумя частицами, помещенными в точках $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_j$, убывает, примерно, как

$$-\gamma^d exp(-\gamma|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)$$

для достаточно больших значений $|\vec{r}_i-\vec{r}_j|$, d - размерность.

Точное вычисление свободной энергии на одну частицу может быть получено в пределе типа Ван-дер-Вальса, когда сначала берут термодинамический предел, а затем устремляют параметр $\gamma \to 0$.

В одномерном классическом случае такие задачи рассматривались Кацом, Уленбеном, Хеммером /2/. Распространение сходных задач на большее число измерений в квантовомеханической постановке рассматривалось Ван-Кампеном /3/, Лебовицом и Пенрозом /4/, Либом /5/.

Модельные системы Изинга со сходным типом взаимодействия рассматривались Зигертом и Везетти /6/.

Говоря о втором классе модельных задач, отметим, что здесь взаимодействие не обязательно имеет дальнодействующий вид; существенно, что потенциал имеет сепарабельный вид. Модельные гамильтонианы таких задач, как правило, записываются в представлении вторичного квантования. Это в первую очередь модельные задачи теории сверхпроводимости и сверхтекучести /7-10/, ферромагнетизма, антиферромагнетизма, взаимодействия вещества и излучения /23/.

Этот класс включает также модели с взаимодействием так называемых "ближайших соседей", в котором спаривание между двумя частицами не зависит от расстояния между ними. Модельные задачи решетчатого газа с подобным типом взаимодействия вводились и исследовались рядом авторов /11,12/.

В случае некоммутирующих операторов модельные задачи существенно усложняются /13/.

Начиная с так называемого приведенного гамильтониана теории сверхпроводимости, Н.Н.Боголюбов, Д.Н.Зубарев, Ю.А.Церковников /14/ показали возможность точного вычисления свободной энергии на единицу объема. Несколько позже, начиная с известной теории БКШ /15/, аналогичное исследование проводилось другими авторами /16/.

В недавнее время для модельных систем в представлении вторичного квантования была разработана и успешно применяется специальная математическая техника, позволяющая найти точное в термодинамическом пределе решение для определенных классов модельных задач /17/.

Идея метода состоит в замене исходного модельного гамильтониана H, не поддающегося точному решению, "аппроксимирующим" H_0 и последующим доказательством их термодинамической эквивалентности, т.е. в доказательстве совпадения в термодинамическом пределе $N, V \to \infty$, $\frac{N}{V} = \text{const}$, термодинамических потенциалов и средних, вычисленных на основе H и H_0 .

В качестве примеров модельных задач, для которых нашел применение метод аппроксимирующих гамильтонианов, можно привести традиционную модель БКШ и ее обобщений в теории сверхпроводимости /18,19/, модель ферромагнетиков с дальнодействием /20/, модель Дикке, описывающую взаимодействия вещества с изучением /23/, модель сверхпроводимости с учетом электрон-дырочного спаривания, модель для ферроэлектриков типа KDP /21/, квазиспиновые модели /22/ и др.

В настоящей работе будем заниматься вопросами вычисления одновременных и многовременных корреляционных функций для некоторого специально не конкретизированного гамильтониана H .

Существенно лишь то, что модельный гамильтониан в представлении вторичного квантования представим в виде

$$H = G + \Gamma, \tag{1}$$

где G - аддитивная сумма, $\sum_{(j)} G_j = G$.

Операторы G_j действуют только на переменные n_j волновой функции $\Phi(\ldots n_j \ldots)$. (2)

Пусть оператор (1) задан в гильбертовом пространстве H, векторы которого, то есть волновые функции $\Phi(\ldots n_j \ldots)$, могут быть занумерованы дискретной системой индексов n_j , каждый из которых принимает τ значений, τ - фиксированное число, (j =1,2,3,...), N - фиксированное число.

В качестве примера такого пространства волновых функций $\Phi(\cdots n_j \cdots)$ /24,25/ в случае, если рассматривается спиновый гамильтониан, за n_j можно выбрать Z -ую компоненту спина для значения спина $S=\frac{1}{2}$, $n_z=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$; для спина $S=1$, $n_z=1, 0, -1$, в случае $S=\frac{3}{2}$, $n_z=\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ и т.д.(3).

В этом пространстве будем рассматривать различные операторы. Особое внимание будем уделять операторам, которые действуют на "переменный индекс n_j ".

Полное матричное представление таких операторов пишется в виде

$$(G_j)_{\ldots n_k \ldots ; \ldots n'_k \ldots} = G_j(n_j, n'_j) \prod_{(k \neq j)} \delta(n_k - n'_k). \tag{4}$$

Таким образом,

$$(G_j\Phi)_{\dots n_k \dots ; \dots n'_k \dots} = \sum_{(n'_j)} G_j(n_j, n'_j)\,\Phi(\dots n_k \dots ; \dots n'_j \dots)_{(k\neq j)}.$$

Будем называть τ -мерную квадратную матрицу собственной компонентой G_j. Полное матричное представление G_j состоит из прямого произведения собственной компоненты $G_j(n_j, n'_j)$ и единичной матрицы, действующей на остальные переменные. Здесь δ -функция - символ Кроннекера.

Предполагается, что в G и Γ (I) входит параметр V, который условно назовем объемом системы, так, что величины

$$Sp\, e^{-\frac{H}{\theta}}, \quad Sp\, e^{-\frac{G}{\theta}}$$

существуют и конечны при конечном V. Поэтому мы всегда можем определять среднее значение по гамильтонианам H и G естественным образом.

$$\langle \mathfrak{U} \rangle_H = \frac{Sp\, \mathfrak{U} e^{-\frac{H}{\theta}}}{Sp\, e^{-\frac{H}{\theta}}}, \quad \langle \mathfrak{U} \rangle_G = \frac{Sp\, \mathfrak{U} e^{-\frac{G}{\theta}}}{Sp\, e^{-\frac{G}{\theta}}}. \tag{5}$$

В дальнейшем под оператором $\mathfrak{U}$ будем понимать произведение из конечного числа ограниченных по норме операторов A_j.

Рассмотрим уравнение движения в представлении Гейзенберга для операторов A_j с ограниченными нормами. При этом предполагаем, что когда величина фиксирована или ограничена, она не зависит от V и остается постоянной в процессе предельного перехода $V \to \infty$.

Имеем

$$
\begin{aligned}
& i\,\frac{dA_j(t)}{dt} = [A_j(t), H]_{(-)} && (A)\\
& i\,\frac{d\tilde{A}_j(t)}{dt} = [\tilde{A}_j(t), H]_{(-)} && (B)
\end{aligned} \tag{6}
$$

при начальных условиях $\tilde{A}_j(0) = A_j(0) = A_j$.

Ясно, что $A_j(t) = e^{iHt} A_j(0) e^{-iHt}$ формально удовлетворяет уравнению 6-A, а (7)

$$\tilde{A}_j(t) = e^{iGt} A_j(0) e^{-iGt} \text{ - уравнению 6-B} \tag{8}$$

Замечая, что G по условию аддитивная сумма и что операторы $\tilde{A}_j(t)$ действуют только на переменные n_j, соответствующие волновой функции, имеем:

$$\tilde{A}_j(t) = e^{iGt} A_j(0) e^{-iGt} = e^{iG_j t} A_j(0) e^{-iG_j t}. \tag{9}$$

Здесь учтено, что операторы A_j и $G_{j'}$ перестановочны, если они действуют на разные числа n_j и $n_{j'}$ ($j' \neq j$).

Обратим внимание на то, что оператор $A_j(t) = e^{iHt} A_j(0) e^{-iHt}$ не допускает сходного представления, как $\tilde{A}_j$, поскольку действует на разные числа n_j и, по определению (I), H содержит неаддитивную часть Γ.

Цель этой работы - показать, что среднее от произведения операторов типа (7), построенное на основе H, асимптотически близко к средней от произведения операторов типа (9).

Для этого будет разработан специальный метод мажорационных оценок, в котором существенным является построение оценки для корреляционной средней вида

$$\langle R \cdot R \rangle, \tag{10}$$

где

$$R = [\mathfrak{U}_1, \dots \mathfrak{U}_m ; \Gamma].$$

Нормы операторов $\mathfrak{U}_j$ $(j = 1, 2, \dots m)$ ограничены величиной A.

Забегая вперед, отметим, что для оценки (I0) целесообразно иметь оценки

$$\langle [\mathfrak{U}, \Gamma], [\mathfrak{U}, \Gamma]^+ \rangle \leq \eta_V\, |\mathfrak{U}|^2 \to 0 \quad \text{при } V \to \infty \tag{11}$$

$$|[\mathfrak{B}, [\Gamma, \mathfrak{U}]]| \leq \zeta_V\, |\mathfrak{B}|\,|\mathfrak{U}| \to 0 \quad \text{при } V \to \infty \tag{11-a}$$

$|\dots|$ - означает норму соответствующих операторов, а $\mathfrak{B}$ - любое конечное произведение операторов

$$\mathfrak{U}_1, \dots \mathfrak{U}_m.$$

Если при оценке корреляционной средней (I0) выражение (II) можно считать условием, то оценка (II-a) по существу есть следствие оценки (II) и приводится лишь для удобства мажорации получающихся членов.

Сформулируем основную теорему.

Предположим, что выполняется условие (II).

Тогда можно доказать справедливость неравенства

$$\left| \langle A_{j_1}(t_1)\dots A_{j_n}(t_n) \rangle_H - \langle \tilde{A}_{j_1}(t_1)\dots \tilde{A}_{j_n}(t_n) \rangle_G \right| \leq$$
$$\leq |A|^n \cdot \Big\{ \sum_{m=2}^{n} |t_m - t_{m-1}| \Big(m\sqrt{\eta_V} + \frac{m(n-1)}{2}\sqrt{\xi_V} \Big) + \tag{I2}$$
$$+ S^{\frac{3}{2}n} \mathcal{K} \sqrt{\eta_V} + \mathcal{K} S^n (1+S^n) \Big\{ n\sqrt{\eta_V} + \frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\xi_V} \Big\} \Big\}.$$

В этом неравенстве правая часть стремится к нулю при $V \to \infty$. Здесь всегда можно принять

$$\mathcal{K} = \frac{2}{\theta}, \tag{I3а}$$

а в случае, если разность между ближайшими собственными числами собственной матрицы G_j больше некоторого положительного числа γ, и это справедливо для всех чисел j, $j = j_1, \dots j_n$, можем принять за $\mathcal{K}$ другую оценку.

$$\mathcal{K} = \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{e} \right) \cdot \frac{1}{\gamma}. \tag{I3б}$$

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, скажем несколько слов о ее значении. Заметим, что с ее помощью можем получить асимптотически точное выражение для корреляционной функции

$$\langle \tilde{A}_{j_1}(t_1) \dots \tilde{A}_{j_n}(t_n) \rangle_G .$$

Это выражение $\langle \tilde{A}_{j_1}(t_1) \dots \tilde{A}_{j_n}(t_n) \rangle_G$ может быть элементарно подсчитано, для чего следует уметь диагонализовать матрицу S-ого порядка.

В самом деле, возьмем общий случай, когда среди индексов $j_1,\dots j_n$ могут быть не все различные (среди них могут быть и одинаковые). Разделим поэтому все индексы на группы, в которых ряд индексов $j_{q_1},\dots j_l$ равняется одному числу i_e. Кратность этого числа i_e назовем P, (P = I, 2, 3, ...). Как уже отмечалось, оператор $\tilde{A}_j(t)$ имеет вид $\tilde{A}_j(t) = e^{iGt} A_j e^{-iGt}$.

Если перейти к представлению, в котором G_j диагональна, и обозначить собственные числа за $E_j(\nu)$, тогда имеем

$$\tilde{A}_j(t, \nu, \nu') = e^{i\{E_j(\nu) - E_j(\nu')\}t} A_j(\nu, \nu').$$

Выделяя "различные" индексы в произведении операторов $\tilde{A}_{j_1}(t_1) \dots \tilde{A}_{j_n}(t_n)$, мы можем переставлять все операторы $\tilde{A}_j$ между собой таким образом, чтобы сгруппировать их в совокупности операторов с индексами, различными между собой. Таким образом получим

$$\mathfrak{A}_{i_k} = \prod_{(q)} A_{j_q}(t_q) \qquad (i_q = i_k)$$

(каждая совокупность состоит из произведения операторов с одинаковыми внутри совокупности индексами). Произведение операторов оказывается просто произведением средних, и задача сводится к вычислению произведения средних

$$\langle \tilde{A}_{j_1}(t_1) \dots \tilde{A}_{j_n}(t_n) \rangle_G = \langle \mathfrak{A}_{i_1} \dots \mathfrak{A}_{i_m} \rangle_G = \langle \mathfrak{A}_{i_1} \rangle_G \dots \langle \mathfrak{A}_{i_m} \rangle_G ,$$

то есть

$$\Big\langle \prod_{\substack{(q) \\ (i_q \neq i_k)}} \tilde{A}_{j_k}(t_q) \Big\rangle_G =$$
$$= \frac{\sum\limits_{(\nu)} e^{-\frac{E_k(\nu)}{\theta}} \cdot \sum\limits_{\nu_1,\dots \nu_{p-1}} \tilde{A}_{i_k}(\nu, \nu_1) \dots \tilde{A}(\nu_{p-1}, \nu) e^{i[E_{i_k}(\nu) - E_{i_k}(\nu_1)]t_{q_1} + \dots + [E_{i_k}(\nu_{p-1}) - E(\nu)]t_{q_p}}}{\sum\limits_{(\nu)} e^{-\frac{E_{i_k}(\nu)}{\theta}}} .$$

(Берем представление, в котором матрицы G_j диагональны). Вычисление корреляционных средних сводится к диагонализации матрицы конечного порядка G_j.

Может возникнуть вопрос: когда выполняются условия, которые мы наложили на гамильтониан? Каковы будут возможные приложения этой теоремы?

Обратим внимание на то, что во многих работах /20,25,27–3I/ изучаются модельные системы вида

$$H = T + \sum_{1 \leq \alpha \leq l} g_\alpha J_\alpha J_\alpha^+ V, \tag{I4}$$

где T и J_α – аддитивные суммы вида $g_\alpha < 0$,

$$T = \sum_{(j)} T_j \quad ; \quad J_\alpha = \frac{1}{V} \sum_{(j)} J_{\alpha, j}, \tag{I5}$$

причем $|J_\alpha| \le M_1$, $T = T^+$, $|TJ_\alpha - J_\alpha T| \le M_2$,

$$\frac{1}{V} \sum_{(j)} |J_{\alpha j}|^2 \le M_3, \tag{I6}$$

где M_1, M_2, M_3 – постоянные при $V \to \infty$ $(1 \le \alpha \le S)$.
Далее вводят так называемый аппроксимирующий гамильтониан

$$H_{app} = T + V \sum_{1 \le \alpha \le \ell} g_\alpha (\bar{C}_\alpha J_\alpha^+ + \bar{C}_\alpha^* J_\alpha) - V \sum_{1 \le \alpha \le \ell} g_\alpha \bar{C}_\alpha \bar{C}_\alpha^* \tag{I7}$$

и во многих случаях модельных систем удается доказать, что

$$\langle (J_\alpha - \bar{C}_\alpha)(J_\alpha^+ - \bar{C}_\alpha^*) \rangle_H \le \mathcal{E}_V \to 0 \tag{I8}$$

при $V \to \infty$.

Покажем, что в таком случае условие нашей теоремы (II), которое мы анонсировали, будет выполнено, то есть

$$\langle [A_j, \Gamma] \cdot [A_j, \Gamma]^+ \rangle_H \le \eta_V \cdot |A_j|^2 \to 0$$

и

$$|[B_k, [\Gamma, A_j]]| \le \zeta_V |\mathcal{B}_k| |A_j| \to 0$$

при $V \to \infty$.

Положим
$$H = G + \Gamma$$

$$G = V \sum_{1 \le \alpha \le \ell} g_\alpha (\bar{C}_\alpha J_\alpha^+ + \bar{C}_\alpha^* J_\alpha) + T$$

$$\Gamma = -V \sum_{1 \le \alpha \le \ell} g_\alpha |\bar{C}_\alpha|^2 + V \sum_{1 \le \alpha \le \ell} g_\alpha (J_\alpha - \bar{C}_\alpha)(J_\alpha^+ - \bar{C}_\alpha^*).$$

Как только мы покажем, что $\bar{C}_\alpha$, входящее в аппроксимирующий гамильтониан (I7) и должным образом определенное согласно известной процедуре /I7,I8/, удовлетворяет условию (I8), то есть $\bar{C}_\alpha$ асимптотически приближаются к операторам J_α, мы сейчас же можем утверждать близость корреляционной функции для точного

гамильтониана и аппроксимирующего. Гамильтониан G отличается от аппроксимирующего H_{app} (I7) только на константу, поэтому:

$$\langle \cdots \rangle_G = \langle \cdots \rangle_{H_{app}}.$$

2. Покажем здесь, что из условия (II) следует условие (I8).

Рассмотрим пример. Пусть гамильтониан имеет вид (I4), где операторы T, J_α вводятся соотношениями (I5), причем выполнены условия (I6), тогда согласно /I7/ можно утверждать, что

$$\langle (J_\alpha - \bar{C}_\alpha)(J_\alpha^+ - \bar{C}_\alpha^*) \rangle_H \le \mathcal{E}_V \to 0 .$$
$$\text{при } V \to \infty$$

Учитывая, что

$$|[(J_\alpha^+ - \bar{C}_\alpha^*), (J_\alpha - \bar{C}_\alpha)]| = |[J_\alpha^+, J_\alpha]| =$$
$$= \frac{1}{V^2} \sum_{(j)} |[J_{\alpha,j}^+, J_{\alpha,j}]| \le \frac{2}{V^2} \sum_{(j)} |J_{\alpha,j}|^2 \le \frac{M_3}{2V},$$

нетрудно видеть также

$$\langle (J_\alpha^+ - \bar{C}_\alpha^*)(J_\alpha - \bar{C}_\alpha) \rangle_H \le \mathcal{E}_V + \frac{M_3}{2V}.$$

Составим коммутатор

$$[\Gamma, A_j] = V \sum_{1 \le \alpha \le \ell} g_\alpha (J_\alpha A_j - A_j J_\alpha)(J_\alpha^+ - \bar{C}_\alpha^*) +$$
$$+ V \sum_{1 \le \alpha \le \ell} g_\alpha (J_\alpha - \bar{C}_\alpha)(A_j J_\alpha^+ - J_\alpha^+ A_j) = \sum_{(\alpha)} g_\alpha (J_{\alpha j} A_j - A_j J_{\alpha j})(J_\alpha^+ - \bar{C}_\alpha^*) +$$
$$+ \sum_\alpha g_\alpha (J_\alpha - \bar{C}_\alpha)(A_j J_{\alpha,j}^+ - J_{\alpha,j}^+ A_j) = \sum_\alpha g_\alpha (J_\alpha^+ - \bar{C}_\alpha^*)[J_{\alpha,j}, A_j] +$$
$$+ \sum_{(\alpha)} g_\alpha (J_\alpha - \bar{C}_\alpha)[A_j, J_{\alpha,j}^+] + \frac{1}{V} \sum_\alpha g_\alpha [[J_{\alpha,j}, A_j], J_{\alpha,j}^+].$$

Принимая во внимание неравенства

$$|\langle \mathcal{U} \cdot \mathcal{B} \rangle|^2 \le \langle \mathcal{U} \mathcal{U}^+ \rangle \langle \mathcal{B}^+ \mathcal{B} \rangle$$
$$|\langle \mathcal{U}_\beta \mathcal{U}_\gamma^+ \rangle|^2 \le \langle \mathcal{U}_\beta \mathcal{U}_\beta^+ \rangle \langle \mathcal{U}_\gamma \cdot \mathcal{U}_\gamma^+ \rangle$$
$$\langle (\sum_{(\beta)} \mathcal{U}_\beta)(\sum_{(\gamma)} \mathcal{U}_\gamma^+) \rangle = \sum_{\beta,\gamma} \langle \mathcal{U}_\beta \cdot \mathcal{U}_\gamma^+ \rangle \le$$
$$\le \sum_{\beta,\gamma} \left(\langle \mathcal{U}_\beta \cdot \mathcal{U}_\beta^+ \rangle \langle \mathcal{U}_\gamma \cdot \mathcal{U}_\gamma^+ \rangle \right)^{\frac{1}{2}},$$

имеем $\langle(\sum_\beta \mathcal{U}_\beta)(\sum_\beta \mathcal{U}_\beta^+)\rangle \le \left(\sum_\beta \sqrt{\langle \mathcal{U}_\beta \cdot \mathcal{U}_\beta^+\rangle}\right)^2,$

полагая $\mathcal{U}_\beta = U_\beta V_\beta \quad , \quad |V_\beta| \le W,$

значит,

$$\langle(\sum_\beta U_\beta V_\beta)(\sum_\beta U_\beta V_\beta)^+\rangle \le |W|^2\left(\sum_\beta \sqrt{\langle U_\beta \cdot U_\beta^+\rangle}\right)^2. \qquad (\text{I9})$$

Положим для сокращения записи

$$X_{\alpha,j} = [J_{\alpha,j}, A_j], \qquad Y_{\alpha,j} = [A_j, J_{\alpha,j}^+]$$
$$Z_{\alpha,j} = [[J_{\alpha,j}, A_j], J_{\alpha,j}^+].$$

Используя неравенство (I9), а также оценки

$$|X_{\alpha,j}| \le 2IA, \quad |Y_{\alpha,j}| \le 2IA, \quad |Z_{\alpha,j}| \le 4I^2A,$$
$$I_{\alpha,j} \le I = const,$$

найдем

$$\langle R_j \cdot R_j^+\rangle \le \Big\{2IA\sum_\alpha |g_\alpha|\sqrt{\langle(J_\alpha^+ - \bar{C}_\alpha^*)(J_\alpha - \bar{C}_\alpha)\rangle_H} +$$
$$+ 2IA\sum_\alpha |g_\alpha|\sqrt{\langle(J_\alpha - \bar{C}_\alpha)(J_\alpha^+ - \bar{C}_\alpha^*)\rangle_H} + \frac{4I^2A}{V}\sum_\alpha g_\alpha\Big\}^2.$$

Таким образом,

$$\langle[\Gamma, A_j][\Gamma, A_j]^+\rangle_H \le \Big\{4IA\sqrt{\mathcal{E}_V} + \frac{2IAK + 4I^2A}{V}\Big\}^2\Big(\sum_\alpha |g_\alpha|\Big)^2.$$

Значит, можем принять в (II)

$$\eta_V = \Big\{4\sqrt{\mathcal{E}_V} + \frac{2K + 4I}{V}\Big\}^2 I^2 \Big(\sum_\alpha |g_\alpha|\Big)^2. \qquad (20)$$

Далее находим

$$|[B_k, [\Gamma, A_j]]| \le \frac{1}{V}\sum_{(\alpha)} |g_\alpha [J_{\alpha j}, A_j][B_k, J_{\alpha,k}^+]| +$$

$$+ \frac{1}{V}\sum_{(\alpha)} |g_\alpha [B_k, J_{\alpha,k}]\cdot[A_j, J_{\alpha j}^+]| \le \frac{8}{V} I^2 |A_j| \cdot |B_k| \cdot \sum_{(\alpha)} |g_\alpha|,$$

где в соотношении (II) (второе неравенство) за ζ_V можно принять:

$$\zeta_V = \frac{8}{V}|I|^2 \cdot \sum_\alpha |g_\alpha|. \qquad (2\text{I})$$

Итак, мы убедились в справедливости условия (II) и нашли выражения для η_V и ζ_V.

3. Переходя к доказательству основной теоремы, отметим, что нам потребуется еще некоторое обобщение неравенств, полученных в 2. Нам далее потребуется оценить среднее от произведения коммутаторов вида

$$\langle R \cdot R^+\rangle,$$

где

$$R = [\mathcal{U}_{i_1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot \mathcal{U}_{i_m}^{(m)}; \Gamma], \qquad i_\alpha \ne i_\beta; \ m \le n$$

все нормы операторов $\mathcal{U}_{i_\alpha}$ ограничены, то есть

$$|\mathcal{U}_{i_1}^{(1)}| \le \ldots \quad |\mathcal{U}_{i_m}^{(m)}| \le A^n.$$

Представим теперь

$$R = [\mathcal{U}_{i_1}^{(1)}, \Gamma]\mathcal{U}_{i_2}^{(2)} \ldots \mathcal{U}_{i_m}^{(m)} + \mathcal{U}_{i_1}^{(1)}[\mathcal{U}_{i_2}, \Gamma]\mathcal{U}_{i_3}^{(3)} \ldots \mathcal{U}_{i_m}^{(m)} +$$
$$+ \ldots + \mathcal{U}_{i_1}^{(1)} \ldots \mathcal{U}_{i_{m-1}}^{(m-1)}[\mathcal{U}_{i_m}^{(m)}, \Gamma] = [\mathcal{U}_{i_1}^{(1)}, \Gamma]\mathcal{U}_{i_2}^{(2)} \ldots \mathcal{U}_{i_m}^{(m)} +$$
$$+ [\mathcal{U}_{i_2}^{(2)}, \Gamma]\mathcal{U}_{i_1}^{(1)}\mathcal{U}_{i_3}^{(3)} \ldots \mathcal{U}_{i_m}^{(m)} + \ldots + [\mathcal{U}_{i_m}^{(m)}, \Gamma]\mathcal{U}_{i_1}^{(1)} \ldots \mathcal{U}_{i_{m-1}}^{(m-1)} + \mathcal{D},$$

где

$$|\mathcal{D}| \le \zeta_V |A|^n + 2\zeta_V \cdot |A|^n + \ldots + (m-1)\zeta_V |A|^n \le$$
$$\le \frac{(m-1)m}{2}\zeta_V |A|^n \le \frac{n(n-1)}{2}\zeta_V |A|^n.$$

Учитывая неравенство (I9)

$$\langle R\cdot \overset{+}{R}\rangle_H \le \left(m\sqrt{\eta_v} + (m-1)\zeta_v\right)A^{2m},$$

а также неравенства (20,2I), находим

$$\langle R\cdot \overset{+}{R}\rangle_H \le \left(m\sqrt{\eta_v} + \frac{(m-1)m}{2}\sqrt{\zeta_v}\right)^2 |A|^{2h} \le \qquad (22)$$

$$\le \left(n\sqrt{\eta_v} + \frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\zeta_v}\right)^2 |A|^{2h}, \quad n>m$$

$$\langle \overset{+}{R} R\rangle_H \le \left(n\sqrt{\eta_v} + \frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\zeta_v}\right)^2 |A|^{2h}, \qquad (23)$$

ибо

$$R^+ = [\Gamma, \overset{+}{A}{}^{(n)}_{j_n}\cdots \overset{+}{A}{}^{(1)}_{j_1}] = -[\overset{+}{A}{}^{(n)}_{j_n}\cdots \overset{+}{A}{}^{(1)}_{j_1}, \Gamma], \qquad |A_j|\le A, \quad |\overset{+}{A}_j|\le A.$$

4. Основываясь на полученных неравенствах, введем еще ряд других полезных неравенств.

Пусть оператор $\mathcal{B}$ является произведением операторов $\mathcal{B}_j$, ограниченных по норме

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{j_1}\cdots\mathcal{B}_{j_m}; \qquad |\mathcal{B}_j|\le A.$$

Каждый оператор действует на переменную η_j в выражении функции

$$\phi(\ldots \eta_j \ldots).$$

Введем выражения x/

$$\bar{\mathcal{B}}(t) = e^{iHt}e^{-iGt}\mathcal{B}\,e^{iGt}\cdot e^{-iHt}$$

$$\bar{\mathcal{B}}(t) = e^{iHt}\cdot e^{-iGt}\mathcal{B}_{j_1}e^{iGt}\cdot e^{-iHt}\cdot e^{iHt}\cdot e^{-iGt}\mathcal{B}_{j_2}e^{iGt}\cdot e^{-iHt}\cdots \rightarrow \qquad (24)$$

$$\rightarrow \cdots e^{iHt}e^{-iGt}\mathcal{B}_{j_m}e^{iGt}\cdot e^{-iHt},$$

то есть

$$\bar{\mathcal{B}}(t) = \bar{\mathcal{B}}_{j_1}(t)\cdots\bar{\mathcal{B}}_{j_m}(t)$$

---

x/ $e^{iHt}\cdot e^{-iGt} \ne e^{iHt-iGt}$

Дифференцируя (24), получим

$$i\frac{d\bar{\mathcal{B}}(t)}{dt} = e^{iHt}e^{-iGt}\mathcal{B}e^{iGt}(H-G)e^{-iHt} - e^{iHt}(H-G)e^{-iGt}\mathcal{B}e^{iGt}e^{-iHt}$$

$$i\frac{d\bar{\mathcal{B}}(t)}{dt} = i\frac{d(\bar{\mathcal{B}}_{j_1}(t)\cdots\bar{\mathcal{B}}_{j_m}(t))}{dt} = e^{iHt}\Delta(t)e^{-iHt},$$

где

$$\Delta(t) = [e^{-iGt}\mathcal{B}e^{iGt}, \Gamma], \qquad H-G=\Gamma.$$

Введем операторы, действующие только на (η_j)

$$\tilde{\mathcal{B}}_j(t) = e^{iG_jt}\mathcal{B}_j e^{-iG_jt}, \quad \text{тогда}$$

$$e^{-iGt}\mathcal{B}e^{iGt} = e^{-iGt}\mathcal{B}_{j_1}e^{iGt}\cdots e^{-iGt}\mathcal{B}_{j_m}e^{iGt} =$$

$$= \tilde{\mathcal{B}}_{j_1}(-t)\cdots\tilde{\mathcal{B}}_{j_m}(-t).$$

Рассмотрим выражение

$$\Delta(t) = [\tilde{\mathcal{B}}_{j_1}(-t)\cdots\tilde{\mathcal{B}}_{j_m}(-t), \Gamma].$$

Несомненно, что каждый из операторов $\tilde{\mathcal{B}}_j$ действует только на переменную η_j и, кроме того, $|\tilde{\mathcal{B}}_j(t)|\le A = const$, стало быть, можно воспользоваться неравенствами (22,23), поэтому

$$\langle \Delta(t)\cdot\overset{+}{\Delta}(t)\rangle_H \le \left(n\sqrt{\eta_v} + \frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\zeta_v}\right)^2 |A|^{2n}$$

$$\langle \overset{+}{\Delta}(t)\Delta(t)\rangle_H \le \left(n\sqrt{\eta_v} + \frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\zeta_v}\right)^2 |A|^{2n}. \qquad (25)$$

Поскольку

$$Sp\left(e^{iHt}\mathfrak{U}e^{-iHt}e^{-\frac{H}{\theta}}\right) = Sp\left(\mathfrak{U}e^{-\frac{H}{\theta}}\right),$$

имеем

$$\left\langle \frac{d\bar{\mathcal{B}}(t)}{dt}\cdot\frac{d\overset{+}{\bar{\mathcal{B}}}(t)}{dt}\right\rangle_H = \langle e^{iHt}\Delta(t)\cdot\overset{+}{\Delta}(t)e^{-iHt}\rangle_H =$$

$$= \langle\Delta(t)\cdot\overset{+}{\Delta}(t)\rangle_H \le \left(n\sqrt{\eta_v} + \frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\zeta_v}\right)^2 |A|^{2n}. \qquad (26)$$

Составим разность

$$\left| \langle \bar{\mathcal{B}}(t')\cdot W\rangle_H - \langle \bar{\mathcal{B}}(t'')\, W\rangle_H \right| = \bar{\Delta}(t',t'').$$

Здесь W – некоторый ограниченный оператор.

Имеем оценку

$$\bar{\Delta}(t',t'') = \left| \int_{t''}^{t'} \langle \frac{d\mathcal{B}(\tau)}{d\tau} W\rangle_H d\tau \right| \le \left| \int_{t''}^{t'} \sqrt{\langle \frac{d\mathcal{B}(\tau)}{d\tau}\cdot \frac{d\overset{+}{\mathcal{B}}(\tau)}{d\tau}\rangle_H \langle \overset{+}{W} W\rangle_H}\, d\tau \right|$$

$$\le |t'-t''|\cdot |W|\cdot \left(n\sqrt{\eta_V} + \frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\Sigma_V}\right) A^n.$$

Следовательно, получаем:

$$\left| \langle \bar{\mathcal{B}}_j(t')\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_m}(t')\cdot W\rangle_H - \langle \bar{\mathcal{B}}_{j_1}(t'')\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_m}(t'')\cdot W\rangle_H \right| \le$$

$$\le |t'-t''|\cdot |W|\cdot \left(m\sqrt{\eta_V} + \frac{m(m-1)}{2}\sqrt{\Sigma_V}\right) |A|^m.$$

Идея введения операторов $\bar{\mathcal{B}}_j$ сводится к тому, что они "асимптотически мало изменяются в среднем".

Возьмем разность

$$\langle \bar{\mathcal{B}}_{j_1}(t_1)\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_n}(t_n)\rangle_H - \langle \bar{\mathcal{B}}_{j_1}(t_n)\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_n}(t_n)\rangle_H =$$

$$= \langle \bar{\mathcal{B}}_{j_1}(t_1)\bar{\mathcal{B}}_{j_2}(t_2)\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_n}(t_n)\rangle_H - \langle \bar{\mathcal{B}}_{j_1}(t_2)\bar{\mathcal{B}}_{j_2}(t_2)\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_n}(t_n)\rangle_H +$$

$$\langle \bar{\mathcal{B}}_{j_1}(t_2)\bar{\mathcal{B}}_{j_2}(t_2)\bar{\mathcal{B}}_{j_3}(t_3)\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_n}(t_n)\rangle_H - \langle \bar{\mathcal{B}}_{j_1}(t_3)\bar{\mathcal{B}}_{j_2}(t_3)\bar{\mathcal{B}}_{j_3}(t_3)\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_n}(t_n)\rangle_H +$$

$$+ \ldots + =$$

$$= \sum_{m=2}^{n} \Big\{ \langle \bar{\mathcal{B}}_{j_1}(t_{m-1})\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_{m-1}}(t_{m-1})\cdot \bar{\mathcal{B}}_{j_m}(t_m)\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_n}(t_n)\rangle_H -$$

$$- \langle \bar{\mathcal{B}}_{j_1}(t_m)\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_{m-1}}(t_m)\, \mathcal{B}_{j_m}(t_m)\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_n}(t_n)\rangle_H \Big\}.$$

Учитывая, что $|\bar{\mathcal{B}}_j(t)| \le |A|$, запишем

$$\left| \langle \bar{\mathcal{B}}_{j_1}(t_1)\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_n}(t_n)\rangle_H - \langle \bar{\mathcal{B}}_{j_1}(t_n)\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_n}(t_n)\rangle_H \right| \le$$

$$\le |A|^n\cdot \sum_{m=2}^{n} |t_m - t_{m-1}| \left(m\sqrt{\eta_V} + \frac{m(m-1)}{2}\sqrt{\Sigma_V}\right).$$

Замечая, что

$$\bar{\mathcal{B}}_{j_1}(t_n)\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_n}(t_n) = e^{iHt_n} \tilde{\mathcal{B}}_{j_1}(-t_n)\cdots \mathcal{B}_{j_n}(-t_n)\, e^{-iHt_n},$$

запишем разность

$$\left| \langle \bar{\mathcal{B}}_{j_1}(t_1)\cdots \bar{\mathcal{B}}_{j_n}(t_n)\rangle_H - \langle e^{-iG_{j_1}t_n} \mathcal{B}_{j_1} e^{iG_{j_1}t_n} \cdots e^{-iG_{j_n}t_n} \mathcal{B}_{j_n} e^{iG_{j_n}t_n}\rangle_H \right| \le$$

$$\le |A|^n \sum_{m=2}^{n} |t_m - t_{m-1}|\cdot \left(m\sqrt{\eta_V} + \frac{m(m-1)}{2}\sqrt{\Sigma_V}\right).$$

Обозначим

$$\mathcal{B}_j = e^{iG_j t_j} A_j\, e^{-iG_j t_j}$$

$$e^{-iG_j t_n} \mathcal{B}_j\, e^{iG_j t_n} = e^{iG_j(t_j - t_n)} A_j\, e^{-iG_j(t_j - t_n)} = \tilde{A}_j(t_j - t_n)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_j(t_j) = e^{iHt_j} e^{-iG_j t_j} \mathcal{B}_j\, e^{iG_j t_j} e^{-iHt_j} = e^{iHt_j} A_j\, e^{-iHt_j} = A_j(t_j).$$

Значит,

$$\left| \langle A_{j_1}(t_1)\cdots A_{j_n}(t_n)\rangle_H - \langle \tilde{A}_{j_1}(t_1 - t_n)\cdots \tilde{A}_{j_n}(0)\rangle_H \right| \le$$

$$\le |A|^n \sum_{m=2}^{n} |t_m - t_{m-1}| \left(m\sqrt{\eta_V} + \frac{m(m-1)}{2}\sqrt{\Sigma_V}\right).$$

До сих пор мы по-настоящему не пользовались тем, что операторы A_j, $\mathcal{B}_j$ действуют на переменные η_j. Мы пользовались тем[x], что операторы Γ_j, G_j при разных (j) коммутируют друг с другом и что операторы $\tilde{A}_j$ коммутируют с операторами G_k при ($j \ne k$), то есть, по существу, свойство, что оператор $\tilde{A}_j$ действует только на η_j, не было использовано.

Все операторы A_j действуют только на переменные j, с другой стороны, их нормы ограничены.

[x] Например,

$$\tilde{A}_j(t) = e^{iGt} A_j\, e^{-iGt} = e^{iG_j t} A_j\, e^{-iG_j t},$$

$$[A_j, G_k]_{(-)} = 0 \quad (j \ne k)$$

Остается доказать для любых операторов $\mathcal{U}_j$

$$\left|\langle \mathcal{U}_{j_1}\cdots\mathcal{U}_{j_n}\rangle_H-\langle \mathcal{U}_{j_1}\cdots\mathcal{U}_{j_n}\rangle_G\right|\le \delta_v |A|^n,$$

где $|\mathcal{U}_j|\le|A|$ (норма ограничена).

Тогда

$$\left|\langle \tilde{A}_{j_1}(t_1-t_n)\cdots\tilde{A}_{j_n}(0)\rangle_H-\langle \tilde{A}_{j_1}(t_1-t_n)\cdots\tilde{A}_{j_n}(0)\rangle_G\right|\le \le \delta_v |A|^n.$$

Так как

$$\langle \tilde{A}_{j_1}(t_1-t_n)\cdots\tilde{A}_{j_n}(0)\rangle_G=\langle \tilde{A}_{j_1}(t_1)\cdots\tilde{A}_{j_n}(t_n)\rangle_G, \text{ то}$$

окончательно

$$\left|\langle A_{j_1}(t_1)\cdots A_{j_n}(t_n)\rangle_H-\langle \tilde{A}_{j_1}(t_1)\cdots\tilde{A}_{j_n}(t_n)\rangle_G\right|\le$$
$$\le \delta_v |A|^n+|A|^n\sum_{m=2}^{n}|t_m-t_{m-1}|\left(m\sqrt{\eta_v}+\frac{m(m-1)}{2}\sqrt{\Sigma_v}\right).$$

В нашем способе доказательства существенно будет использовать то, что операторы $\mathcal{U}_j$ действуют только на переменные n_j. Обратим внимание на то, что G_j представляется в виде свободного произведения собственной компоненты на единичную матрицу

$$(G_j)_{\ldots n_k\ldots,\ldots n'_k\ldots}=G_j(n_j,n'_j)\prod_{(k\neq j)}\delta(n_k-n'_k).$$

Нам удобно будет провести диагонализацию, то есть работать с индексами ν, в которых матрица $G_j(n,n')$ диагональна

$$G_j(n,n')=E_j(\nu)\,\delta(\nu'-\nu). \tag{27}$$

При этом заметим, что поскольку S – число фиксировано, например, $S=2,3,4\ldots$, то диагонализация никаких трудностей не вызывает. Нумерацию ν произвольным образом установим так:

$$\nu=0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ z.$$

Выберем нумерацию так, чтобы возрастание ν сопровождалось возрастанием E_j, то есть, более точно:

$$E_j(\nu')\ge E(\nu),\qquad \text{если } \nu'\ge\nu.$$

Введем специальные операторы $Q_j^{(\rho\sigma)}$, у которых собственная матричная компонента будет единица, поставленная в строке ρ и столбце σ.

$$\left(Q_j^{(\rho\sigma)}\right)_{\ldots\nu_k\ldots,\nu'_k\ldots}=\delta(\nu_j-\rho)\,\delta(\nu'_j-\sigma)\prod_{k\neq j}\delta(\nu_k-\nu'_k).$$

Учитывая, что оператор $\mathcal{U}_j$ действует только на переменную n_j, а диагонализация ведется для каждой переменной (j) отдельно, имеем

$$(\mathcal{U}_j)_{\ldots\nu_k\ldots j\ldots\nu'_k\ldots}=A_j(\nu_j,\nu'_j)\prod_{K\neq j}\delta(\nu_k-\nu'_k),$$

а значит, получаем тривиальное разложение

$$\mathcal{U}_j=\sum_{(\rho,\sigma)}\mathcal{U}_j(\rho,\sigma)\,Q_j^{(\rho,\sigma)} \tag{28}$$
$$(\rho,\sigma=0,1,2\ldots z).$$

Разность можно записать

$$\langle \mathcal{U}_{j_1}\cdots\mathcal{U}_{j_n}\rangle_H-\langle \mathcal{U}_{j_1}\cdots\mathcal{U}_{j_n}\rangle_G= \tag{28'}$$
$$=\sum_{(\rho_1\ldots\rho_n;\sigma_1\ldots\sigma_n)}\mathcal{U}_{j_1}(\rho_1,\sigma_1)\cdots\mathcal{U}_{j_n}(\rho_n,\sigma_n)\left\{\langle Q_{j_1}^{(\rho_1\sigma_1)}\cdots Q_{j_n}^{(\rho_n\sigma_n)}\rangle_H-\langle Q_{j_1}^{(\rho_1\sigma_1)}\cdots Q_{j_n}^{(\rho_n\sigma_n)}\rangle_G\right\}.$$

Поскольку все нормы операторов $\mathcal{U}_j$ ограничены, следует установить оценку "малости" выражения

$$\left\{\langle Q_{j_1}^{(\rho_1\sigma_1)}\cdots Q_{j_n}^{(\rho_n\sigma_n)}\rangle_H-\langle Q_{j_1}^{(\rho_1\sigma_1)}\cdots Q_{j_n}^{(\rho_n\sigma_n)}\rangle_G\right\}.$$

Заметим, что $Q_j^{(\rho\sigma)}$ обладает следующим алгебраическим свойством:

$$Q_j^{(\rho\sigma)}\cdot Q_j^{(\rho'\sigma')}=\delta(\sigma-\rho')\,Q_j^{(\rho\sigma')}, \tag{29}$$

то есть произведение нескольких Q_j с одинаковым (j) равно Q_j с другими, возможно, индексами вверху, или нулю. Поэтому можем всегда считать, что все $(j_1,\ldots j_n)$ различны. В противном случае мы разбили бы их на группы одинаковых индексов, а между группами существовало бы полное неравенство. Внутри каждой группы мы объединили бы произведение в одно Q, и в итоге получили бы Q_j с различными индексами (ρ,σ), причем число их было бы $m \le n$, n – произвольно. Оценка будет всегда возрастать с ростом числа n. Итак, начиная с этого момента, будем предполагать, что все индексы j – различны.

Заметим еще, что, в частности, из (29) вытекает

$$Q_j^{(\rho,\sigma)} \cdot Q_j^{(\sigma,\rho)} = Q^{(\rho,\rho)}; \quad Q_j^{(\rho,\rho)} \cdot Q_j^{(\rho,\sigma)} = Q_j^{(\rho,\sigma)}$$

$$Q_j^{(\rho,\sigma)} \cdot Q_j^{(\rho,\sigma)} = 0, \text{ если } \sigma \ne \rho.$$

Теперь возьмем

$$\bar{Q}_j^{(\rho,\sigma)}(t) = e^{iHt} e^{-i\mathcal{E}_j t} Q_j^{(\rho,\sigma)} e^{i\mathcal{E}_j t} \cdot e^{-iHt} =$$

$$= e^{iHt} \cdot Q_j^{(\rho,\sigma)} \cdot e^{-iHt} \cdot e^{-i\{\mathcal{E}_j(\rho)-\mathcal{E}_j(\sigma)\}t} = Q_j^{(\rho,\sigma)}(t) \cdot e^{-i\{\mathcal{E}_j(\rho)-\mathcal{E}_j(\sigma)\}t}$$

и рассмотрим произведение

$$\bar{Q}_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}(t)\cdots \bar{Q}_{j_m}^{(\rho_m,\sigma_m)}(t) = Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}(t)\cdots Q_{j_m}^{(\rho_m,\sigma_m)}(t)\, e^{-iE(\rho_1\ldots\rho_m;\sigma_1\ldots\sigma_m)t},$$

где

$$E = \mathcal{E}(\rho_1)+\cdots+\mathcal{E}(\rho_m)-\mathcal{E}(\sigma_1)-\cdots-\mathcal{E}(\sigma_m).$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{d\, Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}(t)\cdots Q_{j_m}^{(\rho_m,\sigma_m)}(t)\, e^{-iEt}}{dt} = Z.$$

На основании неравенств

$$\langle ZZ^+\rangle_H \le \left(m\sqrt{\eta_v} + \frac{m(m-1)}{2}\sqrt{\Sigma_v}\right)^2$$

$$\langle Z^+Z\rangle_H \le \left(m\sqrt{\eta_v} + \frac{m(m-1)}{2}\sqrt{\Sigma_v}\right)^2$$

можно доказать, что имеет место неравенство:

$$\left|\langle Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}\cdots Q_{j_m}^{(\rho_m,\sigma_m)}, B\rangle_H - e^{-\frac{E(\rho_1\ldots\rho_m;\sigma_1\ldots\sigma_m)}{\theta}}\langle B Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}\cdots Q_{j_m}^{(\rho_m,\sigma_m)}\rangle_H\right| \le$$

$$\le \frac{2}{\theta}\left(m\sqrt{\eta_v}+\frac{m(m-1)}{2}\sqrt{\Sigma_v}\right) \qquad (30)$$

или

$$\le \left(\frac{2}{3}+\frac{3}{e}\right)\frac{1}{E}\left(m\sqrt{\eta_v}+\frac{m(m-1)}{2}\sqrt{\Sigma_v}\right), \quad E>0,$$

для чего удобнее будет доказать следующую лемму.

Лемма. Пусть уравнение движения для оператора $A(t)e^{-iEt}$ имеет вид

$$\frac{d}{dt}e^{-iEt}A(t) = Z(t) \qquad E>0,$$

где

$$A(t)=e^{iHt}Ae^{-iHt},$$

причем

$$\langle ZZ^+\rangle_H \le \mathcal{E}, \qquad \langle Z^+Z\rangle_H \le \mathcal{E}.$$

Пусть далее B-произвольный оператор с ограниченной нормой, тогда справедливы оценки

$$\left|\langle A\cdot B\rangle_H - e^{-\frac{E}{\theta}}\langle B\cdot A\rangle_H\right| \le \frac{2\sqrt{\mathcal{E}}}{\theta}|B| \qquad (31)$$

$$\left|\langle A\cdot B\rangle_H - e^{-\frac{E}{\theta}}\langle B\cdot A\rangle_H\right| \le \left(\frac{2}{3}+\frac{3}{e}\right)\frac{|B|}{E}\sqrt{\mathcal{E}}. \qquad (32)$$

Используя спектральные представления для двухвременных средних, запишем

$$\langle A(t)B(\tau)\rangle_H = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{AB}(\omega)e^{i\omega(t-\tau)}d\omega$$

$$\langle B(\tau)\cdot A(t)\rangle_H = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{AB}(\omega)e^{\frac{\omega}{\theta}}\cdot e^{i\omega(t-\tau)}d\omega,$$

где

$$A(t)=e^{iHt}Ae^{-iHt}, \qquad B(t)=e^{iHt}Be^{-iHt}.$$

Заметим также $J_{A,A^+}(\omega)\ge 0$,

$$\left|\int h_1(\omega)h_2(\omega)J_{A,B}(\omega)d\omega\right| \le \sqrt{\int |h_1(\omega)|^2 J_{AA^+}(\omega)d\omega}\cdot\sqrt{\int |h_2(\omega)|^2 J_{B^+B}(\omega)d\omega}.$$

(33)

Запишем

$$\langle A(t)e^{-iEt}\cdot \overset{+}{A}(\tau)e^{iE\tau}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{A\overset{+}{A}}(\omega)\, e^{i(\omega-E)(t-\tau)}\, d\omega$$

$$\langle \overset{+}{A}(t)e^{iEt} A(t)e^{-iE\tau}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{A\overset{+}{A}}(\omega)\, e^{\frac{\omega}{\theta}}\cdot e^{i(\omega-E)(t-\tau)}\, d\omega .$$

Дифференцируя эти соотношения по t и τ и полагая далее $t=\tau=0$, найдем неравенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J_{A\overset{+}{A}}(\omega)(\omega-E)^2 d\omega = \langle ZZ^+\rangle \le \mathcal{E},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J_{A,A^+}(\omega)\, e^{\frac{\omega}{\theta}}(\omega-E)^2 d\omega = \langle Z^+Z\rangle \le \mathcal{E}.$$

Рассмотрим выражение $\mathcal{D} = \langle \mathcal{A}\cdot\mathcal{B}\rangle_H - e^{-\frac{E}{\theta}}\langle \mathcal{B}\cdot\mathcal{A}\rangle_H$.

Имеем

$$\mathcal{D} = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\{1-e^{\frac{\omega-E}{\theta}}\}\, d\omega,$$

$$|\mathcal{D}| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |J_{A,B}(\omega)|\cdot|1-e^{\frac{\omega-E}{\theta}}|\, d\omega$$

Если $\omega \ge E$, $|1-e^{\frac{\omega-E}{\theta}}| = e^{\frac{\omega-E}{\theta}}-1 \le \frac{\omega-E}{\theta}e^{\frac{\omega-E}{\theta}} < \frac{\omega-E}{\theta}e^{\frac{\omega}{\theta}}$.

В случае, когда

$\omega \le E$

$$|1-e^{\frac{\omega-E}{\theta}}| = 1-e^{-\frac{(E-\omega)}{\theta}} \le \frac{E-\omega}{\theta},$$

то всегда:

$$|1-e^{\frac{\omega-E}{\theta}}| \le \left|\frac{\omega-E}{\theta}\right|\cdot(1+e^{\frac{\omega}{\theta}}).$$

С помощью неравенства (33) находим оценку:

$$|\mathcal{D}| \le \frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} |J_{AB}(\omega)||\omega-E|(1+e^{\frac{\omega}{\theta}})\, d\omega \le$$

$$\le \frac{1}{\theta}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} J_{AA^+}(\omega)(\omega-E)^2(1+e^{\frac{\omega}{\theta}})\, d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} J_{B^+B}(\omega)(1+e^{\frac{\omega}{\theta}})\, d\omega\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Итак, имеем

$$|\langle \mathcal{A}\cdot\mathcal{B}\rangle_H - \langle \mathcal{B}\cdot\mathcal{A}\rangle_H e^{-\frac{E}{\theta}}| \le \frac{2\sqrt{\mathcal{E}}}{\theta}|\mathcal{B}| .$$

Второй вариант оценки $\mathcal{D}$:

1) если $\omega \ge E$, то

$$|1-e^{\frac{\omega-E}{\theta}}| \le \frac{\omega-E}{\theta}e^{\frac{\omega}{\theta}}\cdot e^{-\frac{E}{\theta}} \le \frac{\omega-E}{\theta}e^{\frac{\omega}{\theta}}\cdot e^{-\frac{E}{3\theta}}$$

2) если $\frac{1}{3}E \le \omega \le E$, то

$$|1-e^{\frac{\omega-E}{\theta}}| \le \frac{E-\omega}{\theta}\cdot e^{\frac{\omega-\frac{E}{3}}{\theta}}$$

3) для $\omega \ge \frac{2}{3}E$,

$$|1-e^{\frac{\omega-E}{\theta}}| \le \frac{|\omega-E|}{\theta}e^{-\frac{E}{3\theta}}\cdot e^{\frac{\omega}{\theta}}$$

для $\omega \le \frac{1}{3}E < E$, $|1-e^{\frac{\omega-E}{\theta}}| \le 1$,

$$|\mathcal{D}| \le \int_{E/3}^{\infty} |J_{A,B}(\omega)||\omega-E|e^{\frac{\omega}{\theta}}d\omega\, \frac{1}{\theta}e^{-\frac{E}{3\theta}} + \int_{-\infty}^{E/3} |J_{A,B}(\omega)|\, d\omega \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} |J_{A,B}(\omega)|\cdot|\omega-E|e^{\frac{\omega}{\theta}}\cdot\frac{e^{-\frac{E}{3\theta}}}{\theta} + \int_{-\infty}^{E/3} |\omega-E|\cdot|J_{A,B}(\omega)|\, d\omega \frac{3}{2E} \le (*)$$

$$\le \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} J_{A,\overset{+}{A}}(\omega)(\omega-E)^2 e^{\frac{\omega}{\theta}}d\omega}\cdot\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} J_{B^+B}(\omega)\, e^{\frac{\omega}{\theta}}\cdot d\omega}\cdot\frac{e^{-\frac{E}{3\theta}}}{\theta} +$$

$$+\frac{3}{2E}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}(\omega-E)^2 J_{A\overset{+}{A}}(\omega)\, d\omega\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} J_{B^+B}(\omega)\, d\omega},$$

(*) Оценка интеграла. В области $\omega \le \frac{E}{3}$, $|\omega-E| = E-\omega \ge \frac{2}{3}E$, и поэтому:

Значит $|\omega-E|\cdot\frac{3}{2E} \ge 1$ $\int_{-\infty}^{E/3}|J(\omega)|\,d\omega \le \int_{-\infty}^{E/3}|\omega-E||J|\frac{3}{2E}\,d\omega \le \int_{-\infty}^{+\infty}|\omega-E||J|\frac{3}{2E}\,d\omega$

Следовательно, $$|\mathcal{D}| \le \left(\frac{e^{-\frac{E}{3\theta}}}{\theta} + \frac{3}{2E}\right)\sqrt{\varepsilon}\cdot|\mathcal{B}|.$$

Поскольку $$x e^{-x} < \frac{1}{e}, \quad x>0,$$

то

$$\frac{E}{3\theta} e^{-\frac{E}{3\theta}} \le \frac{1}{e}, \quad \frac{1}{\theta} e^{-\frac{E}{3\theta}} \le \frac{3}{e}\cdot\frac{1}{E}, \quad E>0.$$

Итак, $$|\mathcal{D}| \le \left(\frac{2}{3}+\frac{3}{e}\right)\frac{|\mathcal{B}|}{E}\sqrt{\varepsilon}$$

$$\left|\langle AB\rangle_H - e^{-\frac{E}{\theta}}\langle B\cdot A\rangle_H\right| \le \left(\frac{2}{3}+\frac{3}{e}\right)\frac{|\mathcal{B}|}{E}\sqrt{\varepsilon}.$$

Перейдем к неравенству (30).

I. Возьмем недиагональный случай, когда множество значений (ρ) не равно множеству значений (σ), то есть всегда найдется хотя бы одно ρ_i, которое не равняется σ_i.

$$(\rho_1,\dots\rho_n) \ne (\sigma_1,\sigma_2,\dots\sigma_n); \quad \rho_i \ne \sigma_i$$

В таком случае покажем справедливость неравенства

$$\left|\langle Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,\sigma_n)}\rangle_H\right| \le \mathcal{K}\cdot\sqrt{\eta_V}, \qquad (34)$$

где $$\mathcal{K}=\frac{2}{\theta}.$$

В случае, если $E_j(\nu')-E_j(\nu)\ge\gamma>0$, то

для $j=j_1,\dots j_n$, $\nu'>\nu$

можно принять

$$\mathcal{K}=\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{e}\right)\frac{1}{\gamma}.$$

Дело в том, что всегда можно считать для какого-то j_k

$$\rho_k>\sigma_k.$$

Действительно, может случиться, что если $\rho_k<\sigma_k$, то этот случай сводится к предыдущему, ибо

$$\left|\langle Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,\sigma_n)}\rangle_H\right| = \left|\langle Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,\sigma_n)}\rangle_H^*\right| =$$

$$= \left|\langle \overset{+}{Q}{}_{j_n}^{(\rho_n,\sigma_n)}\dots \overset{+}{Q}{}_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}\rangle_H\right| = \left|\langle Q_{j_n}^{(\sigma_n,\rho_n)}\dots Q_{j_1}\rangle_H\right|.$$

(операция сопряжения меняет местами σ и ρ). Далее, поскольку все j_k различны, Q_{j_k} - коммутативны, то можно переставлять их без ограничения общности и поставить индекс j_k впереди в качестве j_1. Итак, можем добиться, что

$$\rho_1>\sigma_1.$$

На основании алгебры (алгебраического свойства) (29) запишем тождества

$$Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}\cdot Q_{j_1}^{(\sigma_1,\sigma_1)} = Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}, \quad Q_{j_1}^{(\sigma_1,\sigma_1)}\cdot Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}=0. \qquad (35)$$

Положив

$$\mathcal{B}=Q_{j_1}^{(\sigma_1,\sigma_1)}\cdot Q_{j_2}^{(\rho_2,\sigma_2)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,\sigma_n)},$$

имеем

$$Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}\mathcal{B} = Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,\sigma_n)}.$$

Итак, $$\mathcal{B}Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)} = Q_{j_1}^{(\sigma_1,\sigma_1)}\cdot Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}\cdot Q_{j_2}^{(\rho_2,\sigma_2)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,\sigma_n)}=0.$$

Но, с другой стороны, $\left|\langle Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,\sigma_n)}\rangle_H\right|\le \mathcal{K}\sqrt{\eta_V}$

$$\langle Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,\sigma_n)}\rangle_G = 0$$

(среднее значение есть тождественный нуль, т.е. среднее от недиагональных элементов по диагональной матрице). Таким образом, показано, что

$$\left|\langle Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,\sigma_n)}\rangle_H - \langle Q_{j_1}^{(\rho_1,\sigma_1)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,\sigma_n)}\rangle_G\right|\le \mathcal{K}\cdot\sqrt{\eta_V} \qquad (36)$$

(для недиагональных элементов).

Перейдем к диагональным элементам

$$\rho_1=\sigma_1, \quad \rho_2=\sigma_2, \; \dots \; \rho_n=\sigma_n.$$

Заметим

$$Q_j^{(\rho,0)}\cdot Q_j^{(0,\rho)} = Q_j^{(\rho,\rho)} \; ; \quad Q_j^{(0,\rho)} Q_j^{(\rho,0)} = Q_j^{(0,0)}.$$

Положим

$$\mathcal{B} = Q_{j_1}^{(0,\rho_1)} \dots Q_{j_n}^{(0,\rho_n)},$$

тогда заметим

$$\Big|\langle Q_{j_1}^{(\rho_1,0)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,0)} Q_{j_1}^{(0,\rho_1)}\dots Q_{j_n}^{(0,\rho_n)}\rangle_H -$$
$$- e^{-\frac{\{E(\rho_1\dots\rho_n)-E(0,0,\dots 0)\}}{\theta}} \langle Q_{j_1}^{(0,\rho_1)}\dots Q_{j_n}^{(0,\rho_n)} Q_{j_1}^{(\rho_1,0)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,0)}\rangle_H\Big| \le$$
$$\le \mathcal{K}\cdot\Big\{n\sqrt{\eta_v} + \frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\Sigma_v}\Big\},$$

где $\quad E(\rho_1,\dots\rho_n) = \mathcal{E}(\rho_1)+\dots+\mathcal{E}(\rho_n).$

Положим, для сокращения,

$$X = e^{\frac{E(0,0\dots 0)}{\theta}}\langle Q_{j_1}^{(0,0)}\dots Q_{j_n}^{(0,0)}\rangle_H .$$

Тогда

$$\Big|\langle Q_{j_1}^{(\rho_1,\rho_1)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,\rho_n)}\rangle_H - e^{-\frac{E(\bar\rho_1\dots\bar\rho_n)}{\theta}}\cdot X\Big| \le \mathcal{K}\Big\{n\sqrt{\eta_v}+\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\Sigma_v}\Big\}; \quad (37)$$

и заметим, что

$$\sum_{(\rho)} Q_j^{(\rho,\rho)} = 1 \qquad \text{(единичная матрица)}.$$

Проводя суммирование в неравенстве (37) по $\rho_1,\dots\rho_n$, имеем

$$\Big|1-\sum_{(\rho_1\dots\rho_n)} e^{-\frac{E(\rho_1\dots\rho_n)}{\theta}} X\Big| \le \mathcal{K}S^n\Big\{n\sqrt{\eta_v}+\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\Sigma_v}\Big\} \quad (38)$$

(каждое ρ пробегает S значений, т.е. $\rho_1,\dots\rho_n$ пробегают S^n значений).

Комбинируя неравенства (37) и (38), получим

$$\Big|\langle Q_{j_1}^{(\rho_1,\rho_1)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,\rho_n)}\rangle_H - \frac{e^{-\frac{E(\rho_1\dots\rho_n)}{\theta}}}{\sum\limits_{(\rho_1\dots\rho_n)} e^{-\frac{E(\rho_1\dots\rho_n)}{\theta}}}\Big| \le$$
$$\le \mathcal{K}\Big\{n\sqrt{\eta_v}+\frac{(n-1)n}{2}\sqrt{\Sigma_v}\Big\} + \mathcal{K}S^n\Big\{n\sqrt{\eta_v}+\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\Sigma_v}\Big\}\frac{e^{-\frac{E(\rho_1\dots\rho_n)}{\theta}}}{\sum\limits_{(\rho_1\dots\rho_n)} e^{-\frac{E(\rho_1\dots\rho_n)}{\theta}}},$$

так как

$$\frac{e^{-\frac{\{\mathcal{E}(\rho_1)+\dots+\mathcal{E}(\rho_n)\}}{\theta}}}{\sum\limits_{(\sigma_1,\dots\sigma_n)} e^{-\frac{\{\mathcal{E}(\rho_1)+\dots+\mathcal{E}(\rho_n)\}}{\theta}}} = \langle Q_{j_1}^{(\rho_1,\rho_1)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,\rho_n)}\rangle_G .$$

Значит, для диагональных элементов

$$\Big|\langle Q_{j_1}^{(\rho_1,\rho_1)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,\rho_n)}\rangle_H - \langle Q_{j_1}^{(\rho_1,\rho_1)}\dots Q_{j_n}^{(\rho_n,\rho_n)}\rangle_G\Big| \le \quad (39)$$
$$\le \mathcal{K}\cdot(S^n+1)\Big\{n\sqrt{\eta_v}+\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\Sigma_v}\Big\}.$$

Таким образом, разделяя (28') на диагональные и недиагональные элементы, имеем

$$\big|\langle \mathfrak{A}_{j_1}\dots\mathfrak{A}_{j_n}\rangle_H - \langle \mathfrak{A}_{j_1}\dots\mathfrak{A}_{j_n}\rangle_G\big| \le$$
$$\le \prod_{(k=1,2\dots n)}\Big\{\sum_{(\rho,\sigma)}|\mathfrak{A}_{j_k}(\rho,\sigma)|\Big\}\mathcal{K}\sqrt{\eta_v} + \prod_{(k=1,2\dots n)}\Big\{\sum_{(\rho)}|\mathfrak{A}_{j_k}(\rho,\rho)|\Big\}\mathcal{K}(1+S^n)\Big\{n\sqrt{\eta_v}+\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\Sigma_v}\Big\}.$$

Учитывая, что

$$\sum_{(\rho)}|\mathfrak{A}_j(\rho,\rho)|\le S\cdot|\mathfrak{A}_j| , \quad \sum_{(\rho,\sigma)}|\mathfrak{A}_j(\rho,\sigma)|\le S\sqrt{\sum_{(\rho,\sigma)}|\mathfrak{A}_j(\rho,\sigma)|^2} =$$
$$= S\cdot\sqrt{\sum_{(\rho)}(\mathfrak{A}_j\mathfrak{A}_j^{+})_{\rho\rho}} \le S^{\frac{3}{2}}|\mathfrak{A}_j|,$$

имеем окончательно, где $\mathfrak{A}_j = A_j(t_j-t_1)$; $\quad |\mathfrak{A}_j|\le|A|$

$$\big|\langle A_{j_1}^{(1)}(t_1)\dots A_{j_n}^{(n)}(t_n)\rangle_H - \langle A_{j_1}(t_1)\dots A_{j_n}(t_n)\rangle_G\big| \le$$
$$\le |A|^n\sum_{m=2}^{n}|t_m-t_{m-1}|\Big(m\sqrt{\eta_v}+\frac{m(m-1)}{2}\sqrt{\Sigma_v}\Big) + \quad (40)$$
$$+ S^{\frac{3}{2}n}\mathcal{K}\sqrt{\eta_v} + \mathcal{K}S^n(1+S^n)\Big\{n\sqrt{\eta_v}+\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\Sigma_v}\Big\}.$$

Литература:

I. Kac, M., Phys.Fluids 2 (1959) 8.
2. Kac, M., Uhlenbeck, G.E. and Hemmer, P.C.,J.Math.Phys. 4 (1963) 216, 229, 5 (1964).
3. Van Kampen, N.G., Phys.Rev. 135A (1964) 362; Physica 48 (1970), 313.
4. Lebowitz, J.L and Perose, O.,J.Math.Phys. 7 (1966) 98.
5. Lieb, E.H., J.Math.Phys. 7 (1966) 1016.
6. Siegert, A.J.F. and Verretti, D.J.J. Math.Phys. 9, (1968) 2173.
7. Н.Н.Боголюбов, В.В.Толмачев, Д.В.Ширков. "Новый метод в теории сверхпроводимости. Из-во АН СССР, Москва, I958.
8. Н.Н.Боголюбов, Д.Н.Зубарев, Ю.А.Церковников. ЖЭТФ т.39, вып.I (7), I960.
9. Н.Н.Боголюбов (мл.). ТМФ, т.4, №3, I970.
I0. Н.Н.Боголюбов. Избранные труды, т.3. Изд. "Наукова Думка". Киев, I97I, стр. 5-55.
II. Husimi, K. 1953. Proc.Int.Conf. of theoretical Physics, Tikyo, H.Yukawa ed., p.531.
I2. Temperley, H.N.V., Proc.Phys.Soc. 67 (1954) 233.
I3. В.Н.Плечко. ТМФ, т.28, №I, I976.
I4. Н.Н.Боголюбов, Д.Н.Зубарев и Ю.А.Церковников. ДАН СССР, I957, II7 №5, стр. 788-79I.
I5. Bardeen, J., Cooper, L.N. and Schrieffer, J.R., Phys.Rev.108 (1957).
I6. Mühlschegel, B., J.Math.Phys. 3 (1962) 522.
I7. N.N.Bogolubov, JR. Physica 32, 933 (1966). "A Method for Studying Model Hamiltonians...".Pergamon Press, Vol.43,1972.
I8. N.N.Bogolubov, JR. Physica 32, 933 (1966).
I9. Н.Н.Боголюбов (мл.). Препринт ИТФ 67-I, Киев, I967.
20. Й.Г.Бранков, А.С.Шумовский. Сообщение ОИЯИ Р4-6899, Дубна, I973.
2I. А.М.Курбатов, В.Н.Плечко. Сообщение ОИЯИ Р4-8403, Дубна, I974.
22. Н.Н.Боголюбов (мл.), А.Г.Шумовская, А.С.Шумовский. ТМФ, 2I, 258, I974.
23. N.N.Bogolubov, JR., V.N.Plechko. Preprint IC-75-68 TRIESTE, 1975, Physica 82 A (1976) pp.163-194.

24. С.В.Тябликов. Метод квантовой теории магнетизма. гл.П, М., Наука, I965.
25. С.С.Лапушкин. Препринт ОИЯИ, Р4-7738, Дубна, I974.
26. N.N.Bogolubov, JR. J.G.Brankov, V.N.Plechko. Model systems with repulsive separable Interaction in Statistical mechanics. Preprint. MIRAMARE TRIESTE IC/76/51 (1976).
27. Tindemans. P.A.J and Capel H.W.Physica 72, 433 (1974).
28. Tindemans P.A.J. and Capel H.W. Physica 75, 407 (1974)
29. А.С.Шумовский. Препринт ИТФ-7I-56Р, Киев, I97I.
30. Й.Г.Бранков, А.С.Шумовский. Препринт ОИЯИ, Р4-7205, Дубна, I973.
3I. Й.Г.Бранков. Препринт ОИЯИ, Р4-7000, Дубна, I973.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 февраля I977 года.