ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

И. Чулли, С. Чулли и Я. Фишер

Д - 832

К ВОПРОСУ ОБ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ В ОБЛАСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Nuovo Cim., 1962, v23, n6, p1129-1132

Дубна 1961

И. Чулли, С. Чулли и Я. Фишер

Д - 832

К ВОПРОСУ ОБ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ В ОБЛАСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Направлено в Nuovo Cimento

В последнее время многие авторы [1-6] применяли метод конформного отображения для решения различных проблем, связанных с аналитическими свойствами амплитуды рассеяния. Особый интерес представляет работа Лавлеса [1], в которой получен явный вид спектральной функции путем экстраполяции экспериментальных данных для рассеяния $\pi N \to \pi N$ при 5.17 Бэв. В настоящей заметке мы кратко рассмотрим вопрос о сходимости этой процедуры.

Отметим следующие черты метода конформного отображения:

1. Любая функция $f(w)$, действительная при $-1 < w < 1$ и аналитическая внутри единичного круга комплексной плоскости w, имеет автоматически требуемые для амплитуды аналитические свойства. Скачок на разрезе получается прямо путем вычисления мнимой части $f(w)$ на единичной окружности.

2. Ряд Тейлора в $w^n(z)$ сходится в каждой точке вырезанной плоскости z /в которой, как известно, амплитуда аналитична/.

3. Конформное отображение, которое преобразует всю вырезанную плоскость z в единичный круг, приводит к самой быстрой сходимости по сравнению с любым другим отображением, преобразующим в единичный круг только часть вырезанной плоскости z /см. [2], дополнение/.

Из пунктов 2 и 3 вытекает, что техника конформного отображения является мощным средством для аналитического продолжения амплитуды от $-1 \leq z \equiv \cos\theta \leq 1$ до любой точки вырезанной плоскости. Однако, при рассмотрении разложения по w^n на самой окружности возникает вопрос о сходимости используемого ряда.

Заметим, что в принципе нетрудно обеспечить сходимость ряда в точках разреза /и тем самым улучшить сходимость во всех точках/. Для этого достаточно отобразить в единичный круг наряду со всей вырезанной плоскостью z еще некоторую часть нефизического Риманова листа. Но при высоких энергиях это наталкивается на две трудности. Так как положение резонансных полюсов не известно, то некоторые из них могут попасть при этом во внутренность единичного круга и тем самым уменьшить область сходимости разложения во всех направлениях /см. пунктирный круг на рис. 1/.

Во-вторых, практическое построение функции конформного отображения значительно усложняется ввиду того, что при высоких энергиях спектральная функция имеет много точек ветвления /разрез при этом преобразуется в "фигурную" кривую на рис. 1/. При 5.17 Бэв имеется в полосе $4 \leq t \leq 16$ пятнадцать точек ветвления, а именно:

$t_0 = 4{,}043$	$t_1 = 4{,}33$	$t_2 = 4{,}54$	$t_3 = 5{,}19$	$t_4 = 5{,}42$
$t_5 = 6{,}03$	$t_6 = 6{,}47$	$t_7 = 7{,}13$	$t_8 = 8{,}60$	$t_9 = 8{,}68$
$t_{10} = 9{,}27$	$t_{11} = 10{,}59$	$t_{12} = 10{,}86$	$t_{13} = 12{,}95$	$t_{14} = 13{,}35$,

Ниже мы исследуем сходимость на разрезе, не прибегая к свойствам амплитуды на нефизических Римановых листах, а используя то обстоятельство, что особенности спектральной функции нигде не хуже, чем $\dfrac{1}{\sqrt{t_i - t}}$. Здесь видна аналогия с известным методом Чу [7] получения констант связи путем экстраполяции к полюсу: в методе Чу существенным образом используется то, что имеется некоторая априорная информация о степени знаменателя полюсного члена.

Для простоты рассмотрим случай разрезов $(-\infty, -a)$ и (a, ∞) и потребуем $w(z=0)=0$, т.е.

$$w = \frac{\sqrt{a+z} - \sqrt{a-z}}{\sqrt{a+z} + \sqrt{a-z}},$$

но результаты остаются в силе и в общем случае. В плоскости w дисперсионное соотношение имеет вид

$$A_1(w) = 1/\pi \int_C K(w'w) \frac{\sigma(w')}{w'-w} dw',$$

где $K(w'w) = \dfrac{1-w'^2}{1+w'^2} \dfrac{1+w^2}{1-ww'}$, C есть единичная окружность и $\sigma(w)$ предельное значение A_1 на C, которое считается равным нулю при $w = \pm i$ / этому соответствует $t = \pm\infty$ /. Так как $K(w'w)$ не имеет полюсов внутри C и $K(ww)=1$, имеем для $|w| < 1$ прямо $A_1(w) = 1/\pi \int_C \dfrac{\sigma(w')}{w'-w} dw'$. На окружности введем определение

$$\sigma^{N}_{eff} = \frac{1}{2i} \sum_{0}^{N} c_n \, e^{in\phi} ,$$

где $\frac{1}{2i} c_n$ — коэффициент Фурье $f_n = 1/\pi \int_0^{2\pi} \sigma(\phi)\, e^{-in\phi} \, d\phi$. Так как $A_1(w) = \sum_0^\infty c_n w^n$, можно легко показать /используя лемму Шварца/ , что при физических w

$$\left| 1/\pi \int_C \frac{\sigma(w') - \sigma_{eff}(w')}{w' - w} \, dw' \right| = \left| \sum_{N+1}^{\infty} c_n w^n \right| \leq \mathcal{E}_N |w| ;$$

$$\mathcal{E}_N = \sum_N^\infty c_{n+1} \, w^n \Big|_{z=1} \sim \frac{w^n_{(z=1)}}{1 - w_{(z=1)}}$$

/ $z = 1$ есть физическая точка, при которой разложение сходится наимедленнее/.

Полученное соотношение эквивалентно тому тривиальному факту, что "эффективная спектральная функция" дает в физической области исходной реакции хорошее приближение для $A_1(w)$. Однако, если мы хотим использовать полученную информацию для низкоэнергетической области перекрестной реакции, где σ больше не входит под знаком интеграла по t , мы должны требовать сходимость ряда $\sum c_n w^n$ прямо на окружности $w = e^{i\phi}$. Другими словами, нам нужна сходимость ряда Фурье

$$\sigma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \, e^{in\phi},$$

где $f_n = \frac{1}{2i} c_n$ для $n > 0$ и $f_{-n} = -f_n$. Эта формула следует из того, что в /1/ важна только антисимметричная часть σ, потому что

$$\frac{K(e^{i\phi}, w)}{e^{i\phi} - w} \, \frac{\partial e^{i\phi}}{\partial \phi} = tg\phi \, \frac{1 + w^2}{(e^{i\phi} - w)(e^{-i\phi} - w)} ,$$

что является нечетной функцией от ϕ . Более того, спектральная функция определяется выражением $\frac{1}{2i} \left(A_1(z+i\epsilon) - A_1(z-i\epsilon) \right)$. Особенность спектральной функции типа $\frac{1}{\sqrt{a - z}}$ переходит в функцию $\frac{a \sqrt{w^2 + 1}}{\sqrt{(aw - a)^2 - (a^2 - \alpha^2)}}$, которая разложима в ряд Фурье всегда за исключением $\alpha = a$, когда возникает полюс. Этот полюс приводит к расходимости ряда на окружности, но может быть устранен смещением начала разреза функции w , в другую точку $a' < a$, или – лучше – разложением функции $\sqrt{a - z}\; A_1$ x/

x/ В этой связи кажется, что аналогия с подходом Чу более глубока, чем казалось на первый взгляд.

вместо A_l. Следующие особенности есть положительные степени корней и не вызывают никаких трудностей /мы признательны проф. К.А. Тер-Мартиросяну за это примечание/. Таким образом, можно сделать заключение, что разложение функции $\sqrt{a-z}\,A_l$ в ряд по w^n может быть применено для вычисления спектральной функции, которая теперь представлена в виде сходящегося ряда Фурье /разделенного на $\sqrt{a-z}$ /. Если ситуация аналогична для левого разреза, то $\sigma(z)=\frac{1/2i}{\sqrt{a^2-z^2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\phi}$ (в этом случае $c_{-n}=c_n$).

Возвращаясь к статье С. Лавлеса мы хотим отметить, что функция $e^{-b\eta^2}$ не имеет требуемого поведения в интервале $0<t<4$, где все производные должны быть положительными[x]. Кроме того, отметим, что возможные нули функции A_l могли бы существенно уменьшить радиус сходимости использованного в [1] ряда $\ln A_l=\Sigma\, a_n \eta^n$ даже в случае, если кривая хорошо проходит через экспериментальные точки. Однако, обе эти трудности можно легко преодолеть, если экспериментальные данные подогнать другим образом так, чтобы указанные требования выполнялись.

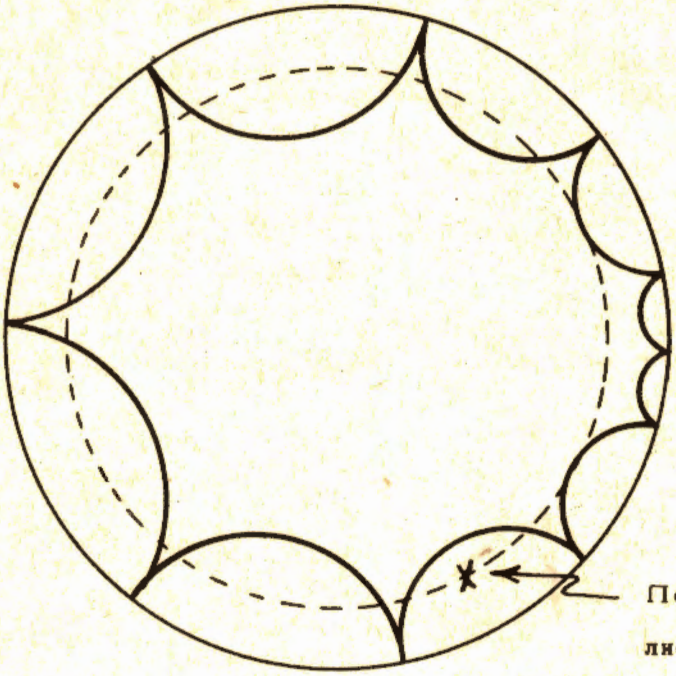
Литература

1. C.Lovelace " Diffraction Scattering and Mandelstam Representation", Preprint, Imperial College, London, Sept. 1961
2. S.Ciulli and J.Fischer, Nucl.Phys. 24, 465 (1961), Dubna prepr. D-615, June 1960.
3. S.Ciulli and J.Fischer. "Integral Equations for $\pi\pi$ Scattering and Convergence Problems of the Amplitude Expansion", Dubna preprint,February 1961, and ЖЭТФ , 41, 1 (7) 256.
4. D.Greenberger and B.Margolis. Phys.Rev.Lett 6, 6 , 310 (1961).
5. W.R.Frazer. " Application of Conformal Mapping to the Phenomenological Representation of Scattering Amplitude", Preprint Univer. of California, 1961.
6. J.E.Bowcock and J.C.Stoddart. " Pion-Pion Scattering and Nuclear Form Factors". Manchester University, preprint 1961).
7. G.F.Chew. Phys.Rev. 112, 1380 (1958).

Рукопись поступила в издательский отдел
13 ноября 1961 г.

---

[x] Мы благодарны проф. И.Я. Померанчуку, который обратил наше внимание на это обстоятельство.



Полюс на втором листе Римана.

Рис.1.