

К-40  
856

2.3



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
Лаборатория теоретической физики

---

Ким Зе Пхен, В.Шеллер

Д - 856

РОЖДЕНИЕ П-МЕЗОНА  
ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ  
*Misc. Phys., 1962, v34, n2, p 491-497*

Ким Зе Пхен, В.Целлер

Д - 856

РОЖДЕНИЕ П-МЕЗОНА  
ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

1319/3 чг.

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

Сечения реакций  $\pi^{\pm} + p \rightarrow 2\pi + N$  определяются в приближении фиксированного нуклона с помощью интегральных уравнений, которые удовлетворяют свойствам кроссинг-симметрии. Оказалось возможным объяснить ход сечения реакции  $\pi^{-} + p \rightarrow \pi^{+} + \pi^{-} + p$  при малых энергиях без явного учета  $\pi\pi$ -взаимодействия. Имеющиеся данные других реакций обсуждаются.

## 1. Введение

Обычно считают, что расхождение в области малых энергий экспериментальных данных по реакции  $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$  с теоретическими расчетами Франклина /1/, Родберга /2/ и Кейзеса /3/ в приближении фиксированного нуклона обусловлено пренебрежением  $\pi\pi$ -взаимодействием в этих уравнениях. Теоретические сечения, приведенные в этих работах, на порядок меньше экспериментальных. В данной работе для расчета сечений реакций  $\pi^\pm + p \rightarrow 2\pi + N$  используются решения статистических интегральных уравнений, полученных с помощью дисперсионного подхода /4,5/. Физические различия этих уравнений с уравнениями Чу-Лоу для процесса рождения  $\pi$ -мезона /1-3/ рассматриваются в разделе II. Раздел III посвящен методу решения интегральных уравнений, а в разделе IV обсуждаются физические результаты. Оказалось, что в области малых энергий возможно объяснить ход сечения реакции  $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$  с помощью этих статистических уравнений.

## II. Интегральные уравнения

На основе теории с фиксированным нуклоном в работах /4,5/ были получены уравнения для определения амплитуд процесса  $\pi + N \rightarrow 2\pi + N$ . Исследования были проведены с помощью метода Боголюбова, что простым образом позволяет показать существование статических дисперсионных соотношений. С помощью этих дисперсионных соотношений были получены уравнения для процесса  $\pi + N \rightarrow 2\pi + N$ , отличающиеся существенным образом от аналогичных уравнений Чу-Лоу /1-3/.

Полученные уравнения имеют в каждом приближении следующие свойства симметрии:

$$\begin{aligned} T(E'', E'; E) &= T(E', E'', E), \\ &= T(-E, E'; -E''), \\ &= T(E'', -E, -E'), \\ &= T(-E, -E', -E''). \end{aligned} \quad (1a - \Gamma)$$

$E, E', E''$  энергия влетающего и вылетающих  $\pi$ -мезонов, где  $E = E' + E''$ . В соотношениях (1a-2) вместе с энергиями нужно переставить соответствующие переменные спина и изospина.

Следует указать на тесную связь свойств симметрии с аналитическими свойствами амплитуды. В работах <sup>/4,5/</sup> показано, что статистические амплитуды процесса  $\pi + N \rightarrow 2\pi + N$  имеют 6 полюсов. Это находится в соответствии со свойствами (1a-2). Однако, вышеуказанные уравнения Чу-Лоу из-за отсутствия некоторых полюсов не отражают этих аналитических свойств амплитуды.

Кроме того, в результате дисперсионного подхода амплитуды наших уравнений находятся на поверхности энергии, в то время как использование формализма Вика-Чу-Лоу приводит к необходимости экстраполировать амплитуды на область вне поверхности энергии.

В дальнейшем мы используем обозначения работы <sup>/5/</sup>, где

$$E' = \nu' E, \quad E'' = \nu'' E; \quad \epsilon' = \nu' \epsilon, \quad \epsilon'' = \nu'' \epsilon. \quad (1)$$

$\nu', \nu''$  - параметры, которые удовлетворяют условиям  $\nu' + \nu'' = 1$ ;  $\nu', \nu'' > 0$ .

Неоднородные члены уравнений для величины  $E, T(E'', E'; E)$  пропорциональны выражениям типа

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ \epsilon t(\epsilon'; \epsilon) \} = \frac{1}{2} (1/\nu' + 1) (j' j - j j'), \quad (3)$$

где

$$j = \sqrt{4\pi} \, t/\mu \, r(\partial \, \partial/q),$$

$t$  - амплитуда упругого  $\pi N$ -рассеяния.

В одномезонном приближении мы получаем следующую систему уравнений

$$T(E'', E'; E) = {}^0 I(E'', E'; E) + {}^1 I(E'', E'; E). \quad (4)$$

Неоднородный член  ${}^0 I$  имеет вид

$$\begin{aligned} {}^0 I(E'', E'; E) = \\ = 1/2E (1/E' - 1/E'') \{ j' j'' j - j'' j' j + j j'' j' - j j' j'' \} + \end{aligned}$$

$$+ 1/2E' (1/E'' + 1/E) \{ j j'' j' - j'' j j' + j' j'' j - j' j j'' \} + \quad (6)$$

$$+ 1/2E'' (1/E' + 1/E) \{ j j' j'' - j' j j'' + j'' j' j - j'' j j' \}.$$

Для одномезонного члена получаем выражение

$$\begin{aligned} -2(2\pi)^3 I(E'', E'; E) = \\ = 1/E \int d^3 k v^2 k^2 \left\{ \frac{D(\epsilon'', \epsilon'; \epsilon) d(\epsilon; \epsilon) + aA}{\epsilon - E} + \frac{d(\epsilon; \epsilon) D(\epsilon'', \epsilon'; \epsilon) - aA}{\epsilon + E} \right\} + \\ + 1/E' \int d^3 k' v'^2 k'^2 \left\{ \frac{d(\epsilon'; \epsilon') D(\epsilon'', \epsilon'; \epsilon) + aA}{\epsilon'' - E'} + \frac{D(\epsilon'', \epsilon'; \epsilon) d(\epsilon'; \epsilon') - aA}{\epsilon' + E'} \right\} + \quad (7) \\ + 1/E'' \int d^3 k'' v''^2 k''^2 \left\{ \frac{d(\epsilon''; \epsilon'') D(\epsilon'', \epsilon'; \epsilon) + aA}{\epsilon'' - E''} + \frac{D(\epsilon'', \epsilon'; \epsilon) d(\epsilon''; \epsilon'') - aA}{\epsilon'' + E''} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь  $T = D + iA$ ,  $t = d + ia$ ;  $k^2 = \epsilon^2 - \mu^2$ ;  $v$  - Фурье-образ фиксированного источника нуклона.

Мы запишем  $T$  в следующем виде:

$$T = -(4\pi)^{3/2} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{3/2} \left\{ \sum_{JL} P_{JL}^{\Pi} \cdot T_{JL}^{\Pi} \right\}. \quad (8)$$

$T_{JL}^{\Pi}$  является матричным элементом перехода со спином и изоспином  $J$  и  $T$ , соответственно.  $L$  и  $\Pi$  обозначают спин и изоспин системы двух вылетающих  $\pi$ -мезонов. Проекционные операторы  $P_{JL}^{\Pi}$  не зависят от энергии и нормированы к единице.

Мы приводим явные выражения для неоднородных членов различных переходов:

$$I_{-3/2, 2}^{3/2, 2} = 30 \frac{f^3}{E' E''} \quad (\alpha); \quad I_{3/2, 1}^{3/2, 2} = I_{3/2, 1}^{3/2, 2} = 0 \quad (\alpha, \beta);$$

$$I_{\frac{1}{2}, 0}^{3/2, 2} = -3\sqrt{10} \frac{f^3}{E' E''} \quad (\beta); \quad I_{\frac{1}{2}, 0}^{3/2, 1} = 9\sqrt{2} \frac{f^3}{E} \left( \frac{1}{E'} - \frac{1}{E''} \right) \quad (\gamma);$$

$$I_{3/2, 1}^{3/2, 1} = -6 \frac{f^3}{E' E''} \quad (\beta); \quad I_{\frac{1}{2}, 0}^{1/2, 1} = -18\sqrt{2} \frac{f^3}{E} \left( \frac{1}{E'} - \frac{1}{E''} \right) \quad (\delta);$$

$$I_{\frac{1}{2}, 1}^{3/2, 1} = 12 \frac{f^3}{E' E''} \quad (\gamma);$$

$$I_{\frac{1}{2}, 1}^{1/2, 1} = -24 \frac{f^3}{E' E''} \quad (\delta);$$

$$I_{\frac{1}{2}, 0}^{1/2, 0} = -24 \frac{f^3}{E' E''} \quad (\epsilon).$$

Амплитуды  $T_{3/2, 2}^{3/2, 2}$ ,  $T_{\frac{1}{2}, 1}^{3/2, 1}$ ,  $T_{\frac{1}{2}, 0}^{3/2, 1}$ ,  $T_{\frac{1}{2}, 0}^{1/2, 1}$  антисимметричны по переменным  $E'$  и  $E''$  и обращаются в нуль при  $E' = E''$  ( $\nu' = \nu'' = 1/2$ ). В дальнейшем мы ограничимся случаем  $\nu' = \nu'' = 1/2$  и рассмотрим связанную систему уравнений 6 амплитуд  $T_{3/2, 2}^{3/2, 2}$ ,  $T_{\frac{1}{2}, 0}^{3/2, 2}$ ,  $T_{3/2, 1}^{3/2, 1}$ ,  $T_{\frac{1}{2}, 1}^{3/2, 1}$ ,  $T_{\frac{1}{2}, 1}^{1/2, 1}$ ,  $T_{\frac{1}{2}, 0}^{1/2, 0}$  с неоднородными членами (а - е).

### III. Численный расчет системы интегральных уравнений

В случае  $\nu' = \nu'' = 1/2$  система интегральных уравнений (5) может быть схематически представлена в виде ( $1 \leq E < +\infty$ ):

$$D(E) = \sqrt{E^2 + 1} E \pi P \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left\{ \frac{\epsilon A(\epsilon)}{\epsilon - E} + \frac{\epsilon B(\epsilon)}{\epsilon + E} \right\}, \quad (9a)$$

$$A(E) = G_1(E) D(E) + G_2(E) A(E),$$

(9b)

$$B(E) = G_3(E) D(E) + G_4(E) A(E).$$

$P$  - символ главного значения;  $D, A, B, \lambda$  - векторы с 6 рядами, а  $G_i$  - матрицы, зависящие от амплитуд упругого  $\pi N$ -рассеяния. Здесь мы использовали решения Зальцмана<sup>/6/</sup> для статических  $\pi N$ -уравнений с параметром обрезания  $P=7$ .

С помощью  $E = 1/t$  система (9) преобразуется к следующему виду ( $0 \leq t \leq 1$ ):

$$u(t) = \lambda t^2 - \frac{t^2}{\pi} P \int_{-1}^{+1} \frac{v(r)}{r^2(r-t)} dr, \quad (10a)$$

$$v(t) = \Gamma_1(t) u(t) + \Gamma_2(t) v(t) + \Gamma_3(-t) u(-t) + \Gamma_4(-t) v(-t), \quad (10b)$$

где

$$u(t) = D(1/t),$$

$$v(t) = A(1/t),$$

$$\Gamma_i(t) = G_i(1/t) = 0 \quad \text{для} \quad t < 0.$$

Чтобы получить решение системы (10) делалось следующее разложение

$$v(t) \approx (1-t^2)^{3/2} e^{-\frac{1}{196t^2} \sum_{n=0}^N a_n t^n} \equiv v^N(t), \quad (11a)$$

$$u(t) \approx \lambda t^2 - \frac{t^2}{\pi} P \int_{-1}^{+1} \frac{v^N(r)}{r^2(r-t)} dr \equiv u^N(t). \quad (11b)$$

Коэффициенты  $a_n^{(1)}$  были получены методом наименьших квадратов

$$\frac{\partial}{\partial a_n^{(1)}} \sum_{j=1}^6 \int_{-1}^{+1} |\epsilon_j(t, a)|^2 dt = 0, \quad (12)$$

где

$$\epsilon_j(t, a) \equiv v^N(t) - \Gamma_1(t) u^N(t) - \Gamma_2(t) v^N(t) - \Gamma_3(-t) u^N(-t) - \Gamma_4(-t) v^N(-t). \quad (13)$$



Уравнения (12) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений для определения  $a_n^{(1)}$ . В Вычислительном Центре ОИЯИ эта система была решена с помощью электронной счетной машины М-20.

Как верхний предел разложения по степеням был выбран  $N = 10$ . Область  $0 \leq t \leq 1$  была разделена на 130 интервалов. Результаты расчетов оправдали использованный нами метод в решении системы интегральных уравнений, так как оказалось, что величины  $\epsilon$  на два порядка величины меньше, чем амплитуды. Однозначность полученных результатов, однако, остается под вопросом.

#### 1У. Обсуждение результатов

Выражения для амплитуд  $T_{JL}^{TP}$ , полученные из интегральных уравнений с помощью изложенного метода расчета, дают сечения для реакций  $\pi^+ + p \rightarrow 2\pi + N$ , представленные в таблице 1. Используя при вычислении этих сечений амплитуды для случая  $\nu' = \nu'' = \frac{1}{2}$ , мы предполагали, что поведение амплитуд лишь слабо зависит от  $\nu', \nu''$ .

Т а б л и ц а 1

Полные сечения.

$E_{кин.лаб}$ (МэВ)	$\pi^+ p \rightarrow$		$\pi^- p \rightarrow$		
	$\pi^+ \pi^+ n$	$\pi^+ \pi^0 p$	$\pi^+ \pi^- n$	$\pi^- \pi^0 p$	$\pi^0 \pi^0 n$
	[mb]	[mb]	[mb]	[mb]	[mb]
246	0,022	0,011	0,023	0,012	0,005
272	0,10	0,05	0,12	0,063	0,023
315	0,36	0,17	0,42	0,23	0,084
367	1,1	0,48	1,2	0,66	0,24
451	3,6	1,4	2,7	1,9	0,78

Экспериментальные данные <sup>/7-12/</sup> для сечения реакции  $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + p$  представлены на рис. 1. Кривая характеризует теоретические значения таблицы 1. Видно, что полученные кроссинг-симметричные амплитуды отражают рост сечения при низких энергиях. Рассмотрим этот факт подробнее.

Интегральные уравнения работ <sup>/1-3/</sup> в используемом приближении не инвариантны относительно свойств симметрии (1). Уравнение Чу-Лоу, использованное Родбергом <sup>/2/</sup>, имеет, например, следующий вид:

$$T_{pq,k} = - \sum_n \left\{ \frac{\langle q | V_p^+ | n \rangle \langle n | V_k | 0 \rangle}{\omega_n - \omega_k} + \frac{\langle q | V_k | n \rangle \langle n | V_p^+ | 0 \rangle}{\omega_n + \omega_p} \right\}. \quad (13)$$

Мы можем увидеть следствия, вытекающие из нарушения законов симметрии (1), например, путем сравнения полюсных вкладов, соответствующих уравнениям, использованным Кейзесом <sup>/3/</sup>, с кроссинг-симметричными вкладами (8). В случае  $\nu' = \nu'' = \frac{1}{2}$  мы получаем следующие выражения:

$$I_{JL}^{\pi\Pi} = \alpha \frac{\tau_{JL}^{\pi\Pi} \delta f^3}{E^2}, \quad (14a)$$

$$\left\{ I_{JL}^{\pi\Pi} \right\}_{\text{non-sym.}} = \beta \frac{\tau_{JL}^{\pi\Pi} \delta f^3}{E^2}. \quad (14b)$$

$\alpha$  и  $\beta$  даны в таблице 2.

Т а б л и ц а 2

Сравнение симметричных ( $\alpha$ ) и несимметричных ( $\beta$ ) полюсных вкладов

$\circ I_{JL}^{\pi\Pi}$	$\alpha$	$\beta$
$\circ I_{3/2, 2}$	20	10
$\circ I_{3/2, 2}$	$-2\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}$
$\circ I_{1/2, 0}$	-4	-6
$\circ I_{3/2, 1}$	8	6
$\circ I_{3/2, 1}$	-16	0
$\circ I_{1/2, 1}$	-16	-8
$\circ I_{1/2, 1}$		
$\circ I_{1/2, 0}$		
$\circ I_{1/2, 0}$		

Очевидно, что полюсные вклады в амплитуды, которые не удовлетворяют свойствам симметрии (1), намного меньше чем вклады, удовлетворяющие этим законам.

Франклин<sup>/1/</sup> и Родберг<sup>/2/</sup> симметризовали полученные выражения для амплитуд следующим образом:

$$f(E', E'') \rightarrow \frac{1}{2} \{ f(E', E'') + f(E'', E') \} .$$

Франклин использовал, например, следующее симметризованное полюсное приближение

$$T_{pq,k} = \frac{1}{2\omega_p} \{ V_p^+ T_k(q^+) - T_k(q) V_p^+ \} + \dots \quad (15)$$

$$+ \frac{1}{2\omega_q} \{ V_q^+ T_k(p) - T_k(q) V_q^+ \} + \frac{1}{\omega_k} \{ V_k T_p(q^+) - T_p(q) V_k \} .$$

Коэффициенты симметризации  $1/2$  двух первых выражений в правой части (15) должны быть опущены. Тогда амплитуда будет иметь все необходимые свойства симметрии. Это означает, что сечения, полученные в работе Франклина, должны быть умножены на множители  $\leq 4$ . Очевидно, в этом случае при низких энергиях они достигнут области экспериментальных данных.

Проведенный анализ показал, что возможно объяснить ход сечения реакции  $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + p$  при низких энергиях с помощью кроссинг-инвариантных амплитуд статической теории без явного учета  $\pi\pi$ -взаимодействия.

Для реакций  $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^0 + p$  (2),  $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + p$  (3),  $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p$  (4) имеется лишь небольшое количество экспериментальных данных. Результаты исследований<sup>/7,13/</sup> указывают на то, что в области  $\approx 300$  Мэв  $\sigma(2)$  намного меньше  $\sigma(1)$ . Настоящий анализ дает  $\sigma(2) \approx \frac{1}{2} \sigma(1)$ . Экспериментальное сечение<sup>/14,15/</sup> для реакций (3) и (4) при 500 Мэв меньше сечения реакции (1). Из таблицы 1 видно, что теоретическое значение больше, чем экспериментальное сечение. Однако, надо подчеркнуть, что область энергий в 500 Мэв находится уже вне области применения статического приближения.

Можно надеяться, что существующие расхождения могут быть объяснены путем введения в систему уравнений  $s$  - волн и  $\pi\pi$  - взаимодействия.

Авторы выражают глубокую благодарность профессорам Д.И.Блохинцеву, Н.Н.Боголюбову и А.А.Логунову за ценные замечания.

### Л и т е р а т у р а

1. J.Franklin. Phys.Rev. 105, 1101 (1957).
2. L.Rodberg. Phys.Rev. 106, 1090 (1957).
3. E.Kazes. Phys.Rev. 107, 1131 (1957).
4. W.Zoellner, O.Chrustalov, W.Serebryakov, A.Lesnow. Z. f. Naturforschung 13a, 499 (1958).
5. В.Целлнер. ЖЭТФ, 36, 1103 (1959).
6. F.Salzman, G.Salzman. Phys. Rev. 108, 1619 (1957).
7. J.Deahl, M.Derick, J.Fetkovich, T.Fields, G.Yodh. Proceedings of the 1960 Conference at Rochester, p. 185.
8. W.Perkins, J.Caries, R.Kenny, V.Perez-Mendez. Phys. Rev. 118, 1364 (1960).
9. J.Batusov, N.Bogacev, W.Sidorov, J.Chiuli. Proceedings of the Kiev-Conference, 1959, p. 154.
10. Ю.Батусов, С.Бунятов, В.Сидоров, В.Ярба. ЖЭТФ, 39, 506 (1960).
11. V.Barish, R.Kurz, P.McManigal, V.Perez-Mendez, J.Solomon. Phys.Rev. Lett. 6, 297 (1961).
12. Ю.Батусов, С.Бунятов, В.Сидоров, В.Ярба. ЖЭТФ, 40, 1529 (1961).
13. Т.Блохинцева, В.Гребинник, В.Жуков, Г.Либманн, Л.Неменов, Г.Селиванов, Нань Жун-фан. Частное сообщение.
14. M.Blevins, M.Block, J.Leitner. Phys.Rev. 112, 1284 (1958).
15. W.Willis. Phys.Rev. 116, 753 (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел  
14 декабря 1961 года.

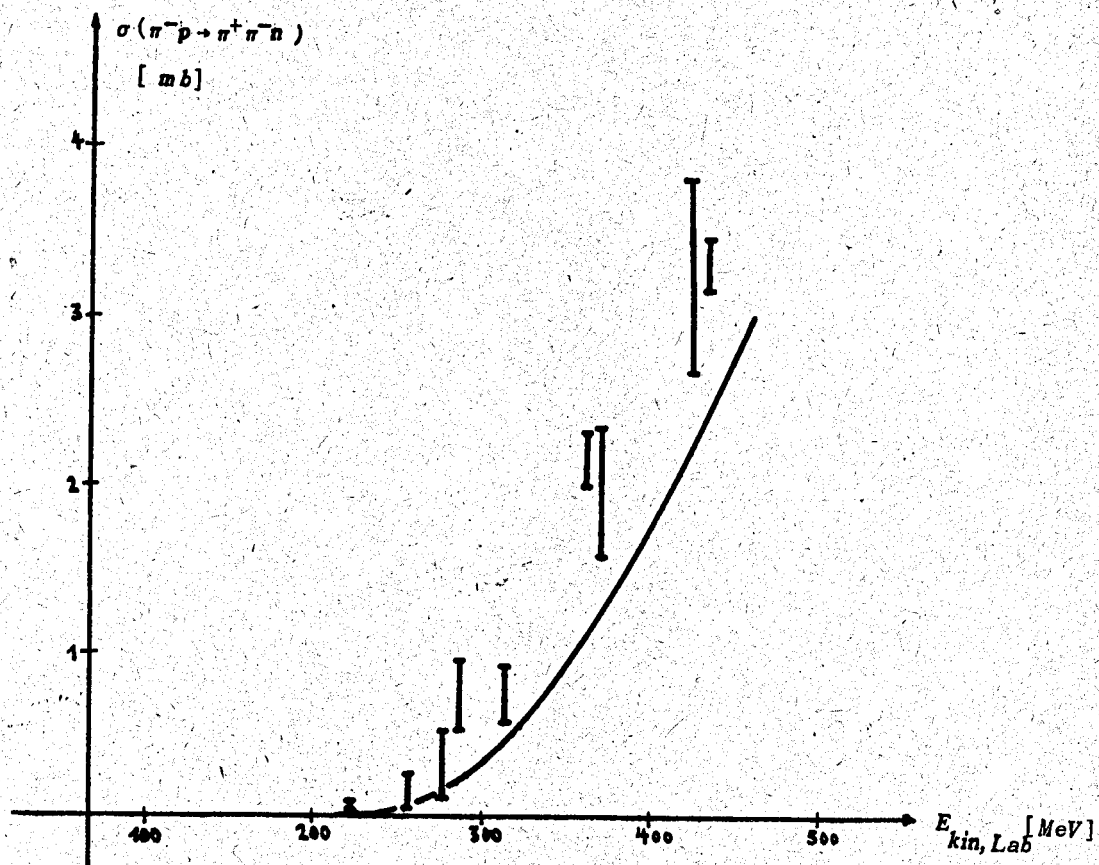


Рис. 1. Экспериментальные /7-12/ и теоретические сечения реакции  $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$