ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Я.А. Смородинский

Д-738

ОБ АЛГЕБРЕ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ ГЕЛЛ-МАННА

Дубна 1961

Я.А. Смородинский

Д-738

ОБ АЛГЕБРЕ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ ГЕЛЛ-МАННА

А н н о т а ц и я

Рассмотрено простое обобщение спинорной алгебры, удобное для вычислений с трехмерной унитарной группой, использованной Гелл-Манном для систематики элементарных частиц.

Недавно Гелл-Манн рассмотрел схему, в которой элементарные частицы и, в частности, барионы реализуют представления унитарной группы в трехмерном пространстве.

Нетрудно, исходя из обычного двухмерного анализа, построить алгебру, отвечающую этим представлениям. Так как такого рода обобщения спинорной алгебры могут оказаться полезными, то в этой заметке кратко излагается алгебра 3-спиноров.

Рассмотрим произвольные унитарные матрицы третьего порядка $A^{-1}=A^{+}$ с определителем, равным единице. Пусть эти матрицы действуют на три величины a_α / α = 1,2,3/, которые образуют унитарный спинор в этом пространстве /3-спинор для краткости/.

Кроме матриц A, мы можем рассмотреть систему матриц комплексно сопряженных к A, с помощью которых преобразуется другой тип 3-спиноров /пунктирные 3-спиноры/ $b_{\dot\beta}$. В частности, эти матрицы преобразуют спинор комплексно-сопряженный к a_α.

В двухмерном пространстве матрицы преобразований

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^{*} & \alpha^{*} \end{pmatrix} \qquad |\alpha|^2+|\beta|^2=1 \qquad /1/$$

и им комплексно-сопряженные матрицы

$$B^{*} = \begin{pmatrix} \alpha^{*} & \beta^{*} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad /2/$$

эквиваленты друг другу, т.е. связаны друг с другом унитарным преобразованием

$$B^{*}=UBU^{+}; \quad U=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad /3/$$

Поэтому в двухмерном унитарном пространстве инвариантным относительно преобразований B является не только скалярное произведение

$$(b,a)=(b_1)^{*}a_1+(b_2)^{*}a_2,$$

но и для вещественных спиноров произведение:

$$-(Ub,a) = b_2 a_1 - b_1 a_2 . \qquad /4/$$

Это и определяет метрику для вещественных /нерелятивистских спиноров/.

В трехмерной унитарной группе A и A^* преобразования не эквивалентны, а потому возникают два типа индексов, подобно тому, как это происходит в группе Лоренца /матрицы 2x2, с определителем, равным единице/. Так как при преобразованиях A и A^* остается инвариантным скалярное произведение $b_{\dot 1} a_1 + b_{\dot 2} a_2 + b_{\dot 3} a_3$, то суммирование в алгебре 3-спиноров происходит по одному пунктирному, а другому непунктирному индексу.

Введем в этом пространстве "вектор" со шпуром равным 0:

$$N \equiv N_{\dot\alpha\beta} \; ; \quad Sp\, N = N_{\dot\alpha\alpha} = 0. \qquad /4/$$

Он имеет 8 компонент. Если условиться, что подпространство / α, β = 1,2/ образует изотопическое пространство, то связь N с барионами выбирается по Гелл-Манну так:

$$N_{\dot\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda^0\right), & \Sigma^-, & \Xi^- \\ \Sigma^+, & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda^0\right), & \Xi^0 \\ p, & n, & -\sqrt{2/3}\,\Lambda_0 \end{pmatrix}. \qquad /5/$$

Коэффициенты выбраны так, что /1/ $Sp\, N = 0$ и /2/ квадратичная форма N^+N сводилась бы к сумме квадратов модулей с коэффициентами, равными единице, т.е. чтобы массовый член в лагранжиане можно было бы записать в виде $m N^+ N$.

При составлении взаимодействия возникает вопрос о приведении произведения

$$N^+_{\dot\alpha\beta} \quad N_{\dot\gamma\delta} \qquad /6/$$

на неприводимые тензоры. Подобно тому, как в случае алгебры спиноров Дирака возникает пять неприводимых тензоров[x] SVTAP, так в алгебре 3-спиноров Гелл-Манн показывает, что существует 6 величин с числом компонент соответственно 1,8,8,10,10,27 /8x8 = 1+8+8+10+10+27/. Приведение удобно производить по следующей схеме:

1. Составим свертку по обоим парам индексов:

$$A = \overset{+}{N}_{\dot{\alpha}\beta} N_{\dot{\beta}\alpha} \qquad \text{/1 компонента/} \qquad /7/$$

2. Свернем по одной паре индексов и обратим в нуль шпур оставшихся

$$B_{\dot{\alpha}\delta} = \overset{+}{N}_{\dot{\alpha}\beta} N_{\dot{\beta}\gamma} - \tfrac{1}{3}\delta_{\dot{\alpha}\delta} A \qquad \text{/8 компонент/} \qquad /8/$$

3. Аналогично получаем эквивалентное представление

$$C_{\dot{\gamma}\beta} = \overset{+}{N}_{\dot{\alpha}\beta} N_{\dot{\gamma}\alpha} - \tfrac{1}{3}\delta_{\dot{\gamma}\beta} A \qquad \text{/8 компонент/} \qquad /9/$$

4. Симметризуем /6/ по пунктирным индексам, антисимметризуем по непунктирным и обращаем шпур в нуль:

$$D_{\ddot{\alpha}\gamma\beta\delta} = (N^{+}N)_{\{\ddot{\alpha}\gamma\}[\beta\delta]} - \tfrac{1}{3}\delta_{\dot{\alpha}\delta} C_{\dot{\gamma}\beta} \qquad /10/$$

/10 компонент/

5. То же самое, если поменять ролями индексы /представление, не эквивалентное предыдущему/.

$$E_{\ddot{\alpha}\gamma\beta\delta} = (N^{+}N)_{[\ddot{\alpha}\gamma]\{\beta\delta\}} - \tfrac{1}{3}\delta_{\dot{\alpha}\delta} C_{\dot{\gamma}\beta} \qquad /11/$$

/10 компонент/

6. Симметризуем по обеим парам индексов и обращаем шпур в нуль

$$F_{\ddot{\alpha}\gamma\beta\delta} = (\bar{N} N)_{\{\ddot{\alpha}\gamma\}\{\beta\delta\}} - \tfrac{1}{3}\delta_{\dot{\alpha}\delta} C_{\dot{\gamma}\beta} - \tfrac{1}{9}\delta_{\dot{\alpha}\delta}\delta_{\dot{\gamma}\beta} A \qquad /12/$$

/27 компонент/

Результат антисимметризации по обеим парам индексов дает опять скаляр, так как все компоненты уже исчерпаны. Представление /У1/, очевидно, эквивалентно своему сопряженному. Ясно, что этим свойством обладают все представления, у которых число индексов обоих типов одинаково. Для того, чтобы подсчи-

---

[x] Число компонент этих тензоров удовлетворяет равенству

$$4 \times 4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1.$$

тать число компонент, заметим, что если число индексов одного типа есть n, то число симметричных комбинаций n чисел $/\mu_1 \dots \mu_n/$, где μ_n принимает одно из значений 1,2,3, равно $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Поэтому полное число компонент у тензора, у которого шпуры не обращены в нуль, равно по известной теореме:

$$\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3. \qquad /13/$$

Правую часть можно интерпретировать как сумму числа компонент всех таких тензоров от 2-го ранга до ранга $2n$, у которых шпуры уже равны нулю. Поэтому число компонент у неприводимого тензора с n пунктирными и n непунктирными индексами равно n^3.

Существует второй способ записи тензоров. Для этого используем 8 эрмитовых матриц $\lambda^i_{\alpha\beta}$, введенных Гелл-Манном. Для удобства домножим их на $1/\sqrt{2}$ так, чтобы

$$\lambda^i_{\alpha\beta}\,\lambda^k_{\beta\alpha} = Sp\,\lambda^i\lambda^k = \delta^{ik}. \qquad /14/$$

Тогда определим 8-компонентный "вектор"

$$N^i = Sp\,\lambda^i N \qquad /15/$$

$$N_{\alpha\beta} = \lambda^i_{\alpha\beta}\,N^i. \qquad /16/$$

Построение неприводимых тензоров с помощью векторов N^i производится также просто. Так, скаляр есть просто $N^{i*}N^i$. Векторов можно построить два:

$$K^i = Sp\,(\lambda^i\lambda^k\lambda^e)(N^{i*}N^k + N^{k*}N^i) \qquad /17/$$

$$L^i = Sp\,(\lambda^i\lambda^k\lambda^e)(N^{i*}N^k - N^{k*}N^i). \qquad /18/$$

Увеличивая число матриц λ до 4-х /подобно тому, как это делается в теории Дирака/, можно построить и другие представления.

Работа поступила в издательский отдел
5 мая 1961 года.