ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Г.В. Ефимов

Д 860

О СКАЛЯРНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ КЕММЕРА

ЖЭТФ, 1962, т42, в6, с 1558-1566.

Дубна 1961 год

1305/6 ug.

Г.В. Ефимов

Д 860

О СКАЛЯРНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ КЕММЕРА

Направлено в ЖЭТФ

Аннотация

К скалярной симметричной модели Кеммера применяется метод Лаппо-Данилевского и принципы перенормировок, развитые для задач теории поля с фиксированным нуклоном. Оказалось, что (1) перенормированная константа связи в модели ограничена сверху, (2) связь между перенормированной и неперенормированной константами взаимодействия конечна в пределе точечного взаимодействия.

В в е д е н и е

Вопрос о происхождении ультрафиолетовых расходимостей является основным в современной квантовой теории поля. Мы не будем здесь перечислять всевозможные попытки добиться ответа на этот вопрос как в самой теории, так и на моделях.

В настоящей работе будет рассмотрена скалярная симметричная модель Кеммера /1/ методом Лаппо-Данилевского /2/. Эта модель интересна, во-первых, тем, что является перенормируемой теорией, т.е. в случае точечного взаимодействия все ультрафиолетовые расходимости могут быть устранены перенормировкой массы и константы связи; во-вторых, тем, что несмотря на отсутствие поляризации вакуума в ней возникает известная "полюсная ситуация" /3,4,5,6/. Поэтому применение метода решения, отличного от общеизвестных, может привести к новым результатам, позволяющим лучше понять структуру теории в пределе точечного взаимодействия.

1. S - матрица

Скалярная симметричная модель Кеммера описывает взаимодействие скалярных мезонов с фиксированным нуклоном, имеющим лишь две изотопические степени свободы (протон и нейтрон). Гамильтониан модели записывается в виде:

$$H = H_0 + H_I$$

$$H_0 = m + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} \int d\vec{x} : [\pi_j^2(\vec{x}) + (\vec{\nabla}\phi_j(\vec{x}))^2 + \mu^2\phi_j^2(\vec{x})] \; ;$$

$$H_I = g\sum_{j=1}^{3} \int d\vec{x}\, \rho(\vec{x})\, \tau_j\, \phi_j(\vec{x}) - \delta m \,,$$

где $\pi_j(\vec{x})$ и $\phi_j(\vec{x})$ - операторы скалярных мезонных полей, $\rho(\vec{x}) = \sum_{k} v(k)\, e^{i\vec{k}\vec{x}}$ - формфактор нуклона, τ_j - матрицы изотопического спина 1/2 (матрицы Паули), δm - контрчлен, ответственный за перенормировку "массы" нуклона.

Запишем гамильтониан H_I в представлении взаимодействия

$$H_I(t) = \sum_{j=1}^{3} g_j\, \tau_j\, \phi_j(t) - \delta m, \qquad (2)$$

где

$$\phi_j(t)=\int d\vec{x}\,\rho(\vec{x})\,\phi_j(\vec{x},t)=\sum_{\vec{k}}\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega}}\,[a_{j\vec{k}}\,\ell^{-i\omega t}+a^{+}_{j\vec{k}}\,\ell^{i\omega t}].$$

Для удобства дальнейшего анализа будем считать, что каждое поле ϕ_j входит в $H_I(t)$ с константой взаимодействия g_j.

Этот гамильтониан относится к классу гамильтонианов взаимодействия, рассмотренных в /7/, так что все выводы непосредственно применимы к рассматриваемой модели.

S – матрица скалярной симметричной модели в методе Лаппо-Данилевского может быть представлена в виде /2/:

$$S=\ell^{i\frac{\delta m}{a}}\,S^a$$

$$S^a=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{[\frac{n_1}{2}]}\sum_{m_2=0}^{[\frac{n_2}{2}]}\frac{i^{m_1}(-ig_1r_1)^{n_1}}{2^{m_1}m_1!(n_1-2m_1)!}\;\frac{i^{m_2}(-ig_2r_2)^{n_2}}{2^{m_2}m_2!(n_2-2m_2)!}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_1\ldots\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_{n_1}\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta_1\ldots\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta_{n_2}\prod_{l_1=1}^{n_1}\prod_{l_2=1}^{n_2}\ell^{-a(|\xi_{l_1}|+|\zeta_{l_2}|)}\,\delta(\xi_{l_1}-\zeta_{l_2})\times$$

$$\times\prod_{\mu_1=1}^{[\frac{n_1}{2}]}\Delta(\xi_{2\mu_1-1}-\xi_{2\mu_1})\prod_{\mu_2=1}^{[\frac{n_2}{2}]}\Delta(\zeta_{2\mu_2-1}-\zeta_{2\mu_2}):\prod_{\nu_1=[\frac{n_1}{2}]+1}^{n_1}\phi_1(\xi_{\nu_1})\prod_{\nu_2=[\frac{n_2}{2}]+1}^{n_2}\phi_2(\zeta_{\nu_2}):\times$$

$$\times:\exp\{-ig_3r_3\int_{-\infty}^{\infty}ds\,\ell^{-a|s|}\,\phi_3(s)\prod_{\ell_1=1}^{n_1}\prod_{\ell_2=1}^{n_2}\delta(\xi_{\ell_1}-s)\,\delta(\zeta_{\ell_2}-s)\}:\times$$

$$\times\exp\{-\frac{ig^2}{2}\iint_{-\infty}^{\infty}ds_1\,ds_2\,\ell^{-a(|s_1|+|s_2|)}\prod_{k_1=1}^{n_1}\prod_{k_2=1}^{n_2}\delta(\xi_{k_1}-s_1)\,\delta(\zeta_{k_2}-s_1)\,\Delta(s_1-s_2)\,\delta(\xi_{k_1}-s_2)\,\delta(\zeta_{k_2}-s_2)\}$$

где

$$\Delta(s_1-s_2)=\sum_{\vec{k}}\frac{v^2(k)}{2i\omega}\,\ell^{-i\omega|s_1-s_2|}.$$

Выражение для S^{α}-матрицы симметрично относительно перестановок индексов 1,2,3. В этом можно убедиться, разложив по g_3 и изменив порядок суммирования.

Физический смысл решения (4) легко понять, если вспомнить, что операторы заряженных мезонов (π^+, π^0, π^-) связаны со скалярными полями (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) соотношениями

$$\phi^- = 1/\sqrt{2}\,(\phi_1 + i\phi_2); \quad \phi^+ = 1/\sqrt{2}\,(\phi_1 - i\phi_2); \quad \phi^\circ = \phi_3,$$

где ϕ^- (ϕ^+) описывает уничтожение отрицательных (положительных) мезонов и рождение положительных (отрицательных), ϕ°– уничтожение и рождение нейтральных мезонов. Значит решение (4) таково, что вклад от нейтральных мезонов π^0 учитывается точно, а разложение ведется по полям заряженных мезонов.

11. Перенормировка модели

Ввиду отсутствия поляризации вакуума в модели перенормировке подлежат лишь "масса" нуклона и константа связи.

Перенормировка массы производится, как показано в /7/, простым делением на фазу $\langle N | S^{\alpha} | N \rangle$. Различие состоит лишь в том, что теперь ряды идут по g_1 и g_2 с коэффицентами, зависящими от g_3. Это различие несущественно, и можно пользоваться при расчетах формулами работы /7/. Поскольку константы g_1 и g_2 входят в S^{α} матрицу (4) явно симметрично, будем считать их равными $g_1 = g_2 = g$.

Перенормироака константы связи проводится следующим образом. Матричный элемент M какого-либо процесса после перенормировки массы (деления на фазу) является функцией энергетических и изотопических переменных ν, констант связи $g_1 = g_2 = g$, g_3 и импульса обрезания L.

$$M = M(\nu,\ g,\ g_3,\ L\ ). \tag{6}$$

В методе Лаппо-Данилевского (при использовании S -матрнцы (4)) матричный элемент M дается рядом

$$M = g^{m}\, g_3^{m_3} \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n} M_n(\nu,\ g_3^2\ ,L\ ), \tag{7}$$

где m и m_3 являются целыми положительными числами, зависящими от рассматриваемого процесса.

В отличие от теории возмущений, где в пределе точечного взаимодействия $(L \to \infty)$ интегралы в M расходятся логарифмически, коэффициенты M_n в ряду (7) при $L \to \infty$ стремятся к нулю. Например, первый член ряда (7) для амплитуды упругого рассеяния π^0 -мезона имеет вид:

$$M_0(\omega_f) = \frac{16\, g_1^2 g_3^2}{i\,\omega_f^2} \exp\left\{-2 g_3^2 \sum_{\vec{k}} \frac{v^2(k)}{\omega^3}\right\} \int_0^\infty dx\,(1-\cos\omega_f x)\,\Delta(x)\exp\left\{2 g_3^2 \sum_{\vec{k}} \frac{v^2(k)}{\omega^3} e^{-i\omega x}\right\}, \quad (8)$$

где ω_f энергия рассеивающегося мезона. При $L \to \infty$ M стремится к нулю как $\exp\left\{-\frac{g^2}{\pi^2}\ln L\right\}$.

Аналогичное положение имеет место в остальных членах ряда и для амплитуд других процессов. Таким образом, задача теории перенормировок в методе Лаппо-Данилевского заключается в устранении нулей, а не бесконечностей.

Перенормируемость теории означает, как отмечалось в /7/, что матричный элемент M должен иметь вид:

$$M = M^{(r)}(\nu, g_r, g_{3r}) = g_r^m\, g_{3r}^{m_3} \sum_{n=0}^\infty g_r^{2n} M_n^{(r)}(\nu, g_{3r}). \quad (9)$$

Необходимо найти $M_n^{(r)}$. Это легко может быть проделано, поскольку известна зависимость перенормированных констант связи g_{jr} от g_j и L:

$$g_{jr} \langle N_1 | \tau_j | N_2 \rangle = g_j \langle N_1 | T(\tau_j(0) S) | N_2 \rangle = g_j \lim_{a \to 0} \frac{\langle N_1 | T(\tau_1(0) S^a) | N_2 \rangle}{\langle N | S^a | N \rangle}, \quad (10)$$

откуда

$$g_r = g_{1r} = g_{2r} = g \sum_{n=0}^\infty g^{2n} C_n(g_3^2, L) \quad (11)$$

$$g_{3r} = g_3 \sum_{n=0}^\infty g^{2n} D_n(g_3^2, L). \quad (12)$$

Подставляя теперь (11) и (12) в (9) и приравнивая к (7), получим равенство:

$$\sum_{n=0}^\infty g^{2n} M_n(\nu, g_3^2, L) = \left(\sum_{k=0}^\infty g^{2k} D_k(g_3^2, L)\right)^{m_3} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n} \Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} g^{2\ell} C_\ell (g_3^2, L) \Big)^{2n+m} M_n^{(r)} \Big(\nu, \, g_3^2 \Big[\sum_{m=0}^{\infty} g^{2m} D_m (g_3^2, L) \Big]^2 \Big). \tag{13}$$

Разлагая правую часть равенства в ряд по g и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях g^2, получим систему зацепляющихся уравнений, связывающих известные функции M_n, C_k, D_m с неизвестными $M_n^{(r)}$ и их производными. Эта система уравнений разрешима, и функции $M_n^{(r)}$ могут быть последовательно найдены (см. Приложение).

Итак, удается представить перенормированный матричный элемент для любого процесса в виде частично просуммированного ряда по перенормированной константе связи.

Применим изложенную процедуру перенормировок к амплитуде упругого рассеяния мезона на нуклоне. Мы будем рассматривать амплитуды рассеяния частиц ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, так как в нашем формализме это удобнее, а амплитуды рассеяния заряженных частиц $\pi^+ \, \pi^0 \, \pi^-$ являются просто их линейными комбинациями. Ограничиваясь первыми членами ряда, получим[x)] :

$$f_{1\leftarrow 1}(\omega_t) = f_{2\leftarrow 2}(\omega_t) = 2 g_r^2 \, i \int_0^\infty dx \, \mathrm{Cos}\, \omega_t x \, I(x) + \ldots$$

$$f_{3\leftarrow 3}(\omega_t) = \frac{16 g_r^4}{\omega_t^2} \int_0^\infty dx \, (1 - \mathrm{Cos}\, \omega_t x) \, \Delta(x) \, I(x) + \ldots$$

$$f_{1\leftarrow 3}(\omega_t) = -r_1 r_3 \Big\{ \frac{2 g_r^2}{\omega_t} - \frac{8 g_r^4}{i \, \omega_t} \iint_0^\infty dx_1 \, dx_2 \big[(\mathrm{Cos}\, \omega_t x_2 -$$

$$- \mathrm{Cos}\, \omega_t (x_1 + x_2)) \, \Delta(x_1) \, I(x_1) \, (I(x_2) \, I^{-1}(x_1 + x_2) - 1) -$$

$$- (1 - \mathrm{Cos}\, \omega_t x_1) \, \Delta(x_1 + x_2) \, I(x_1 + x_2) \big] + \ldots \Big\},$$

---

x) Амплитуды $f(\omega)$ связаны с сечением соотношением $\sigma(\omega) = 1/4\pi \, |f(\omega)|^2$.

где

$$I(x) = \exp\{ 2g_r^2 \sum_{k} \frac{1}{\omega_k^3} e^{-i\omega_k x} \}. \tag{15}$$

Здесь мы положили $g_r^2 = g_{3r}^2$.

Первое, что бросается в глаза, это то, что амплитуда $f_{3\leftarrow 3}$ отличается от амплитуд $f_{1\leftarrow 1}$ и $f_{2\leftarrow 2}$, а $f_{1\leftarrow 3}$ от $f_{1\leftarrow 2}$. Это противоречит изотопической иивариантности модели. Как уже отмечалось, это обстоятельство является следствием внешней несимметрии S^{α} -матрицы (4) по полям ϕ_1 , ϕ_2 и ϕ_3. Конечно, если рассматривать полные ряды для амплитуд $f_{1\leftarrow 1}$ и $f_{3\leftarrow 3}$, то они должны совпадать. Какое приближение лучше, $f_{1\leftarrow 1}$ или $f_{3\leftarrow 3}$, сказать трудно, тем более, что модель имеет чисто методический интерес и поэтому какие-либо физические соображения привлечь не удается. На основе этих приближений можно сделать следующие выводы:

Интегралы сходятся на нижнем пределе лишь при условии

$$\frac{g_r^2}{\pi^2} < 1 . \tag{16}$$

Таким образом, оказывается, что перенормированная константа связи ограничена. Этот результат согласуется с выводом Халфина[8], который показал, что ограничение на g_r может возникнуть, если амплитуда состоит из конечного числа парциальных волн.В рассматриваемой модели существует лишь S –рассеяние.

Еще отметим, что при больших энергиях амплитуды (14) ведут себя одинаково

$$f(\omega_f) \sim \omega_f^{-1+g_r^2/\pi^2} \qquad (\omega_f >> 1) . \tag{17}$$

Амплитуды с ростом энергии убывают медленнее, чем в теории возмущений.

111. Перенормированная константа связи

Рассмотрим подробнее связь между "затравочной" g и "наблюдаемой" g_r константами взаимодействия. Эта связь дается соотношением (10). Поскольку ряд для S^{α} -матрицы (4) внешне несимметричен относительно индексов 1,2 и 3, то в зависимости от выбора r_1 , r_2 или r_3 в (10) получатся внешне различные ряды (11) и (12), хотя их сумма одна и та же. В этом пункте можно говорить об удачном или неудачном выборе частичного суммирования (какое поле ϕ_1, ϕ_2 или ϕ_3 учитывается в выражении для S –матрицы).

Рассмотрим сначала выражение для g_{3r} (12), т.е. изучим эффект от поля, которое учтено точно. Проводя вычисления /2/, получим следующие выражения для коэффициентов D_n [x]:

$$D_0 = 1$$

$$D_1 = -2\, F(0) \int_0^\infty dx\, x\, R(x)$$

$$D_2 = -2\, F^2(0) \iiint_0^\infty dx_1\, dx_2\, dx_3 \Big\{ (x_1+x_3)\, R(x_1)\, R(x_3) \Big[\frac{F(x_1+x_2)\, F(x_2+x_3)}{F(x_2)\, F(x_1+x_2+x_3)} - 1 \Big] +$$

$$+ (x_1+x_3)\, R(x_2)\, R(x_1+x_2+x_3) \Big[\frac{F(x_1+x_2)\, F(x_2+x_3)}{F(x_1)\, F(x_2)} - 1 \Big] -$$

$$- 2x_2\, R(x_2)\, R(x_1+x_2+x_3) - (x_1+2x_2+x_3)\, R(x_1+x_2)\, R(x_2+x_3) \Big\},$$

где

$$F(x) = \exp \Big\{ -2g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{v^2(k)}{\omega^3}\, \ell^{-\omega x} \Big\}$$

$$R(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{v^2(k)}{\omega}\, \ell^{-\omega x}\, F^{-1}(x).$$

Формулы (17) замечательны тем, что существует конечный предел при снятии обрезания L, т.е. при $L \to \infty$

$$\lim_{L \to \infty} D_1 = -\frac{1}{\pi^2 (1+\lambda)\lambda}$$

$$\lim_{L \to \infty} D = -\frac{1}{2\pi^4} \iiint_0^\infty dx_1\, dx_2\, dx_3 \Big\{ \frac{(x_1+x_3)}{(1+x_1)^{2+\lambda} (1+x_3)^{2+\lambda}} \Big(\Big[\frac{(1+x_1+x_2)(1+x_2+x_3)}{(1+x_1+x_2+x_3)(1+x_3)} \Big]^{\lambda} - 1 \Big),$$

---

[x] В работе /2/ при получении формул (4.10) и (4.11) при подсчете членов ряда при g^4 и g_1^6 была допущена ошибка, приведшая к неправильному выводу о том, что ограничение на g^2 при переходе к пределу $L \to \infty$ растет от одного члена ряда к другому.

$$+\frac{(x_1+x_3)}{(1+x_1+x_2+x_3)^{2+\lambda}(1+x_3)^{2+\lambda}}\left[\left(\frac{(1+x_1+x_2)(1+x_2+x_3)}{(1+x_1)(1+x_3)}\right)^{\lambda}-1\right]\Big\}+$$

$$+\frac{1}{2\pi^4}\;\frac{3+10\lambda+9\lambda^2}{\lambda^2(1+\lambda)^3\,(1+2\lambda)},$$

где

$$\lambda = g^2/\pi^2 .$$

Таким образом, оказывается, что интегралы для D_n как функции g_3^2 имеют полюс в точке $g_3 = 0$ и, следовательно, не могут быть разложены в ряд Тейлор. Подобное положение проверено вплоть до D_4.

Изучение более старших членов провести не удалось ввиду больших технических трудностей, хотя существует алгоритм для получения каждого члена D_n. По всей видимости, аналогичная ситуация имеет место в каждом члене ряда.

Предел g_r/g при $g \to 0$ не равен единице

$$\lim_{g\to 0} g_r/g = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \ldots \neq 1 \tag{19}$$

в противоположность результату теории возмущений. Поэтому логарифмические расходимости могут быть объяснены следующим образом. Пусть имеется некоторая функция $f(x)$, аналитическая в $x=0$ и равная $f(0)=a\neq 1$. Тогда, если искать для этой функции разложение в ряд Тейлора в виде:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

то для коэффициентов a_n будут, естественно, получаться бессмысленные выражения.

Вероятно, подобное положение имеет место в рассматриваемой модели. Отношение $g_r/g = Z_2 Z_1^{-1}$, имея конечный предел при $L\to\infty$, в точке $g=0$ имеет конечное значение, не равное единице.

Этот результат согласуется с выводом, полученным на основании предположения о полноте системы собственных функций гамильтониана (1). Повторяя выкладки работы [9], получим для рассматриваемой модели

$$g^2 = g_r^2 + 1/\pi \int_{\mu}^{\infty} d\omega_k \quad k \;\sigma_{N\pi}(\omega_k), \tag{20}$$

где $\sigma_{N\pi}(\omega)$ – полное поперечное сечение реакции $(N\pi)$. Отсюда следует, что всегда

$$g_r / g < 1.$$

Поскольку найти n -ый член ряда (12) не удалось, вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Следует еще отметить, что с ростом g члены L_n уменьшаются, и если предположить сходимость ряда, то

$$\lim_{g^2 \to \infty} g_r / g = 1 . \tag{21}$$

Проводя аналогию ряда (12) с рядом теории возмущений, необходимо отметить, что частичное суммирование в (4) распределяет все диаграммы Фейнмана по членам ряда Лаппо-Данилевского, причем один и тот же график может войти в разные члены ряда (12) с коэффициентом $0 < a < 1$. При этом в каждом члене ряда можно перейти к пределу при $L \to \infty$. В методе ренормализационной группы [6,10] суммируется лишь часть графиков, так называемые "главные" диаграммы, хотя остающаяся часть расходится не менее сильно.

Теперь рассмотрим выражение для $g_r = g_{1r} = g_{2r}$. После деления на фазу в (11) получим:

$$C_0(g_3^2) = F(0)$$

$$C_1(g_3^2) = F^3(0) \iint_0^\infty dx_1\, dx_2 \left\{ R(x_1)\left[\frac{F(x_1+x_2)}{F(x_2)} - 1\right] + R(x_1+x_2)\left[\frac{F(x_1+x_2)}{F(x_1)\,F(x_2)} - 1\right]\right\} \tag{22}$$

При достаточно больших L отношение g_r / g может быть записано в виде:

$$g_r / g = 1/L^{\lambda/2} \left[1 - \frac{\lambda}{2(1+\lambda)} \ln L + \ldots \right] . \tag{23}$$

При переходе к пределу при $L \to \infty$ в каждом члене этого выражения получается нуль, однако, этот переход, по всей видимости, не является корректным. Действительно, рассмотрим пример

$$1 = \frac{L^\lambda}{L^\lambda} = \frac{1}{L^\lambda} + \lambda \frac{\ln L}{L^\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\ln^2 L}{L^\lambda} \underset{L\to\infty}{\to} 0 . \tag{24}$$

В (23) также нельзя переходить к пределу в каждом члене из-за наличия неопределенностей вида $\frac{\ln^n I}{L^\lambda}$. При переходе в (17) подобных неопределенностей не было.

Таким образом, нельзя ничего сказать о поведении ряда (23) в пределе точечного взаимодействия, как ничего нельзя сказать на основании знания нескольких приближений в теории возмущений.

Заключение

Применение метода Лаппо-Данилевского к скалярной симметричной модели Кеммера позволило получить два важных результата.

1. Перенормированная константа связи ограничена условием (16). Заметим, что при исследовании уравнений Лоу для этой модели /11/ получающееся ограничение на константу связи $g_r^2/2\pi < 1$ близко к нашему.

2. Связь между g_r и g конечна в пределе точечного взаимодействия. Существование логарифмических расходимостей в теории возмущений связано с разложением по константе связи g, причем функция $g_r = g_r(g)$ не имеет особой точки при $g = 0$, а $\lim_{g \to 0} g_r / g \neq 1$, как принимается в теории возмущений.

Следует отметить, что эти выводы основаны на предположении, что исследуемые ряды сходятся. Вопрос же сходимости рядов остается открытым. Можно лишь сказать, что изучение более высоких приближений в ряду Лаппо-Данилевского не представляет никаких принципиальных трудностей, а связано лишь с громоздкими вычислениями.

В заключение приношу глубокую благодарность профессору Д.И.Блохинцеву и академику Н.Н. Боголюбову за постоянное внимание и ценные указания и Б.М. Барбашову за полезные обсуждения.

Приложение

Из равенства (13) получаются следующие рекурентные соотношения

$$M_n^{(r)}(g_3^2) = C_0^{-(2n+m)}(g_3^2)\{ M_n(g_3^2) -$$

$$- \sum_{\substack{p+k+\ell+s=n \\ p<n-1}} T_{ps}(g_3^2) \sum_{k_1+\ldots+k_{m_3}=k} D_{k_1}\ldots D_{k_{m_3}} \sum_{\ell_1+\ldots+\ell_{2p+m}=\ell} C_{\ell_1}\ldots C_{\ell_{2p+m}},$$

где

$$T_{ps}(g_3^2) = \sum_{j_1+2j_2+\ldots+sj_s=s} g_3^{2(j_1+\ldots+j_s)} \frac{d^{(j_1+\ldots+j_s)}}{d\, g_3^{2(j_1+\ldots+j_s)}} M_p^{(r)}(g_3^2) \quad \times$$

$$\times \frac{(\bar{D}_1(g_3^2))^{j_1}}{j_1!} \frac{(\bar{D}_2(g_3^2))}{j_2!} \ldots\ldots \frac{(\bar{D}_s(g_3^2))^{j_s}}{j_s!}$$

$$\bar{D}_k(g_3^2) = \sum_{k_1+k_2=k} D_{k_1}(g_3^2)\, D_{k_2}(g_3^2), \qquad D_0 = 1.$$

Суммирование проводится по всем целым неотрицательным корням уравнений, выписанных под знаками сумм.

Литература

1. Kemmer,N. Proc.Camb.Phil.Soc. 34, 354 (1938).
2. Б.М.Барбашов, Г.В.Ефимов. ЖЭТФ, 39, 450 (1960), препринт ОИЯИ Д-498(1960).
3. Lee,T.D. Phys.Rev. 95, 1329 (1954).
4. Л.Д.Ландау, И.Я.Померанчук. ДАН СССР, 102, 489 (1955).
5. И.Я.Померанчук. ДАН СССР, 103, 1005 (1955).
6. А.Н.Тавхелидзе. Диссертация МИ им.В.А.Стеклова АН СССР, (1956).
7. Г.В.Ефимов. ЖЭТФ (будет опубликовано).
8. Л.А.Халфин. ЖЭТФ, 41, 1233 (1961).
9. Chew,G.F., Low,F.E. Phys.Rev. 101, 1570 (1956).
10. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат (1957).
11. Б.М.Барбашов. ЖЭТФ (будет опубликовано).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 декабря 1961 года.