ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Г. Домокош

Д-773

ПОВЕДЕНИЕ АМПЛИТУДЫ УПРУГОГО ПИОН-ПИОННОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

(Нейтральная модель)

Дубна 1961 год

Г. Домокош x)

Д-773

ПОВЕДЕНИЕ АМПЛИТУДЫ УПРУГОГО ПИОН-ПИОННОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

(Нейтральная модель)

Направлено в ЖЭТФ

---

x) Командирован из Центрального Научно-исследовательского института физики Венгерской АН, Будапешт.

1. Введение

Экспериментальные данные показывают, что полное сечение сильно взаимодействующих частиц стремится к постоянному значению при больших энергиях падающей частицы [1]. Однако, обычные методы теории поля дают поперечные сечения, которые при больших энергиях убывают как некоторая степень энергии. Возможно, что это связано с тем, что во всех этих теориях учитывается лишь конечное число возможных каналов в промежуточных состояниях.

В настоящей работе мы предлагаем метод для определения асимптотики мнимой части амплитуды упругого рассеяния, принимая при этом неограниченное число неупругих каналов в промежуточных состояниях.

При этом мы ограничимся рассмотрением обмена минимальным числом частиц между сталкивающимися частицами; наша теория описывает столкновения с малыми передачами импульса[1)] [2]. Мы проведем наши расчеты для нейтральных, псевдовекторных частиц с массой равной единице. Можно, однако, думать, что наша модель может служить для описания реальных пионов, так как, по-видимому, изоспин не играет существенной роли при больших энергиях [1].

Из самого метода вычислений следует, что наши результаты будут получены с точностью до логарифмических факторов (мы получим решение уравнений в виде асимптотического степенного ряда), так что о логарифмическом убывании полного сечения мы ничего утверждать не сможем (ср. [5]).

2. Интегральные уравнения для спектральных функций

Следуя Мандельстаму [6], предположим, что амплитуда Фейнмана для процесса с четырьмя внешними линиями описывается одной аналитической функцией во всех каналах.

Запишем соотношение унитарности в "упругом приближении" для канала 3. (Квадрат энергии в с.ц.м. равен t)

$$A_3(z_1,t) = \frac{1}{32\pi^2}\sqrt{\frac{t-4}{t}}\iint \frac{dz_2\,dz_3}{\sqrt{-k(z_1z_2z_3)}}\,A^*(z_2,t)\,A(z_3,t) \qquad (1)$$

---

1) Основные расчеты нашей работы были уже выполнены, когда мы познакомились с близкими по идеям статьями Чу и Фраучи [3,4].

Здесь и далее пользуемся обозначениями работы [6]. В спектральной области (1,3) мнимая часть A_3 (являющаяся по предположению в то же время мнимой частью A_1) задается выражением

$$\operatorname{Im} A_1(z_1,t)=\frac{-1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{t-4}{t}}\iint_{z_0}^{\infty}\frac{dz_2dz_3}{\sqrt{k(z_1z_2z_3)}}\vartheta\left(z_1-z_2z_3-\sqrt{(z_2^2-1)(z_3^2-1)}\right)\times \tag{2}$$
$$\times A_1^*(z_2,t)\,A_1(z_3,t),$$

где $z_0=1+8(t-4)^{-1}$. (При этом мы использовали свойства симметрии амплитуды).

Будем рассматривать (2) как интегральное уравнение для A_1. Следует заметить, что форма уравнения не зависит от асимптотики A_1 [2], так что его можно решить без каких-то дополнительных предположений (вычитания и т.д.).

3. Приближенное решение интегрального уравнения

Рассмотрим асимптотическое решение интегрального уравнения (2) для больших s и малых t. Применим к этому уравнению преобразование Меллина [5].

Определив[3]

$$\tilde{A}_1(u,t)=\int_{z_0}^{\infty}\frac{dz}{z}\,z^u A_1(z,t), \tag{3}$$

найдем для вещественных значений u:

$$\operatorname{Im}\tilde{A}_1(u,t)=\frac{-1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{t-4}{t}}\iint_{z_0}^{\infty}\frac{dz_2dz_3}{\left[(z_2^2-1)(z_3^2-1)\right]^{\frac{1-u}{2}}}C(\alpha,u)A_1^*(z_2,t)A_1(z_3,t), \tag{2'}$$

---

[2] Это уже отметил Грибов [5].

[3] Так как $A_1(z,t)=0$ для $z<z_0$, и по предположению A_1 обладает в крайнем случае полюсом в бесконечности, преобразование Меллина существует в комплексной u -плоскости для $u<u_1$, где u_1 – некоторая постоянная.

где

$$\alpha = \frac{z_2 z_3}{\sqrt{(z_2^2-1)(z_3^2-1)}}$$

$$c(\alpha, u) = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} (x+\alpha)^{u-1} . \tag{4}$$

Разложим $C(\alpha, u)$ и величину в квадратных скобках в асимптотический степенной ряд по z_2^{-1} и z_3^{-1} .

Полагая : $C(u,1) \equiv C(u)$ после элементарного вычисления, найдем:

$$\begin{aligned} Im\, \tilde{A}_1(u,t) = \frac{-1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{t-4}{t}} \Big\{ c(u) \left| \tilde{A}_1(u,t) \right|^2 + \\ + (1-u) \left[c(u) - c(u-1) \right] Re \left(\tilde{A}_1^*(u-2,t)\, A_1(u,t) \right) + \\ + \cdots \Big\} \end{aligned} \tag{5}$$

Если решение этого уравнения представим в виде ряда:

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A}_1^{(1)} + \tilde{A}_1^{(2)} + \cdots$$

оказывается, что главный член в асимптотическом разложении определяется первым членом, являющимся решением уравнения:

$$Im\, \tilde{A}_1^{(1)} = \frac{-1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{t-4}{t}}\, c(u) \left| \tilde{A}_1^{(1)} \right|^2 . \tag{5'}$$

Итак, полагая $\tilde{A}_1^{(1)} = \left[h_1(u,t) + i\, h_2(u,t) \right]^{-1} \equiv h^{-1}(u,t)$, где h_1, h_2 – вещественны, получаем

$$h_2(u,t) = \frac{1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{t-4}{t}}\, c(u) . \tag{6}$$

h_1 можно определить, используя аналитические свойства h . Пренебрегая левым "динамическим" разрезом (который дает в асимптотику исчезающий вклад), найдем, что $\tilde{A}_1(u,t)$ обладает "динамическим" разрезом вдоль вещественной оси в t -плоскости для $t>4$. Кроме этого, $\tilde{A}_1$ может обладать "кинематическими сингулярностями, обусловленными тем, что мы выводили преобразование Меллина по z и не по s .

h обладает теми же разрезами, что и $\tilde{A}_1$, а полюсами – в точках, где $\tilde{A}_1$ обращается в нуль и обратно.

Определив ветви степенной функции обычным образом, в общем случае

t -плоскость разделится на две части, двумя разрезами, исходящими направо и налево из точки t =4 вдоль вещественной оси. Итак, нужно определить h в верхней и нижней полуплоскости отдельно. Если же u вещественное, целое, то существует одна функция $h(u,t)$, аналитичная в t -плоскости с разрезом вдоль вещественной оси, исходящим направо из t = 4. Она обладает спектральным представлением следующего вида:

$$h(u,t) = \frac{t-t_0}{\pi}\int_4^\infty \frac{dt'\, h_2(u,t')}{(t'-t_0)(t'-t)} + \chi(u) + R(u,t), \tag{7}$$

где h_2 определена формулой (6); $\chi(u)$ – произвольная функция от u и R сумма полюсных членов, соответствующая корням функции $\tilde{A}$ [4].

В дальнейшем мы используем более простую формулу (7) вместо общего представления; можно показать, что это упрощение не влияет на окончательные результаты.

Итак, используя (6), мы имеем:

$$h(u,t) = \frac{C(u)}{4\pi^2}\left\{\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{t-4}{t}}\log\frac{1+\sqrt{\frac{t-4}{t}}}{1-\sqrt{\frac{t-4}{t}}} + i\sqrt{\frac{t-4}{t}}\right\} + \eta(u) \qquad (t>4) \tag{8}$$

(где $\eta(u)$ – опять некоторая произвольная функция от u), и окончательно:

$$\tilde{A}_{13}(u,t) \approx \operatorname{Im}\tilde{A}_1^{(1)} = \frac{\frac{C(u)}{4\pi^2}\sqrt{\frac{t-4}{t}}}{\left[\frac{C(u)}{4\pi^3}\sqrt{\frac{t-4}{t}}\log\frac{1+\sqrt{t-4/t}}{1-\sqrt{t-4/t}} + \eta(u)\right]^2 + \left(\frac{C(u)}{4\pi^2}\right)^2\frac{t-4}{t}} \,. \tag{9}$$

Функцию $C(u)$ можно выразить с помощью известных функций:

$$C(u) = \pi^{1/2}\, 2^{u-1}\,\frac{\Gamma(1-u)}{\Gamma(3/2-u)} \,. \tag{10}$$

---

[4] Функция R соответствует неоднозначности типа Кастиллехо-Далица-Дайсона /7/. Далее положим $R \equiv 0$.

Для того, чтобы получить $A_{13}(s,t)$, нам нужно обратить преобразование Меллина. Однако это невозможно, пока мы ничего не знаем о функции $\eta(u)$. Дополнительную информацию можно получить, если рассмотреть (9) при $0<\sqrt{\frac{t-4}{t}}\ll 1$.

Тогда:

$$\tilde{A}_{13} \approx \frac{c(u)}{4\pi^2(\eta(u))^2}\sqrt{\frac{t-4}{t}} \tag{9'}$$

и

$$\begin{aligned} A_{13}(s,t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{u_0-i\infty}^{u_0+i\infty} du\,\left(1+\frac{2s}{t-4}\right)^{-u}\tilde{A}_{13}(u,t) \\ &\sim \frac{1}{2\pi i}\int_{u_0-i\infty}^{u_0+i\infty} du\,\left(\frac{2s}{t-4}\right)^{-u}\tilde{A}_{13}(u,t) \\ &\qquad (u_0<u_1). \end{aligned} \tag{11}$$

Известно, что поведение амплитуды вблизи порога канала 3[5] будет правильным, если у границы спектральной области A_{13}[6] ведет себя как $(t-t_0(s))^{-1/2}$, где $t_0(s)=4s(s-16)^{-1}$.

Из (10), (9') и (11) видно, что такое поведение имеет место, если $(\eta(u))^2$ обладает простым корнем в точке $u=-1$. Итак,

$$(\eta(u))^2 = (1+u)\,\eta_1(u)$$
$$(\eta_1(-1)\equiv\eta_1\neq 0)$$

и для $0<\sqrt{\frac{t-4}{t}}\ll 1$ найдем:

---

5) Т.е. чтобы полное сечение стремилось к постоянному значению при бесконечно малой кинетической энергии. Это физически эквивалентно тому, что взаимодействие при малых энергиях обладает конечным радиусом действия.

6) В этом можно убедиться либо путем прямого вычисления, либо вспоминая результаты, полученные в теории возмущений. См. Мандестам. /8/.

$$A_{13}(s,t) \approx \frac{1}{6\pi^2\eta_1}\,\frac{s}{\sqrt{t(t-4)}} + o(s). \tag{12}$$

Выразить $A_{13}(s,t)$ из (9) в замкнутой форме не удается. Для того, чтобы получить какую-то качественную информацию о поведении A_1, предположим, что A_{13} задается формулой (12) во всем интервале $4 < t < \infty$. Тогда найдем:

$$A_1(s,t) \sim \frac{s}{12\pi^3\eta_1}\, f(t), \tag{13}$$

где

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{t(t-4)}}\,\log\frac{\sqrt{t(t-4)} - t}{\sqrt{t(t-4)} + t} \tag{14}$$

и пользуясь оптической теоремой, получаем полное сечение:

$$\sigma \sim 2.(3\pi\eta_1)^{-1}. \tag{15}$$

4. Обсуждение результатов

Как видно из формул (13)-(15), изложенная теория описывает оба основных качественных результата, известных из опытов с рассеянием частиц при больших энергиях: постоянное полное сечение и дифракционный характер упругого рассеяния, форма которого не зависит от энергии (см. рис. 1).

При больших значениях $(-t)$, функция $f(t)$ убывает слишком медленно (как $\log(-t)/(-t)$), но в этой области наши результаты уже, строго говоря, неприменимы.

Следует сделать еще несколько замечаний об отношении наших результатов к исследованиям Грибова [5]. В работе Грибова показано, что чисто степенная зависимость амплитуды на бесконечности противоречит обобщенному соотношению унитарности[7] (наша формула (2)). В то же время Грибов ничего не утверждает о значении степени в асимптотическом выражении амплитуды. Как видно из настоящей работы, степень фиксируется околопороговыми свойствами амплитуды в перекрестном канале, а отсутствие логарифмического множителя является следствием (как замечено в § 1) приближений, примененных нами.

Принципиальной трудностью в нашей теории является присутствие неизвестных функций η и R. Полагая что $R = 0$, нам удалось определить положение первого корня η, но нам не известно, как их определить полностью. Этот вопрос требует дальнейшего изучения.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность В.С.Барашенкову, Ю.Вольфу, А.В.Ефремову, профессорам Чжу Хун-юаню и К.А.Тер-Мартиросяну за ценные дискуссии.

Литература

1. В.С.Барашенков. УФН, 72, 53, (1960).
2. Л.Б.Окунь, И.Я.Померанчук. ЖЭТФ, 36, 300 (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
24 июля 1961 года.

---

7) См., однако, /4/. Результаты Грибова неправильны, если спектральная функция осциллирует на бесконечности.

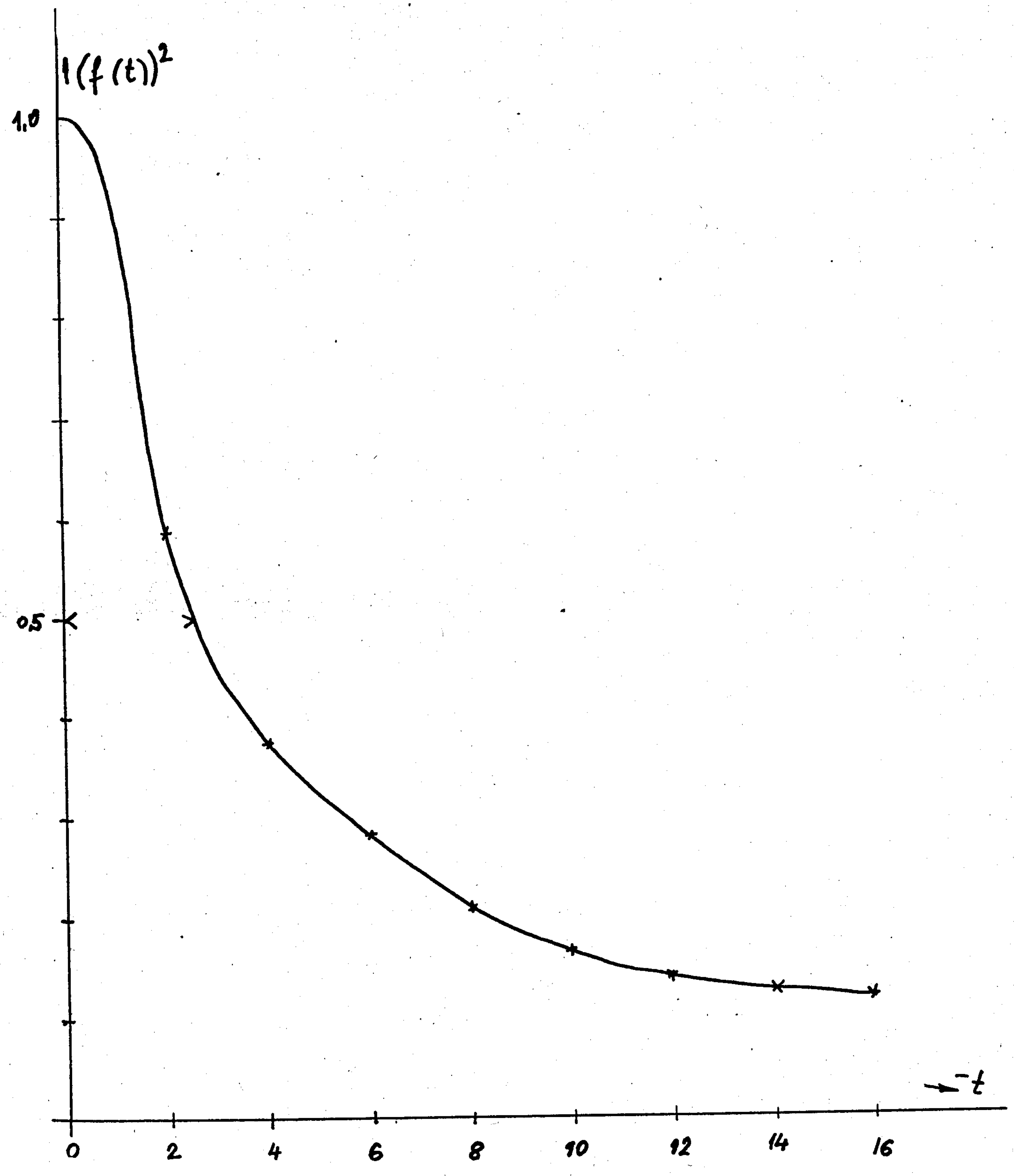

Рис. 1. Дифференциальное распределение передач импульса по формуле (14).