ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

А.В. Ефремов, Д.В. Ширков

Д-857

ВЫСШИЕ ПАРЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

Дубна 1961

А.В. Ефремов, Д.В. Ширков x)

Д-857

ВЫСШИЕ ПАРЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

x) Институт математики Сибирского отделения АН СССР.

А н н о т а ц и я

Проведен учет высших парциальных волн в уравнениях для низкоэнергетического пион-пионного рассеяния, полученных дифференциальным методом. Показано, что их влияние мало.

Рассмотрена процедура учета бесконечного числа парциальных волн в низкоэнергетических уравнениях и установлена ее бессмысленность.

§ 1. Формулировка дифференциального метода на примере рассеяния нейтральных мезонов

В недавних работах Заркера[1] и Лавлеса[2] были подняты вопросы соответствия между уравнениями для парциальных волн пион-пионного рассеяния при низких энергиях, полученных дифференциальным методом[3,4,5] и интегральным методом[6] /работа[6] в дальнейшем цитируется как ЧМ/. Ввиду нечеткости ряда формулировок в работах[1,2] ниже мы детально исследуем вопросы учета высших парциальных волн в дифференциальном методе, а также его соответствие с методом ЧМ.

В работе[3] уравнения для пион-пионного рассеяния были получены из комбинации дисперсионных соотношений вперед и назад, а в работе[4] была учтена также информация от первых производных по передачи импульса. Поэтому в[3] учитывались действительные части лишь s- и p- волн, тогда как в[4] был также произведен учет f- и d -волн.

Мы исследуем вопрос учета все большего числа парциальных волн, включая предельный случай бесконечного числа этих волн.

Выпишем сперва формулы, выражающие низшие парциальные амплитуды f_i через значения функции $f(c)$ и ее производных в точках $c = \pm 1$. Эти формулы имеют различный вид, в зависимости от числа гармоник, которыми аппроксимируется функция $f(c)$.

В низшем приближении, ограничиваясь s- и p -волнами

$$f(c) \cong f_0 + 3f_1\, c\,,$$

имеем

$$f_0 = \frac{f(1) + f(-1)}{2} \qquad /1.1/$$

$$f_1 = \frac{f(1) - f(-1)}{6}\,.$$

В следующем приближении, учитывающем также d- и f - волны

$$f(c) = f_0 + 3cf_1 + 5/2(3c^2-1)\, f_2 + 7/2\,(5c^3 - 3c)\; f_3,$$

получаем

$$f_0 = \frac{f(1) + f(-1)}{2} - \frac{f'(1) - f'(-1)}{6}$$

$$f_1 = \frac{f(1) - f(-1)}{5} - \frac{f'(1) + f'(-1)}{30}$$

$$f_2 = \frac{f'(1) - f'(-1)}{30}$$

$$f_3 = \frac{f(1) - f(-1)}{70} + \frac{f'(1) + f'(-1)}{70}. \qquad /1.2/$$

Наконец, предельному случаю

$$f(c) = \sum_{n=0}^{\infty} P(c)\, f_n$$

соответствуют формулы

$$f_0 = \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1) + (-)^n f^{(n)}(+1)}{(n+1)!}$$

$$f_1 = -\tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1) - (-)^n f^{(n)}(1)}{(n+2)!} \qquad /1.3/$$

$$f_2 = -\tfrac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+5)}{(n+3)!} \{ f^{(n)}(-1) + (-)^n f^{(n)}(1) \},$$

выражающие парциальные волны функции $f(c)$ через бесконечный набор ее производных в точках $c = \pm 1$.

Выражения /1.3/ могут быть получены чисто формально, путем последовательного интегрирования по частям интегралов, определяющих парциальные амплитуды. Сходимость рядов вида /1.3/ определяется особенностями функции $f(c)$ в комплексной плоскости переменной c. Несколько ниже /§3/ мы рассмотрим эту проблему для случая пион-пионного рассеяния.

Отметим здесь, что переход от /1.1/ к /1.2/, от /1.2/ к /1.3/ не сводится к добавлению членов с высшими производными, но также и к изменению коэфициентов в уже имеющихся членах. Формулы типа /1.1/-/1.3/ мы будем применять к амплитуде рассеяния, заданной спектральным представление по импульсной или энергетической переменной при фиксированном значении косинуса угла рассеяния c. Для амплитуды рассеяния нейтральных мезонов это представление имеет вид

$$A(\nu,c)=1/\pi\int_0^\infty\frac{Im\,A(\nu',c)}{\nu'-\nu}\,d\nu'+1/\pi\int_0^\infty d\nu'\frac{Im\,A(\nu',c_+)}{1+\nu'+\nu\frac{1+c}{2}}+1/\pi\int_0^\infty\frac{Im\,A(\nu',c_-)\,d\nu'}{1+\nu'+\nu\frac{1-c}{2}} \qquad /1.4/$$

Здесь первый интеграл описывает физический разрез от первой реакции, квадрат энергии которой равен $S=4(\nu+1)$, второй интеграл-кроссинг реакцию с квадратом энергии $u=-2\nu(1+c)$, третий интеграл-кроссинг реакцию с квадратом энергии $t=-2\nu(1-c)$, причем

$$c_+=\frac{2+3\nu'-c(2+\nu')}{\nu'(1+c)}\,; \qquad c_-=-\frac{2+3\nu'+c(2+\nu')}{\nu'(1-c)}. \qquad /1.5/$$

Из /1.5/ видно, что

$$c_\pm(\nu',c=\pm1)=\pm1\,, \quad c_\mp(\nu',c=\pm1)=\infty\,.$$

Поэтому в предельных случаях $c=\pm1$ числитель одного из кроссинг-интегралов соответствует рассеянию вперед /или назад/, тогда как второй содержит нефизический бесконечный косинус.

В схеме Чу-Мандельстама, так же как и в представлении Чини-Фубини /8/, функции $Im\,A(\nu',c_\pm)$ аппроксимируются s -волнами во всем интервале $-1\le c\le 1$, т.е. вплоть до бесконечно больших значений косинусов $c_\pm$! Совершая указанную аппроксимацию, получаем после интегрирования по c уравнение ЧМ для нейтральной модели /ср /8,8/ /

$$A_0(\nu)=1/\pi\int_0^\infty\frac{d\nu'}{\nu'-\nu}\,Im\,A_0(\nu')-\frac{2}{\pi\nu}\int_0^\infty d\nu'\,Im\,A_0(\nu')\,\ln\left(1-\frac{\nu}{1+\nu+\nu'}\right) \qquad /1.6/$$

Отсюда еще раз ясно, что в методах ЧМ и Чини-Фубини используется аналитическое продолжение с помощью первого члена разложения по полиномам Лежандра в область, где этот ряд не существует.

Получим теперь уравнение для s -волны с помощью дифференциальной аппроксимации. Подставляя /1.4/ в первую из формул /1.1/ и приближая $Im\, A(\nu,\pm 1)$ s-волной, получим

$$A_0(\nu) = 1/\pi \int_0^\infty d\nu' \left(\frac{1}{\nu'-\nu} + \frac{1}{1+\nu'+\nu}\right) Im\, A_0(\nu') + a, \qquad /1.7/$$

где

$$a = 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{1+\nu'} \; \frac{Im\, A\,(\nu', \infty) + Im\, A(\nu', -\infty)}{2}. \qquad /1.8/$$

Покажем, что для существования решения уравнения /1.7/ необходимо положить $a = 0$. Для этого проведем в /1.7/ одно вычитание, приведя его к виду /2.5/ из работы /7/. Повторяя затем рассуждения § 2 из работы /7/, убеждаемся, что $Im\, \dot{A}\,(\infty) = 0$, откуда с учетом условия унитарности

$$Im \quad A_0(\nu) = \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}\, |A_0(\nu)|^2 \qquad \nu > 0 \qquad /1.9/$$

вытекает, что

$$Re\; A_0(\infty) = 0.$$

Иными словами уравнение /1.7/ имеет решение только при

$$a = 0. \qquad /1.10/$$

Заметим теперь, что величина a представляет собой высокоэнергетический вклад. Действительно, например, третий интеграл в /1.4/ соответствует участку прямой $c = 1 - \epsilon = const$ от $-\infty$ до точки $a(\epsilon)$ с координатами $t = 4$, $\nu = -2/\epsilon$, которая при $\epsilon \to 0$ уходит на бесконечность. Поэтому первое слагаемое в правой части /1.8/, являющееся пределом этого интеграла при $c = 1$, представляет собой высокоэнергетический вклад. То же самое относится ко второму интегралу в /1.4/ при $c = -1$ второму слагаемому в /1.8/. Таким образом a представляет собой вклад от высокоэнергетической области, лежащей выше порога любого состояния с конечной массой. Ясно поэтому, что поскольку мы отбросили все промежуточные состояния, начиная с четырехмезонного, то мы вполне можем пренебречь величиной a.

Перейдем теперь ко второму приближению, описываемому формулами /1.2/.

Аппроксимируя $Im\ A(\nu,\pm 1)$ s–волнами и пренебрегая высокоэнергетическими вкладами вида $a'+\beta\nu$, получаем из первого уравнения /1.2/

$$A_0(\nu)=1/\pi\int_0^\infty d\nu' Im\ A_0(\nu')\left[\frac{1}{\nu'-\nu}+\frac{1}{\nu'+\nu+1}\left(1+\frac{\nu}{6(\nu'+\nu+1)}\right)\right]. \quad /1.11/$$

Любопытно исследовать асимптотику решения уравнения /1.11/. С этой целью представим второй интеграл из /1.11/ в виде

$$\left(1-\frac{\nu}{6}\frac{\partial}{\partial\nu}\right)1/\pi\int_0^\infty\frac{Im\ A_0(\nu')}{1+\nu'+\nu}d\nu'.$$

Отсюда ясно, что асимптотика /1.11/ совпадает с асимптотикой уравнения /1.7/ при $a_j=0$

$$Re\ A_0(\nu)\to\frac{\pi b}{\ln\nu};\qquad b=½, \quad /1.12/$$

поскольку

$$\nu\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{\ln\nu}=-\frac{1}{\ln^2\nu}.$$

Отсюда следует, что учет d –волны в реальной части амплитуды рассеяния мало меняет логарифмическую ветвь решения нейтральной модели /1.7/.

Обратимся к предельному случаю /1.3/ . Получаем для s –волн, откинув степенной ряд по ν с высокоэнергетическими коэфициентами

$$A_0(\nu)=1/\pi\int_0^\infty\frac{d\nu'}{\nu'-\nu}Im\ A_0(\nu')+$$

$$+1/\pi\int_0^\infty d\nu' Im\ A_0(\nu')\frac{2}{\nu'}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\left(\frac{\nu}{2(1+\nu+\nu')}\right)^n.$$

Сумму в кроссинг интеграле можно свернуть, что дает

$$A_0(\nu)=1/\pi\int_0^\infty\frac{d\nu'}{\nu'-\nu}Im\ A_0(\nu')-\frac{2}{\pi\nu}\int_0^\infty d\nu' Im\ A_0(\nu')\ln\left(1-\frac{\nu}{2(\nu'+\nu+1)}\right) \quad /1.13/$$

Нетрудно убедиться, что уравнение /1.13/ допускает логарифмическую асимптотику /1.12/.

Важно отметить, что уравнение /1.13/ существенно отличается от уравнения ЧМ /1.6/, которое обладает логарифмической асимптотикой вида /1.12/ при $b=1/3$.

Из вышесказанного следует опровержение утверждения Заркера [1]. Его заключение о том, что уравнения типа /1.7/, /1.11/ могут быть получены из /1.6/ разложением логарифма, основано на недостаточно аккуратном изучении численных коэфициентов соответствующих рядов.

Рассмотрим еще влияние высших волн в мнимой части амплитуды рассеяния на s -волну. С этой целью повторим рассуждения, учитывая с помощью формул /1.2/ s- и d -волны как в действительной, так и в мнимой частях амплитуды рассеяния. Проводя вычисления с откидыванием высокоэнергетических членов и формул дифференцирования

$$\frac{\partial c_+}{\partial c}\Big|_{c=+1} = \frac{\partial c_-}{\partial c}\Big|_{c=-1} = -\frac{1+\nu'}{\nu'}, \qquad /1.14/$$

получаем систему уравнений для s- и d -волн

$$A_0(\nu) = 1/\pi \int_0^\infty \frac{Im\, A_0(\nu')}{\nu'-\nu}\, d\nu' + 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{1+\nu'+\nu}\left(1+\frac{\nu}{6(\nu'+\nu+1)}\right)\left(Im\, A_0(\nu') + 5 Im\, A_2(\nu')\right) +$$

$$+\frac{10}{3\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{1+\nu'+\nu}\,\frac{1+\nu'}{\nu'}\, Im\, A_2(\nu') \qquad /1.15/$$

$$A_2(\nu) = 1/\pi \int_0^\infty \frac{Im\, A_2(\nu')\, d\nu'}{\nu'-\nu} - 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'(1+\nu')}{\nu'(1+\nu'+\nu)}\, Im\, A_2(\nu') -$$

$$-\frac{\nu}{30\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{(1+\nu'+\nu)^2}\left(Im\, A_0(\nu') + 5\, Im\, A_2(\nu')\right). \qquad /1.16/$$

Из /1.18/ следует, что логарифмическая асимптотика функции A_2 определяется кроссинг-интегралом, содержащим A_0, и имеет вид

$$Re\ A_2(\nu) \approx -\frac{1}{\ell n^2 \nu} \quad ; \quad Im\ A_2(\nu) \approx \frac{1}{\ell n^4\ \nu} \qquad /1.17/$$

Вследствие этого член, содержащий $Im\ A_2$ в кроссинг-интеграле /1.17/, при больших ν ведет себя как $\ell n^{-3}\nu$ и не меняет асимптотики /1.12/ s -волны. Отсюда следуют два важных заключения:

а/При учете высших парциальных волн следует согласовывать приближения в действительной и мнимой частях амплитуды рассеяния. Так, приближением, следующим за /1.11/, является приближение, когда наряду с $Re\ A_4$ учитывается также $Im\ A_2$. Ввиду этого уравнение /1.13/ не дает повышения точности по сравнению с /1.11/.

б/ Логарифмическая асимптотика /1.12/ не меняется при учете высших парциальных волн как в действительной, так и в мнимой части амплитуды рассеяния.

Как будет ясно из дальнейшего, заключение а/ является специальным свойством нейтральной модели и обусловлено отсутствием p -волны. Ниже будет показано, что в случае рассеяния заряженных мезонов коэфициент при логарифмической асимптотике меняется, однако, это изменение незначительно.

2. Рассеяние заряженных π-мезонов

Обратимся к реальному случаю рассеяния заряженных π -мезонов. Формулы /1.1/ , /1.2/ будем применять к функциям

$$A^{0} = 3A + B + C, \qquad A^{1} = B - C, \qquad A^{2} = B + C,$$

заданным представлениями

$$\begin{matrix} A \\ [\,B\,] \\ C \end{matrix}(\nu,c) = 1/\pi \int \frac{d\nu'}{\nu'-\nu}\, Im \begin{matrix} A \\ [\,B\,] \\ C \end{matrix}(\nu' c) + 1/\pi \int \frac{d\nu'}{1+\nu'+\nu\,\frac{1+c}{2}}\, Im \begin{matrix} C \\ [\,B\,] \\ A \end{matrix}(\nu', c_+) + \qquad /2.1/$$

$$+ 1/\pi \int \frac{d\nu'}{1+\nu'+\nu\,\frac{1-c}{2}}\, Im \begin{matrix} B \\ [\,A\,] \\ C \end{matrix}(\nu', c_-)\,.$$

Косинусы кроссинг-реакций c_+ и c_- -определены в /1.5/.

Наиболее простые уравнения для s- и p -волн /см.[3,5]/ можно получить из /2.1/ с помощью формул /1.1/. Ограничиваясь в амплитудах A^J только s - и p -волнами

$$A^0(\nu, c) \equiv A_0^0(\nu) \equiv A_0(\nu) \qquad A^1(\nu, c) \equiv 3cA_1^1(\nu) \equiv 3cA_1(\nu) \qquad /2.2/$$

$$A^2(\nu, c) \equiv A_0^2(\nu) \equiv A_2(\nu)$$

с учетом обратных соотношений

$$A(\nu, \pm 1) = \frac{A_0 - A_2}{3} \qquad B(\nu, \pm 1) = \frac{A_2 \pm 3A_1}{2}; \qquad C(\nu, \pm 1) = \frac{A_2 \mp 3A_1}{2}$$

получаем последовательно из /2.2/, откидывая высокоэнергетические константы типа /1.8/,

$$A(\nu, 1) = A(\nu, -1) = 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} \frac{Im\, A_0(\nu') - Im\, A_2(\nu')}{3} +$$

$$+ 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{1 + \nu + \nu'} \frac{Im\, A_2(\nu') - 3Im\, A_1(\nu')}{2} .$$

$$B(\nu, 1) = 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} \frac{Im\, A_2(\nu') + 3Im\, A_1(\nu')}{2} + \qquad /2.3/$$

$$+ 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu' + \nu + 1} \frac{Im\, A_2(\nu') + 3Im\, A_1(\nu')}{2} = C(\nu, -1)$$

$$B(\nu, -1) = C(\nu, -1) = 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} \frac{Im\, A_2(\nu') - 3Im\, A_1(\nu')}{2} +$$

$$= 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{1 + \nu' + \nu} \frac{Im\, A_0(\nu') - Im\, A_2(\nu')}{3} .$$

Переходя к парциальным волнам, получаем уравнения

$$A_i(\nu) = 1/\pi \int_0^\infty \frac{Im\, A_i(\nu')}{\nu' - \nu} d\nu' + 1/\pi \int_0^\infty \frac{f_i(\nu)}{1 + \nu + \nu'} d\nu' \qquad /2.4/$$

где

$$f_i(\nu) = Im\, A_i(\nu) + \ell_i \phi(\nu)$$

$$\phi(\nu) = 2Im\, A_0(\nu) + 9Im\, A_1(\nu) - 5Im\, A_2(\nu) \qquad /2.5/$$

$$\ell_0 = -1/3 \qquad \ell_1 = -1/18 \qquad \ell_2 = 1/6$$

при дополнительном пороговом условии на p –волну

$$A_1(0) = 0, \qquad /2.6/$$

вытекающем из свойства кроссинг–симметрии

$$B\ (s,u,t) = C\,(s,t,u).$$

Уравнения /2.4/ были детально изучены в работе [5]. Там, в частности, было установлено существование логарифмической ветви решений с асимптотическим поведением /см. также [2] /

$$A_i(\nu) \approx \frac{d_i}{\ln \nu}; \quad d_0 = 2{,}13; \quad d_1 = 0{,}118; \quad d_2 = 0{,}640. \qquad /2.7/$$

Перейдем к следующему приближению, учитывающему d– и f –волны в реальной части амплитуд.

Вычисляя с помощью соотношений /1.16/ и

$$\frac{\partial\, Im\ A\,(\nu,c)}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial\, Im\ B\,(\nu,c)}{\partial c} = \frac{\partial\, Im\ C\,(\nu,c)}{\partial c} = 3/2\ Im\ A_1(\nu)$$

производные, находим

$$A'\,(\nu,1) = A'\,(\nu,-1) = I_1(\nu) - \nu/2\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{(1+\nu'+\nu)^2}\ \frac{Im\,A_2(\nu') - 3\,Im\ A_1(\nu')}{2}$$

$$B'\,(\nu,1) = -C'\,(\nu,-1) = -I_1(\nu) - \nu/2\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{(1+\nu+\nu')^2}\ \frac{Im\ A_2(\nu') + 3\,Im\,A_1(\nu')}{2} \qquad /2.8/$$

$$C'\,(\nu,1) = -B'\,(\nu,-1) = \nu/2\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{(1+\nu'+\nu)^2}\ \frac{Im\,A_0 - Im\ A_2(\nu')}{3},$$

где использовано обозначение

$$I_1(\nu) = 3/2\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{1+\nu+\nu'}\ \frac{\nu'+1}{\nu'}\ Im\ A_1(\nu'). \qquad /2.9/$$

Подставляя /2.3/ и /2.8/ в /1.2/, получаем

$$A_0(\nu) = 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu'-\nu} \, Im\, A_0(\nu') + 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{(1+\nu'+\nu)} \left(1 + \frac{\nu}{6(\nu'+\nu+1)}\right) f_0(\nu') - 2/3\, I_1(\nu)$$

/2.10/

$$A_1(\nu) = 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu'-\nu} \, Im\, A_1(\nu') + 6/5\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{(1+\nu'+\nu)} \left(1 + \frac{\nu}{12(1+\nu+\nu')}\right) f_1(\nu') + 1/15\, I_1(\nu)$$

$$A_2(\nu) = 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu'-\nu} \, Im\, A_2(\nu') + 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{1+\nu'+\nu} \left(1 + \frac{\nu}{6(\nu'+\nu+1)}\right) f_2(\nu') + 1/3\, I_1(\nu) .$$

Входящие сюда f_i определены в /2.5/.

Уравнения /2.10/ аналогичны уравнениям /21/-/23/ из работы Хо, Сяня и Целлнера /4/. Однако имеется одно существенное отличие. Дело в том, что уравнения /21/-/23/ содержат члены вида

$$\int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu'} \, Im\, A_1(\nu'), \qquad /2.12/$$

не зависящие от ν и не исчезающие в пределе больших ν. Тем самым уравнения /21/-/23/ не могут удовлетворяться логарифмической асимптотикой и, следовательно, не имеют решений. Это замечание не относится к вычтенным уравнениям /25-27/ работы /4/, которые, таким образом, неэквивалентны невычтенным уравнениям /21/-/23/.

Наличие членов /2.12/ в уравнениях Хо, Сяня и Целлнера связано с тем, что эти авторы исходили не из дисперсионных соотношений при фиксированном косинусе c типа /1.4/, а из дисперсионных соотношений при фиксированном t, которые при $t \neq 0$ содержат нефизические низкоэнергетические вклады от областей, в которых косинус угла рассеяния меняется в пределах $1<|c|<\infty$. Исследуем логарифмическую асимптотику системы /2.10/. Полагая

$$A_i(\nu) \approx \frac{\pi}{c_i \ln \nu},$$

получаем из /2.10/ систему уравнений для коэфициентов $d_i = \pi/c_i$

$$\pi d_l - d_l^2 = \sum_k \sigma_{lk} d_k^2 , \qquad /2.13/$$

где

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} 1/3 & -4 & 5/3 \\ -2/15 & 7/10 & 1/3 \\ 1/3 & 2 & 1/6 \end{pmatrix} . \qquad /2.14/$$

Эта система обладает единственным нетривиальным решением

$$d_0 = 2{,}13 , \quad d_1 = -0{,}137 , \quad d_2 = 0{,}653 . \qquad /2.15/$$

которое было недавно найдено Лавлесом[/2/]. Замечательным свойством этого решения является его близость к /2.7/. Из сравнения цифр видно, что логарифмическая асимптотика оказывается весьма устойчивой по отношению к учету d и f –волн. Представляет интерес рассмотреть влияние на асимптотику реальных частей высших волн. Мы исследуем сразу предельный случай учета всех волн, использовав формулы /1,3/. Для этого достаточно подставить /2.3/ и /2.8/ в /1.3/. В выписанных ниже уравнениях для парциальных волн удержаны лишь члены, дающие вклады в логарифмическую асимптотику

$$A_0(\nu) \approx 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} \, Im\, A_0(\nu') + 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{1+\nu+\nu'} \, f_0(\nu') - 4(2\ln 2 - 1)\, I_1(\nu)$$

$$A_1(\nu) \approx 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} \, Im\, A_1(\nu') + 3/2\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{1+\nu+\nu'} \, f_1(\nu') + (3 - 4\ln 2)\, I_1(\nu) \qquad /2.16/$$

$$A_2(\nu) \approx 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} \, Im\, A_2(\nu') + 1/\pi \int_0^\infty \frac{d\nu'}{1+\nu+\nu'} \, f_2(\nu') + 2(2\ln 2 - 1)\, I_1(\nu) .$$

Этим уравнениям соответствует матрица

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} 1/3 & -3(4\ln 2-1) & 5/3 \\ -1/6 & 21/4(1-\frac{24}{21}\ln 2) & 5/12 \\ 1/3 & 3/4(4\ln 2-1) & 1/6 \end{pmatrix} \qquad /2.17/$$

и, соответственно, асимптотические коэфициенты

$$d_0 = 2{,}15, \quad d_1 = -0{,}167, \quad d_2 = 0{,}667. \qquad /2.18/$$

Сравнивая цифры /2.18/ с /2.15/ и /2.7/, мы убеждается, что логарифмическая асимптотика уравнений для парциальных волн, полученных дифференциальным методом, очень быстро сходится к своему пределу /2.18/. Мы видим также, что уравнения дифференциального метода при все более точном рассмотрении действительной части амплитуды рассеяния отнюдь не переходят в соответствующие уравнения Чу-Мандельстама.

3. Проблема учета высоких парциальных волн

Обсудим теперь значение полученных результатов. При построении низкоэнергетических схем приходится иметь дело с двумя аппроксимациями. Это, с одной стороны, упругое приближение в условии унитарности. С другой стороны, это ограничение низшими парциальными волнами рассеяния. Второе приближение затрагивает как действительную так и мнимую части амплитуды рассеяния, вследствии чего может быть реализовано различными путями. Как было показано в § 1 на примере рассеяния нейтральных мезонов, приближения в $Re\ A$ и $Im\ A$ должны быть взаимно согласованы. Не имеет смысла учитывать $Re\ A_4$, не вводя в рассмотрение $Im\ A_2$.

Примером несбалансированной схемы являются уравнения Чу-Мандельстама[6]. В этих уравнениях в $Re\ A$ не сделано приближений, в то время как $Im\ A$ аппроксимирована s- и p-волнами. Вследствие этого уравнения Чу-Мандельстама не допускают введения в $Im\ A$ даже d- и f-волн, и, по-видимому,[2.10] вообще не имеют решений.

Уместно поставить вопрос об уточнении уравнений типа /2.4/, /2.10/ за счет учета все более высоких парциальных волн в амплитуде рассеяния с помощью формул вида /1.3/. Здесь может возникнуть соблазн произвести учет бесконечного числа парциальных волн или, что эквивалентно, бесконечного числа членов в суммах /1.3/ для реальных и мнимых частей амплитуды рассеяния и получить таким образом "точные" уравнения, не содержащие пренебрежений высшими парциальными волнами.

Такое "уточнение", однако, не имеет смысла по двум различным причинам.

Первая причина состоит в том, что в области не слишком малых энергий, где высшие волны могут оказаться важными, существенную роль играют также вклады от неупругих процессов, которыми мы пренебрегаем.

Допустим, однако, что по каким-то причинам вклады от неупругих процессов малы по абсолютной величине или, что эквивалентно, рассмотрим модель, в которой неупругие процессы запрещены. Даже в этом случае указанное "уточнение" не может быть проведено из-за наличия спектральных функций. Поясним это обстоятельство на примере s -волны. Заметим для этого, что первая из формул /1.3/ может рассматриваться как результат интегрирования по c двух рядов Тейлора для функции $f(c)$ в точках $c=+1$ и $c=-1$. При этом ряд Тэйлора в точке $c=+1$ интегрируется в интервале $[+1, 0]$, а ряд в точке $c=-1$ в интервале $[-1,0]$. Таким образом для существования сумм /1.3/ необходимо, чтобы область сходимости этих двух рядов Тэйлора целиком покрывала физический интервал $[+1, -1]$.

Это требование выполняется при любых $\nu > 0$ для функции, заданной спектральным представлением вида /1.4/ при условии, что числители интегралов не имеют особенностей по c /т.е., что спектральные функции отсутствуют/ и при условии отбрасывания полиномов по ν с высокоэнергетическими коэфициентами типа /1.8/. Совокупность этих двух условий приводит к тому, что, например, второй интеграл в /1.4/ разлагается в ряд Тейлора только около точки $c=+1$, причем особенности по c задаются его знаменателем.

Картина меняется существенным образом при учете спектральных функций. Тогда область аналитичности определяется эллипсом Лемана и, как легко видеть, ряд /1.3/ для действительной части амплитуды перестает существовать в области $\nu > 2$.

Однако и при этих условиях конечная сумма членов из /1,3/ может давать хорошее приближение. Интегрируя по частям N раз, получаем для s – волны выражение

$$f_0 = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dc\, f(c) = \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(-1)+(-)^n f^{(n)}(-1)}{(n+1)!} + \qquad /3.1/$$

$$+ \frac{(-1)^N}{2\,N!} \int_{-1}^{+1} f^{(N)}(c)\, c^N\, dc \,.$$

Предполагая, что в интересующей нас области энергий высшие парциальные волны, начиная с f_m малы, мы можем отбросить в /3.1/ остаточный член при $N = m$ и получить выражения вида /1.1/, /1.2/.

Отсюда следует вывод, что схема, учитывающая небольшое число низших парциальных волн может дать хорошее приближение в области низких энергий. Учет бесконечного числа членов в суммах /1.3/ с одной стороны не дает реального повышения точности из-за наличия неупругих процессов, а с другой стороны, математически невозможен из-за наличия спектральных функций. В этом случае ряды /1.3/ следует рассматривать как асимптотические.

Для иллюстрации этого тезиса рассмотрим еще одну схему последовательного учета парциальных волн. Будем разлагать второй интеграл в /1.4/ около точки $c = +1$, а третий интеграл около точки $c = -1$ и использовать эти разложения на всем интервале $[+1, -1]$, вместо того чтобы откидывать высокоэнергетические константы. При этом мнимые части аппроксимируются s- и p -волнами /имеется в виду рассеяние заряженных мезонов/. При любом конечном числе в суммах для реальных частей полученные уравнения будут иметь решения. Если же мы перейдем к бесконечному числу членов, то невычтенные уравнения не будут существовать, потому что мнимые части кроссинг-интегралов из-за наличия p -волны имеют полюс по c в точке $c = +1$ или

$c=-1$. Одно вычитание приводит в точности к уравнениям Чу-Мандельстама и ко всем связанным с ними математическим осложнениям /10/.

Трудность со спектральными функциями может быть частично преодолена путем учета упругой двухчастичной части спектральных функций. Тем самым мы приходим к программе "полосной аппроксимации" Чу и Фраучи /11/. Однако, в отличие от этих авторов, мы ожидаем, что учет спектральных функций в упругих полосах лишь незначительно изменит низкоэнергетическое приближение. Наоборот, поведение амплитуды рассеяния в области больших энергий и малых передач импульса может оказаться полностью определенным свойствами низкоэнергетического рассеяния. Такая перспектива кажется особенно вероятной в свете недавних результатов работы /12/.

Авторы благодарны Д.И. Блохинцеву, Н.Н. Боголюбову, Ю. Вольфу, В.А. Мещерякову, Я. Фишеру, а также участникам Совещания по применению дисперсионных соотношений /Новосибирск, Институт Математики СО АН СССР, сентябрь 1961 г./ за полезные обсуждения.

Литература

1. A.G.Sarker "Integral Equation for the Low-Energy Pion-Pion Scattering" Birmingham. Preprint, 1961.

2. C.Lovelace "On the Existence of Solutions of the Pion-Pion Dispersion Equations - II", Preprint, 1961.

3. A.V.Efremov, V.A.Mescheryakov, D.V.Shirkov, H.Y.Tzu. Nucl. Phys. 22, 202 (1960); Proc. of the X Annual Rochester Conference 1960. p. 278.

4. Хэ Цзо-сю, Сянь Дин-чан и В. Целлнер. ЖЭТФ, 39, 1668 /1960/.

5. А.В. Ефремов, Чжу Хун-юань, Д.В. Ширков. "Пион-пионное рассеяние при низких энергиях". Препринт ОИЯИ, Д-757.

6. G.Chew, S.Mandelstam. Phys. Rev. 119, 467 (1960).

7. А.В. Ефремов, Чжу Хун-юань, Д.В. Ширков. "Нейтральная модель для пион-пионного рассеяния при низких энергиях". Препринт ОИЯИ Д-697; ЖЭТФ, 41, № 8, 603 /1961/.

8. M.Cini, S.Fubini. Ann. of Phys. 10, 352 (1960).

9. Ю.А. Симонов, К.А. Тер-Мартиросян. ЖЭТФ, 39 , 1442, (1960).

10. C.Lovelace, Nuovo Cim. 21, 305 (1961).

11. G.F.Chew, S.C.Frautschi. Phys.Rev.Lett. 5, 580 (1960),
а также препринт UCRL – 9510.

12. D.Amati, S.Fubini, A.Stanghellini, M.Tonin " A Theoretical Approach to High-Energy Pion Phenomena", 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 декабря 1961 г.