ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

А.В. Ефремов, Чжу Хун-юань и Д.В. Ширков

Д-757

ПИОН-ПИОННОЕ РАССЕЯНИЕ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

Дубна 1961

А.В. Ефремов, Чжу Хун-юань и Д.В. Ширков[x]

Д-757

ПИОН-ПИОННОЕ РАССЕЯНИЕ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

---

[x] Институт Математики Сибирского отделения АН СССР, Новосибирск 72.
/Работа выполнена в Объединенном институте ядерных исследований/.

§ 1. Введение

В недавней работе[1] нами была исследована нейтральная модель пион-пионного рассеяния, поддающаяся точному аналитическому решению. Это решение содержит бесконечный набор произвольных параметров, вследствие чего уравнения для амплитуд рассеяния при малых энергиях не дают динамического описания. Решение нейтральной модели допускает две различные асимптотики в области больших энергий и, при отсутствии нулей у амплитуды рассеяния, обладает следующими свойствами. Логарифмическая ветвь решения /асимптотика $\sim 1/\ln q^2$ / не имеет резонансов и соответствует перенормируемой теории возмущений. Степенная ветвь решения /асимптотика $\sim q^{-4}$ / содержит резонанс, положение которого может быть выбрано независимым от параметра λ, характеризующего силу взаимодействия. При выключении взаимодействия резонанс становится бесконечно узким и амплитуда обращается в нуль всюду, кроме одной точки, положение которой произвольно. Таким образом, при выключении взаимодействия амплитуда оказывается бесконечно вырожденной.

Данная работа является продолжением описанного исследования по нейтральной модели. В заряженном случае из-за более сложной кроссинг-симметрии не удается построить точного решения. Однако, проведенное ниже аналитическое исследование позволяет установить основные свойства решений заряженного случая, которые оказываются весьма близкими к перечисленным свойствам нейтральной модели. В частности, может существовать неадиабатическое решение с узким резонансом в p-волне.

§ 2. Система уравнений и некоторые свойства

Амплитуда рассеяния заряженных мезонов выражается через три скалярные функции A,B и C. Мы не будем выписывать здесь кинематические и структурные формулы, а также формулы кроссинг симметрии, отослав читателя к статьям[2,3], содержащим полный набор этих формул, обозначений которых мы будем по возможности придерживаться.

В соответствии с нашей общей программой[4] мы ограничимся s и p волнами A_l, которые выражаются через линейные комбинации амплитуд

A,B,C, взятых для рассеяния вперед. Здесь и ниже A_1 – p –волна состояния с изотопическим моментом $J = 1$, A_s — / $s = 0,2$ / s –волны состояний с $J = 0,2$.

Кроссинг-симметрия по аргументам s и u приводит к следующему свойству кроссинг-симметрии для парциальных амплитуд

$$A_l(-\omega - i0) = \sum_l b_{ll} A_l(\omega + i0) \qquad /2.1/$$

Здесь

$$\omega = (2\nu + 1) = 2\frac{q^2}{\mu^2} + 1$$

а числовая матрица b_{ll} имеет вид

$$b_{ll} = \delta_{ll} + l_l n_l$$

$$l_0 = -1/3,\quad l_1 = -1/18,\quad l_2 = 1/6$$

$$n_0 = 2,\quad n_1 = 9,\quad n_2 = -5$$

В упругом двухчастичном приближении условие унитарности дает

$$Im\ A_l(\omega + i0) = K(\omega)\,|A_l(\omega)|^2 \quad \omega \geqslant 1 \qquad /2.2/$$

$$K(\omega) = \sqrt{\frac{\omega - 1}{\omega + 1}}$$

Из /2.2/ следует, что A_l ограничены, поэтому при написании теоремы Коши достаточно сделать одно вычитание. Это вычитание проведем в точке $\omega = 0$ $(s = u = 2,\ t = 0)$ Полагая A /2,2,0/ = C /2,2,0/ = λ, получим с учетом /2.1/ следующую систему интегральных уравнений

$$A_s(\omega) = \gamma_s\lambda + 3A_1(0) + \frac{\omega}{\pi}\int_1^\infty \left(\frac{Im\ A_s(\omega')}{\omega' - \omega} - \sum_l b_{sl}\frac{Im\ A_l(\omega')}{\omega' + \omega}\right)\frac{d\omega'}{\omega'}$$

$$A_1(\omega) = \frac{\omega - 1}{\pi}\int_1^\infty \left(\frac{Im\ A_1(\omega')}{(\omega'+1)(\omega'-\omega)} - \sum_l b_{1l}\frac{Im\ A_l(\omega')}{(\omega'+1)(\omega'+\omega)}\right)d\omega' \qquad /2.3/$$

$$\gamma_0 = 5,\quad \gamma_2 = 2$$

Вычитание для р-волны сделано на пороге, при $\omega = 1$. Из этих уравнений однако вытекает, что предположение $Im\, A_l(\infty) = C_l > 0$ приводит к логарифмическому росту при $\omega \to \infty$. Поэтому

$$A_l\ (\infty) = 0 \qquad /2.4/$$

и вычитание, сделанное в /2.3/, как будет показано ниже, не является необходимым, а система /2.3/ оказывается математически эквивалентной системе без вычитания

$$A_l\ (\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\omega' \left(\frac{Im\, A_l(\omega')}{\omega' - \omega} + \sum_j \frac{Im\, b_{lj}\, A_j(\omega')}{\omega' + \omega} \right) \qquad /2.5/$$

с дополнительным пороговым условием

$$A_l(1) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\omega' \left(\frac{Im\, A_l(\omega')}{\omega' - 1} + \sum b_{lj} \frac{Im\, A_j(\omega')}{\omega' + 1} \right) d\omega' = 0 \qquad /2.6/$$

Переход от /2.5/, /2.6/ к /2.3/ осуществляется с помощью явного выражения для λ

$$\lambda = \frac{1}{6\pi} \int_1^\infty \frac{4\,(Im\, A_0(\omega') - Im\, A_2(\omega')) - \sum_l n_l\, Im\, A_l(\omega')}{\omega'}\, d\omega' \qquad /2.7/$$

Из /2.5/ вытекает, что величины $A_2/1/$ и $A_0/1/ + 3A_1/1/$ положительны. С учетом /2.6/ это приводит к важному выводу о положительности длин рассеяния s – волн

$$a_s = A_s(1) > 0 \qquad /2.8/$$

Отметим, что этот факт не зависит от двухчастичного приближения и опирается лишь на предположение о справедливости невычтенных дисперсионных соотношений.

Аналогичная оценка для длины рассеяния р-волны может быть сделана лишь при некоторых правдоподобных предположениях о характере решения. Так, считая, что кроссинг-интеграл для р-волны в окрестности порога может быть аппроксимирован выражением

$$\sum_{j} \frac{1}{\pi} \int_{1}^{\infty} \frac{b_{1j} Im A_j(\omega')}{\omega' + \omega} d\omega = - \frac{r}{\omega + \omega_0}; \; r > 0$$

получаем из /2.5/

$$a_1 = 2 \frac{d A_1(\omega)}{d\omega} \Big/_{\omega = 1} > 0 \qquad /2.9/$$

Обратимся к асимтотике решений при $\omega \to \infty$.

Необходимо подчеркнуть, что говоря об асимптотике, мы имеем в виду только математическое свойство уравнений /2.3/, которые при больших энергиях не описывают физическую амплитуду. Уравнения /2.5/, как будет показано в разделе 4, допускают следующие виды асимптотик

/а/ $\quad Re\, A_i(\omega) \simeq \frac{d_i}{\ln \omega}$

/б/ $\quad Re\, A_i(\omega) \simeq \frac{e_i}{\omega}$

/с/ $\quad Re\, A_i(\omega) \simeq \frac{f_i}{\omega^2}$

Для того чтобы показать, что более сильное степенное убывание невозможно, представим /2.5/ в виде

$$A_i(\omega) = G_i(\omega) + l_i \Phi(\omega) \qquad /2.10/$$

где

$$G_i(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{1}^{\infty} \frac{Im A_i(\omega')\, d\omega'^2}{\omega'^2 - \omega^2} \qquad /2.11/$$

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{1}^{\infty} \frac{\sum_j n_j\, Im A_j(\omega')}{\omega' + \omega} d\omega' \qquad /2.12/$$

В пределе $\omega \to \infty$

$$G_i(\omega) \simeq -\frac{g_i}{\omega^2}, \quad g_i > 0 \qquad /2.13/$$

Для убывания более быстрого чем ω^{-2} необходимо, чтобы

$$\Phi(\omega) \simeq \frac{h}{\omega^2} \qquad /2.14/$$

и чтобы $l_i \Phi$ компенсировали отрицательные вклады g_i во всех трех волнах. Это невозможно из-за того, что l_i разных знаков.

Видно также, что асимптотика /с/ может осуществляться лишь при дополнительном условии

$$\sum_j n_j \int_1^\infty Im\, A_j(\omega')\, d\omega' = 0 \qquad /2.15/$$

Подставляя /а/ в уравнения /2.5/ с помощью условия унитарности /2.2/, получаем для d_i систему уравнений

$$\pi d_i = 2d_i^2 + l_i \sum_j n_j d^2$$

которая имеет единственное действительное решение

$$d_0 = 2{,}13; \qquad d_1 = -0{,}188; \qquad d_2 = 0{,}840 \qquad /2.16/$$

Коэффициенты e_i асимптотики /б/ определяются из условий кроссинг-симметрии

$$e_i = l_i c \qquad /2.17/$$

через один произвольный параметр c.

Для асимптотики /с/ кроссинг-симметрия дает

$$\sum_j n_j f_j = 0 \qquad /2.18/$$

С помощью /2.13/ и /2.14/ имеем также

$$f_i = -g_i + l_i h$$

Условие /2.18/ позволяет определить величину h, что дает

$$f_i = -\tfrac{1}{2}\sum_j (\delta_{ij} + b_{ij})\, g_j \qquad /2.19/$$

Из /2.19/ и положительности g_1 вытекает, что $f_2 < 0$. Коэффициенты f_0 и f_1 могут иметь оба знака.

Формулы /2.8/, /2.9/, /2.16/, /2.17/ и /2.19/ позволяют сделать заключение о четности суммарного числа нулей и резонансов парциальных амплитуд – см. таблицу 1.

Т а б л и ц а 1

	Асимптотика /a/	Асимптотика /б/		Асимптотика /c/		
		$c>0$	$c<0$	$f_0<0$ $f_1<0$	$f_0<0$ $f_1>0$	$f_0>0$ $f_1<0$
A_0	чет	неч	чет	неч	неч	чет
A_1	неч	неч	чет	неч	чет	неч
A_2	чет	чет	неч	неч	неч	неч

Трудность в различении нулей амплитуды от резонансов возникает из-за ветвления в условии унитарности

$$Im\, A_l(\omega) = \frac{1}{2K(\omega)}\left(1 \pm \sqrt{1-(2K(\omega)\, Re\, A_l(\omega))^2}\, \right) \qquad /2.20/$$

В нейтральной модели эта трудность преодолевалась переходом к обратной амплитуде $1/A$, мнимая часть которой является заданной функцией. К сожалению, переход к обратным амплитудам не может быть использован в заряженном случае, поскольку здесь парциальные амплитуды, кроме $\omega A_2(\omega)$, не являются обобщенными R –функциями. Можно однако представить парциальные амплитуды в виде линейных комбинаций обобщенных R –функций. Введенные таким способом R –функции подчиняются условиям унитарности вида /2.20/, что затрудняет аналитическое решение задачи. Однако, на этом пути удается получить ряд важных следствий о свойствах решений. Ниже мы рассмотрим два различных способа введения обобщенных R –функций. Результаты полученные ниже двумя разными путями соответствуют друг другу, а также выводам данного параграфа.

§ 3. Первый способ введения R –функций

Введем функции

$$H_i(\omega) = -\frac{1}{\omega\, G_i(\omega)} \qquad /3.1/$$

где G_i определены в /2.11/. Не составляет труда убедиться, что H_i являются нечетными реальными аналитическими обобщенными R –функциями с двумя разрезами и полюсом в начале координат. На физическом разрезе мнимая часть имеет вид

$$Im\, H_i(\omega) = \frac{K(\omega)}{\omega} \,/\, 1 - \omega\, H_i(\omega)\, \Phi(\omega)\, l_i \,/^2 \qquad /3.2/$$

вследствие чего функции H_i не могут иметь нулей во всей комплексной плоскости.

Функция, обладающая этими свойствами, может быть записана в виде

$$H_i(\omega) = -\frac{u_i}{\omega} + \frac{\omega}{g_i} + \frac{\omega}{\pi}\int_1^\infty \frac{Im\, H_i(\omega')\, d\omega'^2}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)} + R_i(\omega) \qquad /3.3/$$

$$R_i(\omega) \mp \omega \sum_n \frac{R_{in}}{\omega_{in}^2 - \omega^2} \qquad /3.4/$$

При этом

$$u_i > 0, \quad g_i > 0, \quad R_{in} > 0, \quad \omega_{in}^2 > 1$$

и коэффициенты R_{in}, ω_{in} таковы, что ряд /3.4/ сходится абсолютно при всех $\omega \neq \omega_{in}$ Для того, чтобы H не обращалось в нуль на отрезке действительной оси $/1,-1/$, достаточно потребовать

$$H_i(1) = \frac{1}{A_i(1) + l_i\, \Phi(1)} < 0 \qquad /3.5/$$

Пороговое условие для р–волны дает также

$$u_1 = -\frac{1}{l_1 \Phi(1)} + \frac{1}{g_1} + \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{Im\, H_1(\omega')}{\omega'^2 - 1}\, d\omega' + R_1(1) \qquad /3.6/$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая $R_i(\omega) \equiv 0$, отложив обсуждение смысла этого условия до конца § 4. Во всяком случае решения не содержащие R –функций зависят от меньшего числа произвольных параметров и в этом смысле могут быть названы "простейшими".

Функции H_i могут быть выражены через A_i и Φ следующим образом

$$Re\, H_i(\omega) = \frac{\Phi_i(\omega) - Re\, A_i(\omega)}{\omega\left[(\Phi_i(\omega) - Re\, A_i(\omega))^2 + (Im\, A_i(\omega))^2\right]} \qquad /3.7/$$

$$Im\, H_i(\omega) = \frac{Im\, A_i(\omega)}{\omega\left[(\Phi_i(\omega) - Re\, A_i(\omega))^2 + (Im\, A_i(\omega))^2\right]} \qquad /3.8/$$

причем

$$\Phi_i(\omega) = l_i \Phi(\omega)$$

Необходимое и достаточное условие существования резонанса в точке ω имеет вид

$$Re\, H_i(\omega) = \rho_i(\omega) \qquad Im\, H_i(\omega) = \sigma_i(\omega)$$

$$\rho_i(\omega) = \frac{K^2(\omega)\,\Phi_i(\omega)}{\omega\left[1 + K^2(\omega)\,\Phi_i^2(\omega)\right]} \;;\; \sigma_i(\omega) = \frac{K(\omega)}{\omega\left[1 + K^2(\omega)\,\Phi_i^2(\omega)\right]} \qquad /3.9/$$

Из сравнения /3.5/ и /3.9/ вытекает, что на пороге

$$Re\, H_i(1) < \rho_i(1) \qquad /3.10/$$

При $\omega \to \infty$ необходимо отдельно рассмотреть три случая различных асимптотик. В случае /а/, асимптотики функций H_i и Φ имеют вид

$$Re\, H_i(\omega) \simeq -\frac{\pi}{2 d_i^2} \frac{\ln \omega}{\omega}$$

$$Im\, H_i(\omega) \simeq \frac{\pi^2}{4 d_i^2} \frac{1}{\omega} \qquad /3.11a/$$

$$\Phi(\omega) \simeq \frac{\sum_j n_j d_j^2}{\pi} \frac{1}{\ln \omega}$$

Из /3.9/ и /3.11/ получаем

$$Re\, H_i(\infty) < \rho_i(\infty) \qquad /3.12a/$$

В случае /б/ асимптотики имеют вид

$$Re\,H_i(\omega) \simeq \frac{\pi}{2\,l_i^2\,c^2}\;\frac{\omega}{\ln\omega}$$

$$Im\,H_i(\omega) \simeq \frac{\pi^2}{4\,l\,c^2}\;\frac{\omega}{\ln^2\omega} \qquad /3.11б/$$

$$\Phi(\omega) \simeq \frac{c}{\omega}$$

Это дает

$$Re\,H_i(\infty) > \rho_i(\infty) \qquad /3.12б/$$

Наконец, в случае /с/

$$Re\,H_i(\omega) \simeq \frac{\omega}{g_i}$$

$$Im\,H_i(\omega) \simeq \frac{1}{\omega}\left(\frac{f_i}{g_i}\right)^2 \qquad /3.11с/$$

$$\Phi(\omega) \simeq \frac{h}{\omega^2} = -\frac{\sum n_j g_j}{2\,\omega^2}$$

откуда получаем

$$Re\,H_i(\infty) > \rho_i(\infty) \qquad /3.12с/$$

Отметим, что в случае асимптотик /а/ и /б/ второй член в /3.3/ отсутствует, т.е. $1/g_i = 0$.

Из формул /3.12/ вытекает, что число точек пересечения кривых $Re H_i(\omega)$ с кривыми $\rho_i(\omega)$ в интервале $1 < \omega < \infty$ четное /включая нуль/ для асимптотики /а/ и нечетное для /б/ и /с/. Однако, этого еще недостаточно для того, чтобы сделать вывод о том, что в этих точках амплитуды имеют резонанс, так как выражения для $Im\,H_i$ и σ_i через $Re\,H_i$ и ρ_i неоднозначны

$$Im\,H_i(\omega) =$$

$$= \frac{1}{2\omega K(\omega)\,\Phi_i^2(\omega)}\left\{1 \pm \sqrt{1-[2\,K(\omega)\,\Phi_i(\omega)\,(1-Re\,H_i(\omega)\,\omega\,\Phi_i(\omega)]^2}\right\} \qquad /3.13/$$

$$\sigma_i(\omega) \quad \frac{1}{2\omega\, K(\omega)\, \Phi_i^2(\omega)} \quad \{1 \pm \sqrt{1-[2K(\omega)\Phi_i(\omega)(1-\rho_i(\omega)\,\omega\,\Phi_i(\omega))]^2}\} \qquad /3.14/$$

Для того, чтобы A_i проходила через резонанс необходимо чтобы $Im\,H_i$ и σ_i находились на одной и той же ветви. Из /3.8/, /3.9/ и /3.11/ следует, что на пороге и при $\omega \to \infty$ и $Im H_i$ находятся на минус-ветви /что соответствует знакам "—" в /3.13/ и /3.14/ /. Условие того, что σ_i лежит на минус -ветви имеет вид

$$K^2(\omega)\, \Phi_i^2(\omega) < 1$$

Исследуем сначала случай, когда

1. $K^2(\omega)\,\Phi_i^2(\omega) < 1$ /3.15/

2. $Im\,H_i$ лежит на минус-ветви Из /3.10/ и /3.12/ можно заключить, что число резонансов четное в случае /а/ и нечетное в случае /б/ и /с/.

Сделаем некоторые заключения о ширине резонанса. В случае $\Phi_i(\omega) \ll 1$, при прохождении A_i через резонанс $Re\,H_i$ изменяется на величину $2\,\frac{K(\omega)}{\omega}$ Поэтому ширина резонанса зависит от быстроты изменения $Re\,H_i$. Для оценки скорости изменения $Re\,H_i$ рассмотрим пороговое и асимптотическое поведение этих функций. На пороге мы имеем

$$H_0(1) = -\frac{3}{3a_0 + \Phi(1)}\,,\quad H_1(1) = -\frac{18}{\Phi_1(1)}\,,\quad H_2(1) = -\frac{6}{6a_2 - \Phi(1)}\,, \qquad /3.16/$$

Согласно /3.5/ эти величины отрицательны, и, как видно из приведенных выражений, благодаря числовому множителю, $H_1/1/$ лежит значительно ниже чем $H_0/1/$ и, вероятно, ниже чем $H_2/1/$.

В случае /б/ все $Re\,H_i$ При $\omega \to \infty$ возрастают, но, как видно из /3.11б/, их отношение остается постоянным

$$Re\,H_0(\infty) : Re\,H_1(\infty) : Re\,H_2(\infty) = 1:36:4$$

Поэтому можно ожидать, что в случае (b) $Re\,H_i$ изменяется быстрее, чем $Re\,H_0$ и $Re\,H_2$. Если предположить, что положение резонансов одинаково, то это приводит к более узкому резонансу в p-волне.

В случае асимптотики /с/ интегральный член в /3.3/ оказывается малым по сравнению с первым и вторым членами. Пренебрегая интегральным членом /а также считая Φ_i малыми/, получаем выражения для положений резонансов ω_i и их ширин Γ_i

$$\omega_i \simeq u_i g_i \; ; \quad \Gamma_i \simeq - \frac{K(\omega_i)\,\omega_i(1-1/\omega_i)}{H_i(1)}$$

Отсюда видно, что резонанс в р-волне уже резонанса в A_0, и, вероятно, уже чем в A_2. Нетрудно убедиться, что как для /б/, так и для /с/, при выключении взаимодействия ширины резонансов стремятся к нулю. Таким образом, как и в нейтральной модели, мы получаем "вырождение" при выключении взаимодействия.

Перейдем теперь к исследованию нулей парциальных амплитуд. Необходимое и достаточное условие обращения амплитуды в нуль в точке ω имеет вид

$$Re\, H_i(\omega) = \frac{1}{\omega\; \Phi_i(\omega)} \equiv \zeta_i(\omega)\,; \quad Im\, H_i(\omega) = 0 \qquad /3.17/$$

Заметим, что $Im\, H_i$ может обращаться в нуль только на минус-ветви. В предположении /3.15/ число нулей A_i равно числу пересечений кривых $Re\, H_i$ и $\zeta_i(\omega)$. Однако, недостаточно сравнить относительный знак $Re\, H_i - \zeta_i$ на пороге и при $\omega \to \infty$, поскольку ζ_i может иметь полюса. Число пересечений, как нетрудно убедиться, можно получить, сравнивая знаки $\frac{Re\, H_i - \zeta_i}{\zeta_i}$ на пороге и при $\omega \to \infty$. Справедливо следующее правило

$$\frac{Re\, H_i(1) - \zeta_i(1)}{\zeta_i(1)} \cdot \frac{Re\, H_i(\infty) - \zeta_i(\infty)}{\zeta_i(\infty)} \Big\} \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad \text{число пересечений} \begin{matrix} \text{четное} \\ \text{нечетное} \end{matrix} \qquad /3.18/$$

Из /2.8/, /2.9/, /3.5/ и /3.17/ на пороге имеем

$$\frac{Re\, H_i(1+\epsilon) - \zeta_i(1+\epsilon)}{\zeta_i(1+\epsilon)} = A_i(1+\epsilon)\, H_i(1+\epsilon) < 0 \qquad /3.19/$$

а при $\omega \to \infty$ из /3.11/ и /3.17/ для случаев /а/ , /б/ и /с/

$$- \frac{2di}{\pi} \qquad /3.20а/$$

$$\frac{\zeta_j(\infty)}{Re\, \Pi_j(\infty) - \zeta_j(\infty)} = 1 \qquad \frac{\pi}{2l_j c} \qquad \frac{\omega}{\ln \omega} \qquad /3.20б/$$

$$\frac{\delta_j}{l_j} \qquad /3.20c/$$

Из /3.18/, /3.19/, /3.20/ и /3.15/ можно получить следующее заключение о числе нулей:

Т а б л и ц а 2

Четность числа нулей в простейших решениях

	Асимптотика /а/	Асимптотика /б/		Асимптотика /с/		
		$c>0$	$c<0$	$l_0<0$, $l_1<0$	$l_0<0$, $l_1>0$	$l_0>0$, $l_1<0$
A_0	чет	чет	неч	чет	чет	чет
A_1	неч	чет	неч	чет	неч	чет
A_2	чет	неч	чет	чет	чет	чет

Эта таблица находится в соответствии с Таблицей 1 и результатами данного раздела о числе резонансов.

Результаты этого параграфа были получены в предположении /3.15/. Попытаемся теперь определить, в какой степени вывод о наличии резонансов в случае /б/ и /с/ обусловлен этими предположениями. Рассмотрим сперва случай, когда /3.15/ заменены на

$$|\Phi_j(\omega)| \ll 1 \qquad /3.22/$$

При этом G_i будет находиться на минус-ветви, в то время как $Im\, H_i$ в некоторых интервалах в окрестности нулей амплитуды может находиться на плюс-ветви. Около порога и на бесконечности $Im\, H_i$, однако, попрежнему лежит на минус-ветви. Для существования резонанса необходимо, чтобы $Im\, H_i$ была на минус-ветви в точке, где $Re\, H_i = \rho_i$. Точка ветвления уравнения /3.13/ определяется соотношением

$$Re\, H_i(\omega) = \frac{\pm 1 + 2K(\omega)}{2\omega K(\omega)} \, \frac{\Phi_i(\omega)}{\Phi_i^2(\omega)} \equiv \beta_i^{\pm}(\omega) \qquad /3.23/$$

Поскольку на пороге $Im\, H_i$ лежит на минус-ветви, то она может перейти на плюс-ветвь только после того, как коснется одной из кривых β_i^+ или β_i^-. Поскольку, как легко показать, $\beta_i^+ > \rho_i$, то $Re\, H_i$ должна пересечь ρ_i прежде, чем она коснется β_i^+. Таким образом, в этом случае резонанс сохраняется. Возможность для $Re\, H_i$ коснуться β_i^- маловероятна. Действительно, из /3.23/ вытекает, что максимум в $\left|\frac{1}{\Phi_i}\right|$ раз ниже, чем $Re\, H_i(1)$ на пороге, а при $\omega \to \infty$ и на пороге $\beta_i^- \to -\infty$. Для того, чтобы коснуться β_i^- функция $Re\, H_i$ должна резко падать в промежуточном интервале. Однако, на пороге

$$\frac{dH_i}{d\omega}\Big|_{\omega \to 1+0} = u_i + \frac{1}{g_i} + \frac{d}{d\omega}\left\{\frac{2\omega}{\pi}\int_1^\infty \frac{Im\, H_i(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}\, d\omega'\right\}_{\omega \to 1+0} \qquad /3.24/$$

Два первых члена положительны и, в соответствии с /3.22/ много больше единицы. Для p-волны третий член также положителен. Для s - волн он может быть отрицателен, но его модуль, в этом случае, должен быть порядка единицы. Поэтому $Re\, H_i$ быстро растет вблизи порога, что приводит к маловероятности ее касания с β_i^-.

$Re\, H_i$ может коснуться β_i^- - только, если $Im\, H_i$ имеет резкий максимум в промежуточной области. Однако тогда, прежде чем упасть до значений порядка $\frac{1}{|\Phi|^2}$, $Re\, H_i$ должна возрасти до значений порядка $1/|\Phi|^2$ и обязательно пересечь кривую ρ_i, которая имеет порядок $|\Phi_i|$. Таким образом, мы снова получаем резонанс. Заметим, что для p-волны маловероятно не только касание β_1^-, но также падение много ниже ζ_1.

Таким образом, в предположении /3.22/ все амплитуды проходят через резонанс.

При $|\Phi_i| > 1$ положение усложняется. В этом случае σ_i может перейти на плюс-ветвь, а кривые β_i^+ и β_i^- сближаются. Однако, и в этом случае, величина /3,24/ для p-волны остается положительной, а $|\Phi_1|$ из-за малости множителя $l_1 = -1/18$ малой. Указание на такое положение дает оценка для Φ_1 в адиабатической ветви. Использовав результаты численного расчета на электронной машине при $\lambda = 0{,}15$, что соответствует $a_0 = 0{,}80$ и $a_2 = 0{,}29$, мы получили $\Phi_1(1) \simeq 0{,}014$.

Отсюда следует, что резонанс в p-волне по всей видимости не исчезает в физически интересном решении.

§ 4. Второй способ перехода к R -функциям

Представим теперь уравнения /2.5/ в форме

$$A_i(\omega) = B_i(\omega) + \sum_j b_{ij} B_j(-\omega) \qquad /4.1/$$

где

$$B_i(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{Im\, A_i(\omega')}{\omega' - \omega}\, d\omega' \qquad /4.2/$$

Не составляет труда убедиться,что функции

$$h_i(\omega) = -\frac{1}{B_i(\omega)} \qquad /4.3/$$

являются реальными аналитическими обобщенными R -функциями с одним физическим разрезом, на котором мнимая часть имеет вид

$$Im\, h_i(\omega) = K(\omega)\left|1 + \frac{\phi_i(\omega)}{B_i(\omega)}\right|^2 = K(\omega)\,|1 - h_i(\omega)\,\phi_i(\omega)|^2 \qquad /4.4/$$

причем

$$\phi_i(\omega) = \sum_j b_{ij} B_j(-\omega) \qquad /4.5/$$

При этом h_i не имеют нулей на всей комплексной плоскости и могут иметь любое число изолированных полюсов первого порядка на разрезе в точках, где одновременно $\phi_i = 0$ и $B_i = 0$; интересно отметить, что поскольку $\phi_2(\omega) > 0$ при $\omega > -1$, то $h_2(\omega)$ не имеет таких полюсов. Следовательно, к h_2 R -функция не может быть добавлена. Перечисленные свойства позволяют записать h_i в виде

$$h_i(\omega) = -\frac{1}{z_i} + \omega J_i(\omega) + c_i\,\omega + \omega \sum_n \frac{r_{in}}{\omega_{in}(\omega_{in} - \omega)} \qquad 1 < \omega_{in} < \infty \tag{4.6}$$

где

$$J_i(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{K(\omega')}{\omega'(\omega' - \omega)} \left| 1 + \frac{\phi_i(\omega')}{B_i(\omega')} \right|^2 d\omega' \tag{4.7}$$

а также

$$r_{in} > 0, \qquad r_{in} = 0, \qquad c_i > 0$$

$$\frac{1}{z} > c_i + J_i(1) + \sum_n \frac{r_{in}}{\omega_{in}(\omega_{in} - 1)} > 0 \tag{4.8}$$

Пороговое условие для р-волны дает

$$A_1(1) = B_1(1) + \sum_j b_{ij}\, B_j(-1) = 0 \tag{4.9}$$

Из ограниченности B_i и /4.5/ следует, что ϕ_i ограничена. Кроме того, порядок нулей ϕ_i не меньше чем порядок нулей B_i. Поэтому $\left| 1 + \frac{\phi_i(\omega)}{B_i(\omega)} \right|^2$ всегда ограничена, вследствие чего h_i может иметь только две различных асимптотики:

/A/ $\qquad h_i(\omega) \simeq -\frac{\pi}{d_i^2} \ln\omega \qquad$ если все $c_i = 0$ $\qquad$ /4.10A/

/BC/ $\qquad h_i(\omega) \simeq c_i\,\omega \qquad$ если все $c_i \neq 0$ $\qquad$ /4.10BC/

Коэффициенты d_i определены в /2.16/. Трем различным асимптотикам парциальных амплитуд соответствуют следующие значения коэффициентов c_i, коэффициента c, введенного в /2.17/ и связей между ними

/a/ $\qquad c = 0; \qquad c_i = 0 \qquad$ /4.11a/

/в/ $$c=\sum_i \frac{n_i}{c_i} \neq 0, \qquad c_i \neq 0 \qquad /4.11a/$$

/с/ $$c=\sum_i \frac{n_i}{c_i} = 0, \qquad c_i \neq 0 \qquad /4.11c/$$

Опуская, как и ранее R –функцию, запишем B_i в виде

$$B_i(\omega)=\frac{z_i}{1-z_i\,J_i(\omega)-\dfrac{\omega}{\omega_i}} \qquad /4.12/$$

где

$$\omega_i=\frac{1}{z_i\,c_i} \qquad /4.13/$$

Необходимое и достаточное условие резонанса в точке ω заключается в том, что в этой точке кривые

$$Re\,h_i(\omega)=\frac{\phi_i(\omega)-Re\,A_i(\omega)}{(\phi_i(\omega)-Re\,A_i(\omega))^2+(Im\,A_i(\omega))^2} \qquad /4.14/$$

$$Im\,h_i(\omega)=\frac{Im\,A_i(\omega)}{(\phi_i(\omega)-Re\,A_i(\omega))^2+(Im\,A_i(\omega))^2} \qquad /4.15/$$

пересекаются с кривыми

$$r_i(\omega)=\frac{K^2\,\phi_i(\omega)}{1+K^2(\omega)\,\phi_i^2(\omega)} \qquad /4.16/$$

$$s_i(\omega)=\frac{K(\omega)}{1+K^2(\omega)\,\phi_i^2(\omega)} \qquad /4.17/$$

то-есть

$$\begin{aligned} Re\,h_i(\omega)&=r_i(\omega)\\ Im\,h_i(\omega)&=s_i(\omega)\end{aligned} \qquad /4.18/$$

Из /4.8/ получаем

$$Re\ h_i(1) < r_i(1) = 0 \qquad /4.19/$$

Перейдем к асимптотике при $\omega \to \infty$. В случае /а/ получаем из /4.10А/

$$Re\ h_i(\infty) < r_i(\infty) = 0 \qquad /4.20/$$

Для /в/ и /с/ /4.10ВС/ дает

$$Re\ h_i(\infty) > r_i(\infty) \qquad /4.21/$$

Поэтому число пересечений четно для /а/ и нечетно для /в/ и /с/. Для того, чтобы эти пересечения были резонансами, необходимо еще чтобы функции

$$Im\ h_i = \frac{1}{2K(\omega)\phi_i(\omega)}\{ 1 \pm \sqrt{1 - [2K(\omega)\phi_i(\omega)(1-\phi_i(\omega)\,Re\,h_i(\omega))]^2}\} \qquad /4.22/$$

$$s_i(\omega) = \frac{1}{2K(\omega)\phi_i(\omega)}[1 \pm \sqrt{1 - [2K(\omega)\phi_i(\omega)(1-\phi_i(\omega)\,r_i(\omega))]^2}] \qquad /4.23/$$

лежали на одной и той же ветви. При выполнении условия

$$K^2\phi^2(\omega) < 1 \qquad /4.24/$$

функция s_i лежит на минус-ветви, $Im\ h_i$ также лежит на минус-ветви на пороге и при $\omega \to \infty$. Можно также показать, что при $|\phi_i(\omega)| \ll 1$ $Im\ h_i$ может лежать на плюс-ветви только в окрестности нулей амплитуды. Тем самым мы приходим к выводам § 3 о числе резонансов. Обратимся к ширине резонанса. При $|\phi_i(\omega)| \ll 1$

$$Re\ h_i(\omega) \approx -\frac{1}{z_i} + \frac{\omega}{z_i\,\omega_i} \qquad /4.25/$$

Поэтому ширина резонанса будет

$$\Gamma_i \simeq z_i\,\omega_i\,K(\omega) \qquad /4.26/$$

С помощью /4.9/ и /4.25/ получаем также в этом приближении

$$z_1 \simeq \frac{1}{27}\,\frac{1-\imath/\omega_2}{1-3\imath/\omega_1}\left[\frac{2z_0}{1+\imath/\omega_0}-\frac{5z_2}{1+\imath/\omega_2}\right]$$

Поэтому $z_1 \ll z_0$ и, если положение резонансов примерно одинаково, то $\Gamma_1 \ll \Gamma_0$ и, вероятно, $\Gamma_1 \ll \Gamma_2$. В пределе выключения взаимодействия мы получаем здесь вырождение.

Перейдем к исследованию нулей амплитуд. Эти нули определяются условиями

$$Re\, h_i(\omega) = \frac{1}{\phi_i(\omega)} \equiv \xi_i(\omega), \qquad Im\, h_i(\omega) = 0 \qquad /4.27/$$

Четность числа нулей определяется знаком выражения

$$\left(\frac{h_i(1)}{\xi_i(1)}-1\right)\left(\frac{h_i(\infty)}{\xi_i(\infty)}-1\right) \qquad /4.28/$$

На пороге имеем

$$\frac{h_i(1)}{\xi_i(1)}-1 = A_i(1)\,h_i(1) < 0 \qquad /4.29/$$

На бесконечности для случаев /а/, /в/ и /с/ находим

$$\left(\frac{h_i(\infty)}{\xi_i(\infty)}-1\right) = \frac{\pi}{d_i}; \; = l_i c c_i; \; = \frac{c_i f}{\omega} \qquad /4.30/$$

Эти формулы приводят нас в точности к тем же самым заключениям, которые были получены в § 3 и приведены в таблице 2. Полученные результаты справедливы в предположении, что $Im\, h_i$ находится на минус-ветви, а так же $K^2\phi^2 < 1$.

Рассмотрим теперь возможности ослабления этих ограничений. В этом случае так же можно провести рассуждения, аналогичные §3 с очевидной заменой $\Phi_i \to \phi_i$, $\omega H_i \to h_i$. Положительность $\left.\frac{dh_i}{d\omega}\right|_{\omega=1+0}$ при этом гарантируется тем, что c_i при $|\phi_i| \ll 1$ велики. Таким образом, и в этом способе мы приходим к заключению о том, что резонанс в p-волне по-видимому не исчезает.

Видно теперь, что все без исключения результаты § 3 и § 4 согласуются между собой и с выводами § 2.

Попытаемся теперь установить причину этого согласия, которое не является тривиальным поскольку приближения § 3 отличаются от приближений § 4. В самом деле, R -функции § 3 и § 4 описывают различные нули, которые не могут совпадать.

Для того, чтобы такое совпадение имело место для точки ω_0 необходимо, чтобы $B_i(-\omega_0) = 0$, что невозможно.

Соответствие результатов может означать либо, что такие R -функции вообще нельзя вводить /подобно тому как это было установлено для h_2 в § 4/, либо, что полные совокупности приближений § 3 и § 4 эквивалентны. Последнее означает например, что введение R -члена в § 4 приводящее к изменению четности числа нулей, соответствует переходу на "плюс-ветвь" в формуле /3.13/ для $Im H_i$, и нарушению второго из условий /3.15/.

Предположим теперь, подобно тому как это было сделано в нейтральной модели /1/, что R -членами можно описать эффекты от тяжелых нестабильных частиц. Отсюда вытекает, что решения, рассмотренные в § 3 и § 4 являются "простейшими" также и с физической точки зрения, поскольку они описывают рассеяние в отсутствии тяжелых нестабильных частиц.

§ 5. Адиабатическое решение при малых λ

Исследуем теперь соответствие между уравнениями /2.3/ и обычной перенормированной теорией возмущений. Сравнение с теорией возмущений позволит оценить степень точности уравнений /2.3/ в области малых энергий. Для этой цели рассмотрим такие решения системы /2.3/, которые при малых значениях параметра могут быть разложены по степеням этого параметра. Решения такого типа для уравнений Чу Мандельстама были получены в работе /5/ с помощью электронной вычислительной машины, а также аналитическим методом Тер-Мартиросяном и Симоновым /6/. Результаты этих двух работ хорошо согласуются друг с другом.

Основываясь на этом согласии мы используем прием работы [6] и представим парциальные амплитуды в виде

$$A\ (\omega) = \frac{1}{D_s(x)}\ ; \quad A\ (\omega) = \frac{x}{D_1(x)}\ ; \ x = \frac{\omega - 1}{\omega + 1} = \frac{\nu}{\nu + 1} \qquad /5.1/$$

Мнимые части функций $D_i(x)$ на разрезах имеют вид

$$Im\, D_s\,(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{x}}\, v_0\left(\frac{1}{x}\right) & x > 1 \end{cases} \qquad /5.2/$$

$$Im\, D_1\,(x) = \begin{cases} -x\sqrt{x} & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{x}}\, v_1\left(\frac{1}{x}\right) & x > 1 \end{cases} \qquad /5.3/$$

где введено обозначение

$$v_i\,(x) = \frac{Im\, A_i\,(-\omega)}{Im\, A_i\,(\omega)} \qquad /5.4/$$

Функции $h_i\,(\omega)$ могут быть представлены в виде

$$Re\, D_s\,(x) = \frac{1}{a_s} - \frac{x}{\pi}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}\,(y-x)} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{y}\, dy}{(1/x - y)}\, v_s\,(\phi) \qquad /5.5/$$

$$Re\, D_1(x) = D_1(0) - \frac{\lambda}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{y}\, dy}{y - x} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{v_1\,(y)}{\sqrt{y}\,(1/x - y)}\, dy + x\, D \qquad /5.6/$$

Здесь a_s –длины рассеяния s –волн, введенные в /2.8/, а член xD учитывает конечность р–волны на пороге кроссинг–интеграла

$$D = \lim \frac{D_1(x)}{x} = \frac{1}{A_1(-1)} \qquad /5.7/$$

Эта величина может быть выражена через длины рассеяния с помощью кроссинг–симметрии, которая дает

$$A_0(-1) = \frac{a_0+5a_2}{3}, \quad A_1(-1) = \frac{5a_2-2a_0}{18}, \quad A_2(-1) = \frac{2a_0+a_2}{6} \qquad /5.8/$$

Поэтому

$$D = -\frac{18}{2a_0-5a_2} \qquad /5.9/$$

В правые части /5.5/ и /5.6/ могут быть добавлены сингулярные члены, соответствующие возможным нулям /в том числе и комплексным/ парциальных амплитуд. Мы предположим, что если даже такие нули и существуют, то они лежат достаточно далеко и не влияют на поведение амплитуды в области малых энергий. Предположение об отсутствии нуля при $x = 1$ соответсвует выбору логарифмической асимптотики /а/.

Связь с параметром λ удобно установить, использовав нормировку в точке симметрии $x = -1$. Получаем

$$D_S(-1) = \frac{1}{a_S} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{y}\,dy}{1+y} \quad v_S(y) = \frac{1}{\gamma_S\lambda + 3A_1(0)} \qquad /5.10/$$

$$D_1(-1) = D_1(0) - D + 0,137 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dy\, v_1(y)}{\sqrt{y}(1+y)} = -\frac{1}{A_1(0)}$$

Здесь использованы численные значения интегралов

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}(y+1)} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{y}\,dy}{1+y} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} = 0,137 \qquad /5.11/$$

Формулы кроссинг-симметрии /5.8/ дают также для s -волн

$$D_0(\infty) = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}}(1 - v_0(y)) = \frac{1}{A_0(-1)} = \frac{3}{a_0+5a_2} \qquad /5.12/$$

$$D_2(\infty) = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}}(1 - v_2(y)) = \frac{1}{A_2(-1)} = \frac{6}{2a_0+a_2}$$

Кроссинг-симметрия позволяет также получить пороговые значения функций $v_I(0)$. Получаем с помощью /5.8/

$$v_0(0) = 3\,\frac{a_0^2+5a_2^2}{(a_0+5a_2)^2};\quad v_2(0) = 6\,\frac{2a_0^2+a_2^2}{(2a_0+a_2)^2};\quad v_1(0) = -\frac{18\,(2a_0^2-5a_2^2)}{(2a_0+5a_2)^2} \qquad /5.13/$$

Значения $v_i(1)$ определяются с помощью формул /а/ и /2.16/

$$v_0(1) = 0{,}475;\qquad v_1(1) = -27{,}6;\qquad v_2(1) = 3{,}91 \qquad /5.14/$$

В пределе малых λ представим длины рассеяния в виде

$$a_s = \gamma_s\lambda\,(1+\alpha_s\lambda+\ldots) \qquad /5.15/$$

Подставляя /5.15/ в /5.13/ получаем

$$v_0(0) = 0{,}6, \qquad v_2(0) = 2{,}25$$

и

$$\tilde{v}_1(0) = -\frac{5{,}4}{(\alpha_0-\alpha_2)^2} \qquad /5.16/$$

где введено обозначение

$$\tilde{v}_1(x) = \lambda^2 v_1(x) \qquad /5.17/$$

Из выражений /5.1/ и /5.5/ видно, что при малых λ $A_s \simeq a_s \simeq \gamma_s\lambda$ вплоть до x таких, что

$$\frac{a_s\,(1+v_s(1))}{\pi}\,\ln\frac{1}{1-x} \approx 1 \qquad /5.18/$$

Принимая во внимание, что A_1 имеет порядок малости λ^2, получаем

$$v_s(x) \simeq v_s(0) \qquad /5.19/$$

Поэтому

$$\mathrm{Re}\,D_s(x) = \frac{1}{a_s} + \frac{2}{\pi}\left\{ x\,J_0\!\left(\frac{1}{x}\right) + v_s(0)\,J_1(x) \right\} \qquad /5.20/$$

Здесь введены обозначения

$$I_n(x) = \frac{}{2}\int_0^1 \frac{y^n\,dy}{\sqrt{y}\left(\frac{1}{x}-y\right)} \qquad /5.21/$$

Обратимся к функции $\tilde{v}_1(0)$. Для ее определения необходимо сперва найти асимптотические значения величин $\eta_1(0)$, D и $A_1(0)$. Положим

$$H_1 = -\frac{\delta}{\lambda^2}, \quad A_1(0) = -r\lambda^2, \quad D_1(0) = \frac{\beta}{\lambda^2} \qquad /5.22/$$

Подставляя /5.15/, /5.16/, /5.19/ и /5.22/ в /5.5/, находим

$$a_0 + 0{,}6\,r = 2{,}089 \qquad /5.23/$$

$$a_2 + 1{,}5\,r = 0{,}3836$$

С другой стороны, из уравнений /5.12/ получаем

$$a_0 - a_2 = \frac{15}{\pi}\left(1 - v_0(0)\right) = -\frac{24}{5\pi}\left(1 - v_2(0)\right) = \frac{6}{\pi} = 1{,}91 \qquad /5.24/$$

и поэтому, с помощью /5.9/ и /5.16/

$$\delta = 0{,}942 \quad и \quad \tilde{v}_1(0) = -1{,}478 \qquad /5.25/$$

С учетом /5.24/ получаем также из/ 5.23/

$$r = 0.228 \qquad a_0 = 1{,}952, \qquad a_2 = 0.042 \qquad /5.26/$$

Для определения величины β воспользуемся формулой /5.6/. При этом мы предположим, что главные вклады, пропорциональные λ^2, в правую часть /5.6/ дают s-волны. Это предположение соответствует отсутствию резонансов в p-волне /и s-волнах/, достаточно широких, чтобы дать вклад в интеграл порядка λ^2 /порядка λ /. В этом предположении получаем после интегрирования

$$\beta = \frac{9\pi}{10} = 2{,}817 \qquad /5.27/$$

Можно теперь перейти к определению функции $\tilde{v}_1(x)$. Исходя из определения /5.4/, запишем в пределе малых λ

$$\tilde{v}_1(x) = -\frac{5}{3}\left\{\left[\frac{5}{9}(f_0(x) - f_2(x)) - \frac{x/2}{\beta - \delta x + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{v_1(y)\,dy}{\sqrt{y\left(\frac{1}{x} - y\right)}}}\right]^2 + \frac{25}{8}x\right\}^{-1} \qquad /5.28/$$

где

$$f_s(x) = \frac{A_s}{\gamma_s \lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \simeq a_s - \frac{2\gamma_s}{\pi}\left\{x J_0\left(\frac{1}{x}\right) + v_s(0) J_1(x)\right\} \qquad /5.29/$$

Уравнение /5.28/ **может быть** решено методом последовательных приближений. **Подставляя в правую** часть /5.28/ пробную функцию $\tilde{v}_1(y) \simeq \tilde{v}_1(0) = -1{,}478$ **получаем слева** первое приближение и т.д. Эта процедура быстро сходится к **кривой, которая** хорошо аппроксимируется параболой.

$$\tilde{v}_1(x) = \tilde{v}_1(0)\,(1 - x^2) \qquad /5.30/$$

Заметим, что при $x = 1$ это выражение удовлетворяет точному значению

$$\tilde{v}_1(1) = \lim_{\lambda \to 0} \lambda^2 v_1(1) = 0$$

Таким образом, получаем

$$\lambda^2 \,\mathrm{Re}\, D_1(x) = \beta - x\delta + \frac{2\tilde{v}_1(0)}{\pi}\left\{J_0(x) - J_2(x)\right\} \qquad /5.31/$$

В качестве проверки аппроксимации рассмотрим формулу /5.10/, записав ее в **виде**

$$\beta + \delta - 0{,}425\,\tilde{v}_1(0) = \frac{1}{r} \qquad /5.32/$$

Здесь использована первая формула /5.11/, а также

$$-\frac{2}{\pi} J_2(-1) = \tfrac{1}{2} - \frac{4}{3\pi} = 0{,}075$$

Вычисляя β **из** /5.32/ **получаем**

$$\beta = 2{,}81$$

что практически совпадает с /5.27/.

Проведем теперь сравнение с теорией возмущений, основанной на лагранжиане $4\pi\lambda_1(\vec{\phi}\vec{\phi})^2$. Во втором порядке по λ_1, при нормировке в точке $s=u=t=4/3$ получаем

$$A_0(\omega)=5\lambda_1+\frac{5\lambda_1^2}{\pi}\{6+22\sqrt{2}\,\mathrm{arcctg}\sqrt{2}-10\sqrt{x}\,Q_0(\sqrt{x})-\frac{12}{\sqrt{x}}Q_0(\frac{1}{\sqrt{x}})-6\frac{1-x}{x}Q_0^2(\frac{1}{\sqrt{x}})\}$$

$$A_1(\omega)=\frac{5\lambda_1^2}{\pi}\{1-\frac{1-x}{x}[1-\frac{2}{\sqrt{x}}Q_0(\frac{1}{\sqrt{x}})+\frac{1+x}{x}Q_0^2(\frac{1}{\sqrt{x}})\}$$

$$A_2(\omega)=2\lambda_1+\frac{2\lambda_1^2}{\pi}\{9+22\sqrt{2}\,\mathrm{arcctg}\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,Q_0(\sqrt{x})-\frac{18}{\sqrt{x}}Q_0(\frac{1}{\sqrt{x}})-9\frac{1-x}{x}Q_0^2(\frac{1}{\sqrt{x}})\}$$

Для сравнения этих выражений с решениями интегральных уравнений необходимо перейти к нормировке в одной и той же точке. Наиболее удобной является физический порог $\omega=1$ $(s=4,\ u=t=0)$ так как в этой точке высшие волны не дают вклада.

Полагая $A_0/1/=5\Lambda$ получаем на физическом пороге и на пороге первого неупругого процесса /см. табл. 3/

Т а б л и ц а 3.

	Интегр.ур.	Теория возм.	Ошибка в членах Λ^2
$A_0/1/$	5Λ	5Λ	-
$A_1/1/$	$\frac{10}{9\pi}\Lambda^2\nu$	$\frac{10}{9\pi}\Lambda^2\nu$	0
$A_2/1/$	$2\Lambda-3{,}82\Lambda^2$	$2\Lambda-3{,}75\Lambda^2$	2%
$A_0/7/$	$5\Lambda-23{,}1\Lambda^2$	$5\Lambda-24{,}04\Lambda^2$	4%
$A_1/7/$	$0{,}544\Lambda^2$	$0{,}521\Lambda^2$	5%
$A_2/7/$	$2\Lambda^2-9{,}70\Lambda^2$	$2\Lambda^2-10{,}26\Lambda^2$	5%

Таким образом наши интегральные уравнения, полученные не из представления Мандельстама, а из дисперсионных соотношений для рассеяния вперед, в области малых энергий дают погрешность в членах Λ^2 не превышающую 5%. Этот факт указывает на разумность приближений сделанных при выводе уравнений.

§ 6. Обсуждение результатов

Наиболее интересный результат §§ 3,4 состоит в наличии узкого резонанса в p-волне для решений со степенными асимптотиками /в/ и /с/ независимо от наличия полюсных членов двух рассмотренных типов. Аналогичное положение имеет место в нейтральной модели, где для получения резонанса следует либо взять степенную ветвь решения, либо ввести R -член, соответствующий нестабильной частице.

В нейтральной модели было отмечено, что степенная асимптотика может соответствовать лагранжиану с производными. Весьма любопытно, что такое же соответствие можно установить и в рассматриваемом заряженном случае. Асимптотике /а/ сопоставляется обычный перенормируемый лагранжиан

$$L_1 = 4\pi\lambda_1(\vec{\phi}\,\vec{\phi})^2 \qquad /6.1a/$$

Асимптотике /в/ соответствует лагранжиан с двумя производными

$$L_2 = \lambda_2\,[(\partial_\mu \vec{\phi})\,\vec{\phi}\,][(\partial_\mu \vec{\phi})\vec{\phi}\,] \qquad /6.1в/$$

Асимптотике /с/ соответствуют два лагранжиана с четырьмя производными

$$L_3 = \lambda_3\Big(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial x_\mu}\Big)\ ;\quad L_4 = \lambda_4\Big(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial x_\nu}\Big)\Big(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial x_\nu}\Big) \qquad /6.1c/$$

Все остальные четырехпионные лагранжианы эквиваленты выписанным в низших порядках теории возмущений. Интересно отметить, что при отсутствии $R_l(\omega)$ проведенный выше анализ приводит как раз к четырем независимым константам. Такими константами являются, например λ , c , f_0 и f_1 , введенные в § 2.

Важность решений типа /в/ и /с/ , соответствующих неперенормируемым взаимодействиям, связана с тем, что в этих решениях узкий p-резонанс возникает естественным образом. В этой связи заметим, что эквивалентное взаимодействие с производными в физике сильных взаимодействий при малых энергиях является вполне обычным. Примером является аномальный магнитный момент нуклона. Эффективные лагранжианы /6.1/ может дать, например, взаимодействие через нуклон-антинуклонную петлю [7]. Для получения узкого резонанса в p-волне достаточно довольно слабого неперенормируемого взаимодействия. Рассмотрим решение типа /в/, предполагая λ_1 и λ_2 малыми. Тогда из рассмотрения первых неисчезающих членов теории возмущений, можно показать, что положение резонанса в p-волне ω_r и его ширина Γ будут пропорциональны

$$\omega_r \simeq \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2}\ ; \quad \Gamma \simeq \lambda_1^2\, \omega_r \qquad /6.2/$$

Поэтому для того, чтобы узкий резонанс находился в области малых энергий нужно $\lambda_1 \approx \lambda_1^2 \ll 1$

В последнее время появился ряд указаний на существование узких резонансов в ряде реакций сильно взаимодействующих частиц, как например, в πK и $\pi\Lambda$ рассеянии [8]. Если предположить, что эффективные неперенормируемые взаимодействия являются существенными, то такие узкие резонансы оказываются весьма естественными.

Соответствие наших результатов с лагранжианами /6.1/ не удивительно, поскольку физические допущения обычного дисперсионного подхода, будучи достаточно общими, включают в себя возможность всех взаимодействий /6.1/, равно как и взаимодействий с промежуточными нестабильными мезонами.

Мы получили здесь еще одно подтверждение того, что дисперсионный подход вместе с условиями унитарности не приводит к однозначному динамическому описанию.

В настоящее время считается естественным связывать наличие узкого резонанса с существованием тяжелой нестабильной частицы. В нашем анализе этому соответствует введение R -члена. Однако, как мы видели, имеется вторая возможность получения узкого резонанса за счет эффективного неперенормируемого взаимодействия.

Мы не можем сейчас сделать выбор между этими двумя возможностями получения узких резонансов. Однако, выбор решения со степенной асимптотикой представляется нам более естественным, поскольку он не требует введения новых гипотетических частиц.

В заключение авторам хотелось бы поблагодарить Логунова А.А., Мещерякова В.А., Гинзбурга И.Ф. и Серебрякова В.В. за полезные обсуждения.

Литература

1. А.В. Ефремов, Чжу Хун-юань, Д.В. Ширков. ОИЯИ препринт D-697.
2. Сянь Дин-чан, Хе Цзо-сю, В. Целлнер. ЖЭТФ, 39, 1668 /1960/.
3. G.Chew, S.Mandelstam. Phys.Rev., 119, 467 (1960).
4. A.V.Efremov, V.A.Meshcheryakov, D.V.Shirkov, H.Y.Tzu. Nucl.Phys., 22, 202 (1961).
5. G.Chew, S.Mandelstam, H.Noyes. Phys.Rev., 119, 478 (1960).
6. Ю.А. Симонов, К.А. Тер-Мартиросян. ЖЭТФ, 39, 1442 /1960/.
7. K.Igi, K.Kawarabayashi. Progr.Theor.Phys., 20, 578 (1958).
8. M.Alson at all. Phys.Rev.Lett., 5, 520 (1960).

Работа поступила в издательский отдел
2 июня 1961 года.