ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Б.В. Медведев, М.К. Поливанов

Д-694

СТЕПЕНИ РОСТА МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В АКСИОМАТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ

ЖЭТФ, 1961, т41, в4, с1130-1141

Дубна 1961 год

Б.В.Медведев[x], М.К.Поливанов[x]

Д-694

СТЕПЕНИ РОСТА МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В АКСИОМАТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ

Направлено в ЖЭТФ

[x] Математический институт им. В.А.Стеклова АН СССР.

Устанавливается, что в рамках "аксиоматического" метода построения матрицы рассеяния, дополненного требованием "перенормируемости" теории, возникают весьма сильные ограничения на возможные степени роста матричных элементов.

1. Введение

В последние пять лет уделяется большое внимание исследованию общей структуры локальной теории квантовых полей[1-4]. Центральный вопрос этих исследований состоит в том, насколько определяют теорию одни только общие требования – релятивистской инвариантности, унитарности и полноты системы состояний с положительной энергией, локальности – без конкретных динамических предположений, которые делаются, когда теория строится на основе гамильтонова метода.

Формулировать систему основных физических положений можно различными способами. Нам кажется удобным исходить из матрицы рассеяния S, как это было впервые предложено Гайзенбергом[5], и формулировать эти физические положения, как требования, налагаемые на ее матричные элементы. Помимо S-матрицы в теории обязательно должны быть введены какие-либо локальные операторы, поскольку без этого нельзя различать отдельные точки пространства-времени и сформулировать требование причинности. Это можно сделать (ср.[4]), записывая S-матрицу в форме разложения по нормальным произведениям асимптотических полей

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \; \Phi^n(x_1, \dots x^n) : \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) : \tag{1}$$

и затем расширяя ее за пределы энергетической поверхности, то есть снимая условие

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 0 . \tag{2}$$

Тогда с помощью вариационного дифференцирования по полям $\varphi(x)$ можно строить гайзенберговы локальные операторы.

Система основных положений такого рода была сформулирована Боголюбовым[6] для теории с адиабатическим включением и выключением взаимодействия и, как было показано Боголюбовым и Ширковым[7], привела в рамках теории возмущений к тем же результатам, что и обычные лагранжев формализм и теория перенормировок. В дальнейшем эта система положений была переформулирована и уточнена в работе Боголюбова и авторов[4 x)] специально для вывода дисперсионных соотношений и спектральных представлений Челлена-Лемана. Такой путь построения квантовой теории поля, основанный на системе фундаментальных положений из ВТДС,

x) В дальнейшем цитируется как ВТДС.

§ 2, и опирающийся на методы теории дисперсионных соотношений, мы будем называть дисперсионным подходом. Значение дисперсионного подхода к квантовой теории поля не исчерпывается теми ограниченными точными результатами, которые удается получить с его помощью, но определяет новый метод построения всей теории.

В частности, если попытаться удовлетворить основным условиям дисперсионного подхода формальными рядами по степеням малого параметра, то можно будет, как всегда в теории возмущений, последовательно находить один член разложения за другим. Преимущество перед обычной теорией будет состоять в том, что теперь не понадобится прибегать к физически неудовлетворительной процедуре адиабатического включения и выключения взаимодействия и можно будет работать только с перенормированными величинами, избегая бессмысленного в современной теории вопроса о связи "перенормированных" и "неперенормированных" характеристик. Как было недавно показано[8], последовательные члены разложения определяются при этом с точностью до конечного числа констант, имеющих значение конечных контрчленов[x)] обычного гамильтонова метода.

Число таких констант определяется степенями роста матричных элементов. Эти степени роста известным образом определяются, если задан лагранжиан взаимодействия. Для дисперсионного подхода неоднократно высказывалась мысль[1,4], что задание степеней роста в какой-то мере служит вместо задания лагранжиана. В то же время было очевидно[1,8], что совсем произвольно задавать степени роста нельзя.

Настоящая работа посвящена выяснению меры произвола, с которым можно задавать степени роста различных матричных элементов. При этом несколько неожиданно выяснится, что этот произвол очень узок и для важнейшего класса "собственно перенормируемых" теорий степени роста не приходится задавать в виде отдельного постулата, но они почти однозначно определяются системой основных положений ВТДС и трансформационными свойствами полей.

---

x) Отметим, кстати, что в дисперсионном подходе – и это еще одно его преимущество – особенно проясняется источник "контрчленов" и причина появления расходимостей в обычной теории при незаконном умножении θ-функций на функции, недостаточно регулярные – в импульсном представлении такая операция сводится к (ср. дискуссию в ВТДС §§ 1 и 4) применению интегральной формулы Коши к функции, не убывающей на бесконечности, без учета интеграла по большому кругу.

Исследование, проведенное нами для простейшего случая самодействующего поля спина 0, удается выполнить без явного обращения к теории возмущений.

2. Уравнения для матричных элементов

Из сформулированной в ВТДС системы основных физических положений можно многообразными способами получать[9] системы уравнений, связывающих между собой обобщенные вершины с различным числом концов, то есть матричные элементы, отвечающие разным числам частиц в начальном и конечном состояниях. Поскольку при получении таких систем используется условие причинности, то, как уже говорилось, приходится рассматривать, помимо S -матрицы, еще какие-либо локальные гайзенберговы операторы. Как минимум при этом необходимо ввести два таких оператора, имеющих смысл первой и второй вариационных производных матрицы рассеяния или, точнее," радиационных операторов" (см. ВТДС) первого и второго порядка. Тогда мы можем формулировать теорию так, чтобы все остальные "концы", кроме одного или двух, соответственно, были бы реальными, лежащими на энергетической поверхности[x)].

Итак, будем рассматривать матричные элементы между состояниями на поверхности энергии

$$\mathfrak{J}(p_1 \cdots p_\ell ; q_1 \cdots q_s) = \langle \underline{p}_1 \cdots \underline{p}_\ell | \mathfrak{J} | \underline{q}_1 \cdots \underline{q}_s \rangle \tag{3}$$

и

$$\mathfrak{J}(x | p_1 \cdots p_\ell ; q_1 \cdots q_s) = \langle \underline{p}_1 \cdots \underline{p}_\ell | \mathfrak{J}(x) | \underline{q}_1 \cdots \underline{q}_s \rangle \tag{4}$$

двух эрмитовых операторов $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}(x)$. Оператор $\mathfrak{J}$ - это просто гайзенбергов оператор тока, взятый, чтобы исключить тривиальную зависимость от x, в начале координат:

$$\mathfrak{J} = j(0) , \qquad j(x) = i \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} S^+ . \tag{5}$$

В силу трансляционной инвариантности его матричные элементы связаны с матричными элементами $j\,(x| \cdots p \cdots ; \cdots q \cdots)$ оператора $j(x)$ формулой:

---

x) Авторы благодарны Н.Н. Боголюбову, обратившему их внимание на удобство такого рассмотрения.

$$j(p_1,\dots,p_l;q_1\dots q_s)=j(x|p_1,\dots,p_l;q_1\dots q_s)\,e^{-i(\sum p_i-\sum q_j)x}. \tag{6}$$

Второй оператор, $\mathfrak{J}(x)$, это запаздывающий радиационный оператор, в котором опять удалена тривиальная зависимость от координат :

$$\mathfrak{J}(x)=-\frac{\delta j(-x/2)}{\delta\varphi(x/2)}\,;\qquad \mathfrak{J}^+(x)=\mathfrak{J}(x). \tag{7}$$

Его матричные элементы (4) совпадают с введенными в ВТДС функциями $F^{ret}_{\omega\omega'}$. Заметим, что фактически матричные элементы (3) содержат один не лежащий на поверхности энергии импульс

$$\varphi=\sum p_i-\sum q_j\neq 0, \tag{8}$$

а матричные элементы (4) – два таких импульса: (8) и импульс, соответствующий явно входящей координате x.

Легко видеть, что матричные элементы (3) и (4) связаны, независимо от условия причинности, соотношениями[x)]

$$\mathfrak{J}(p,p_1\dots p_l;q_1\dots q_s)=P\left(\frac{q_1}{q_2\dots q_s}\right)\delta(\underline{p}-\underline{q}_1)\,\mathfrak{J}(p_1\dots p_l;q_2,\dots q_s)-$$
$$-(2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-1/2}\int dx\,\mathfrak{J}(x|p_1,\dots,p_l;q_1\dots q_s)\,e^{i(p+\frac{\sum p_i-\sum q_i}{2})x} \tag{9.1}$$

$$\mathfrak{J}(p_1\dots p_l;q,q_1\dots q_s)=P\left(\frac{p_1}{p_2\dots p_s}\right)\delta(\underline{p}_1-\underline{q})\,\mathfrak{J}(p_2,\dots p_l;q_1\dots q_s)-$$
$$-(2\pi)^{-3/2}(2q^0)^{-1/2}\int dx\,\mathfrak{J}(x|p_1\dots p_l;q_1\dots q_s)\,e^{i(-q+\frac{\sum p_i-\sum q_j}{2})x} \tag{9.2}$$

и

$$\mathfrak{J}(x)-\mathfrak{J}(-x)=i\left\{j\left(\tfrac{x}{2}\right)j\left(-\tfrac{x}{2}\right)-j\left(-\tfrac{x}{2}\right)j\left(\tfrac{x}{2}\right)\right\}, \tag{10}$$

а условие причинности налагает на оператор $\mathfrak{J}(x)$ дополнительное ограничение

$$\mathfrak{J}(x)=0\quad\text{для}\quad x\lesssim 0. \tag{11}$$

---

x) Оператор $P\left(\frac{p_1}{p_1\dots p_s}\right)$ в формулах (9) это оператор симметризации по соответствующим аргументам, определенный в [7] § 18.

Итак, мы получили систему уравнений (9–11) для нахождения матричных элементов операторов $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}(x)$. Можно думать, что эта система достаточна для определения этих операторов, во всяком случае можно показать, аналогично тому как это сделано в [8], что в рамках теории возмущений это действительно так.

Чтобы исключить из полученной системы оператор $\mathfrak{J}(x)$, перепишем, прежде всего, уравнение (10) в матричных элементах.

$$\mathfrak{J}(x|p_1\dots p_\ell;q_1\dots q_s) - \mathfrak{J}(-x|p_1\dots p_\ell;q_1\dots q_s) = i\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\int dk_1\dots dk_\nu\,\mathfrak{J}(p_1\dots p_\ell k_1\dots k_\nu)\,\mathfrak{J}(k_1\dots k_\nu;q_1\dots q_s)\left[e^{i\left(\frac{\sum p_i+\sum q_i}{2}-\sum k_\nu\right)x}-e^{-i\left(\frac{\sum p_i+\sum q_i}{2}-\sum k_\nu\right)x}\right] \tag{12}$$

Теперь надо еще учесть наложенное на $\mathfrak{J}(x)$ условие причинности (11), в силу которого $\mathfrak{J}(-x|\dots p\dots;\dots q\dots)$ обращается в нуль при $x^0<0$. Формально это можно сделать, просто домножая (12) на $\theta(x^0)$:

$$\mathfrak{J}(x|p_1\dots p_\ell;q_1\dots q_s) = i\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\int dk_1\dots dk_\nu\,\mathfrak{J}(p_1\dots p_\ell k_1\dots k_\nu)\,\mathfrak{J}(k_1\dots k_\nu;q_1\dots q_s)\,\theta(x^0)\left[e^{i\left(\frac{\sum p_i+\sum q_i}{2}-\sum k_\nu\right)x}-e^{-i\left(\frac{\sum p_i+\sum q_i}{2}-\sum k_\nu\right)x}\right] \tag{13}$$

Естественно, что такая операция может, как известно, при недостаточно быстром убывании подинтегральных функций, оказаться лишенной точного смысла и привести, при ее непосредственном выполнении, к появлению расходимостей. В таких случаях надо, конечно, выполнить предварительно, как то известно из теории дисперсионных соотношений, вычитание под интегралом, следствием которого явится добавление, в импульсном представлении, к правой части (13) некоторого полинома. Именно в таком смысле мы будем понимать формулу (13) и следующие, не выписывая этого полинома въявь.

С учетом этих оговорок можно подставить (13) в уравнения (9) (напр., первые). Мы придем тогда к бесконечной системе зацепляющихся уравнений

$$\mathfrak{J}(p,p_1\dots p_l;q_1\dots q_s) = \varphi\left(\frac{q_1}{q_1\dots q_s}\right)\delta(\underline{p}-\underline{q}_1)\,\mathfrak{J}(p_1,\dots,p_l;q_1\dots q_s) -$$
$$-\frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2p^0}}\sum_\nu^\infty\frac{1}{\nu!}\int d\underline{k}_1\dots d\underline{k}_\nu\,\mathfrak{J}(p_1\dots p_l;k_1\dots k_\nu)\,\mathfrak{J}(k_1\dots k_\nu;q_1\dots q_s)\left\{\frac{\delta(\underline{p}+\Sigma \underline{p}_i-\Sigma\underline{k}_\nu)}{\Sigma k^0_\nu-\Sigma p^0_i-p^0-i\epsilon}-\frac{\delta(\underline{p}-\Sigma\underline{q}_j+\Sigma\underline{k}_\nu)}{-\Sigma k^0_\nu+\Sigma q^0_j-p^0-i\epsilon}\right\} \qquad (14)$$

и аналогичной системе, получающейся из (9.2), призванных служить для определения матричных элементов оператора $\mathfrak{J}$.

Нам удобнее будет действовать не прямо с матричными элементами оператора $\mathfrak{J}$, а с релятивистски инвариантными элементами

$$I(p_1,\dots p_l;q_1\dots q_s) = \sqrt{2p_1^0\dots 2p_l^0\,2q_1^0\dots 2q_s^0}\;\mathfrak{J}(p_1,\dots,p_l;q_1\dots q_s), \qquad (15)$$

которые нормированы общепринятым способом (для установления связей с обычными результатами напомним, что у нас, поскольку трансляционная инвариантность уже использована, число явно выписанных аргументов матричного элемента на 1 меньше числа концов соответствующего обобщенного графа). Для матричных элементов $I(\dots p\dots;\dots q\dots)$ основная система перепишется в форме:

$$I(p,p_1,\dots p_l;q_1,\dots q_s) = \varphi\left(\frac{q_1}{q_2\dots q_s}\right)\sqrt{2p^0 2q_1^0}\;\delta(\underline{p}-\underline{q}_1)\,I(p_1\dots p_l;q_2,\dots q_s) -$$
$$-(2\pi)^{3/2}\sum_{\nu=0}^\infty\frac{1}{\nu!}\int\frac{d\underline{k}_1\dots d\underline{k}_\nu}{2k_1^0\dots 2k_\nu^0}\,I(p_1\dots p_l;k_1\dots k_\nu)\,I(k_1\dots k_\nu;q_1\dots q_s)\left\{\frac{\delta(\underline{p}+\Sigma\underline{p}_i-\Sigma\underline{k}_\nu)}{\Sigma k^0_\nu-\Sigma p^0_i-p^0-i\epsilon}-\frac{\delta(\underline{p}-\Sigma\underline{q}_j+\Sigma\underline{k}_\nu)}{-\Sigma k^0_\nu+\Sigma q^0_j-p^0-i\epsilon}\right\} \qquad (16.1)$$

Нижний предел суммирования по ν устанавливается здесь из следующих соображений. Прежде всего, в ток $\mathfrak{J}$ дают, как легко показать, вклад только связные диаграммы; поэтому суммирование по ν не может включить значения $\nu=0$. Далее следует вспомнить об условиях стабильности вакуума и одночастичных состояний ВТДС $\underline{I}$,(6), в силу которых надо будет положить

$$I(-|-) = I(p|-) = I(-|q) = 0. \qquad (17)$$

Поэтому, если хотя бы одно из чисел l или s равно нулю, то суммирование по ν начинается с двух.

Совершенно аналогично из (9.2) получается вторая половина системы уравнений:

$$I(p_1\dots p_l;q,q_1\dots q_s) = \varphi\left(\frac{p_1}{p_2\dots p_s}\right)\delta(\underline{p}_1-\underline{q})\sqrt{2p_1^0 2q^0}\, I(p_2,\dots p_l;q_1\dots q_s)$$

$$-(2\pi)^{3/2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\int\frac{dk_1\dots dk_\nu}{2k_1^0\dots 2k_\nu^0}\, I(p_1\dots p_l;k_1\dots k_\nu)\, I(k_1\dots k_\nu;q_1\dots q_s)\left\{\frac{\delta(-\underline{q}+\sum\underline{p}_i-\sum\underline{k}_\nu)}{\sum k_\nu^0-\sum p_i^0+q^0-i\epsilon}-\frac{\delta(-\underline{q}-\sum\underline{q}_i+\sum\underline{k}_\nu)}{-\sum k_\nu^0+\sum q_j^0+q^0-i\epsilon}\right\}. \qquad (16.2)$$

Напомним еще раз, что в правых частях уравнений (16) не следует забывать о не выписанных явно полиномах, о которых шла речь в связи с формулой /13/.

Матричные элементы с двумя концами, лежащими на поверхности энергии, не участвуют, согласно (17), в нашей системе (16). Поэтому, чтобы включить в рассмотрение собственно энергетические части, потребуется выйти за поверхность энергии. Это удобно сделать, определив четырехмерные Фурье-образы матричных элементов (4) формулой

$$\tilde{I}(k|p_1\dots p_l;q_1\dots q_s) = \frac{1}{\sqrt{2p_1^0\dots 2p_l^0\, 2q_1^0\dots 2q_s^0}}\int e^{ikx}\, \mathcal{J}(x|p_1\dots p_l;q_1\dots q_s)\,dx\,. \qquad (18)$$

Согласно (12), мы получим для этих Фурье-образов выражения

$$\tilde{I}(k|p_1\dots p_l;q_1\dots q_s) = (2\pi)^3\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\int\frac{dk_1\dots dk_\nu}{2k_1^0\dots 2k_\nu^0}\, I(p_1\dots p_l;k_1\dots k_\nu)\, I(k_1\dots k_\nu;q_1\dots q_s)\ \times$$

$$\times\left\{\frac{\delta\left(\underline{k}+\frac{\sum\underline{p}_i+\sum\underline{q}_i}{2}-\sum\underline{k}_\nu\right)}{-k^0-\frac{\sum p_i^0+\sum q_i^0}{2}+\sum k_\nu^0-i\epsilon}-\frac{\delta\left(\underline{k}-\frac{\sum\underline{p}_i+\sum\underline{q}_i}{2}+\sum\underline{k}_\nu\right)}{-k^0+\frac{\sum p_i^0+\sum q_i^0}{2}-\sum k_\nu^0-i\epsilon}\right\}, \qquad (19)$$

которые, в частности, позволят найти собственно-энергетические части, если остальные матричные элементы на поверхности энергии известны. Можно сказать, что (19) – это формулы для "выхода с поверхности энергии", поскольку вектор k в них не связан условием $k^2=m^2$. Можно написать и обратные соотношения:

$$I(p,p_1\dots p_l;q_1\dots q_s) = P\left(\frac{q_1}{q_2\dots q_s}\right)\sqrt{2p^0 2q_1^0}\, I(p_1\dots p_l;q_2\dots q_s)\ -$$

$$-(2\pi)^{-3/2}\,\tilde{I}\left(p+\frac{\sum p_i-\sum q_i}{2},\ p_1\dots p_l;q_1\dots q_s\right) \qquad (20)$$

при условии $p^2=m^2$

Не касаясь вопроса о путях решения системы (16) [x)], являющейся в сущности релятивистским аналогом уравнений Лоу, мы воспользуемся ею для оценки возможных степеней роста матричных элементов оператора $\mathfrak{J}$.

3. Степени роста матричных элементов

Зависимость матричных элементов от многочисленных импульсов может быть весьма сложной и мы не претендуем на то, чтобы вскрыть ее в деталях. Мы ставим перед собой более простую задачу. Именно, в аналогии с тем, как поступают в теории возмущений (ср., напр., [7], § 26), когда хотят оценить степень роста какой-либо диаграммы, мы будем интересоваться только суммарной степенью роста при равномерной растяжке всех импульсов.

Потребуем, чтобы для каждого матричного элемента с ℓ и s импульсами каждого сорта существовал конечный индекс роста – минимальное целое число $\omega(\ell, s)$, такое, что при растяжке всех импульсов

$$p_1 = \xi_1 \varphi; \ldots \quad p_\ell = \xi_\ell \varphi; \quad q_1 = \eta_1 \varphi, \ldots \quad q_s = \eta_s \varphi, \quad \varphi \to \infty \tag{21}$$

матричный элемент $I(p_1, \ldots, p_\ell; q_1 \ldots q_s)$ растет медленнее, чем $\varphi^{\omega(\ell,s)+\alpha}$ для любого $\alpha > 0$. Теории, в которых выполняется такое условие, мы будем называть перенормируемыми [xx)]. В дальнейшем мы будем рассматривать только перенормируемые теории. Мы хотим теперь посмотреть не накладывают ли уравнения (16) каких-либо ограничений на возможный выбор чисел $\omega(\ell, s)$.

[x)] На пути решения систем такого типа лежат трудности двоякого рода. Такие системы выражают низшие матричные элементы (то есть матричные элементы с меньшим числом аргументов) через высшие; поэтому как подойти к точному решению такой системы – вообще неясно. Если же иметь в виду какое-либо приближение, то мы столкнемся с переопределенностью системы (16) – из условия причинности[9] следует не только эта система, но и громадное разнообразие других бесконечных систем близкого характера. Найди мы точное решение системы (16), оно удовлетворило бы автоматически и другим возможным системам уравнений. Но приближение, хорошее для одной системы, может оказаться для другой очень плохим.

[xx)] Такое определение перенормируемых теорий несколько шире обычного, когда требуют еще и конечности числа матричных элементов с неотрицательными индексами роста. Однако наши дальнейшие рассуждения будут говорить в пользу того, что разность определяемых этими двумя способами классов теорий – пуста.

Правая часть уравнения (16) состоит, кроме не представляющего интереса вклада от несвязных диаграмм, из суммы (бесконечного числа) нелинейных членов единообразного строения:

$$\int \frac{d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_\nu}{2k_1^0 \dots 2k_\nu^0} I(p_1, \dots p_\ell; k_1 \dots k_\nu) I(k_1, \dots k_\nu; q_1 \dots q_s) \left\{ \frac{\delta(\vec{p} + \sum \vec{p}_i - \sum \vec{k}_\nu)}{\sum k_\nu^0 - \sum p_i^0 - p^0 - i\epsilon} - \frac{\delta(\vec{p} - \sum \vec{q}_j + \sum \vec{k}_\nu)}{-\sum k_\nu^0 + \sum q_j^0 - p_0 - i\epsilon} \right\}$$

Каждый из них содержит 3ν интегрирований по компонентам импульсов k, ν множителей k^0 в знаменателе и трехмерную δ –функцию, деленную на одномерный энергетический знаменатель. Кроме того, под знаком интеграла стоит произведение матричных элементов I с номерами ℓ, ν и ν, s, точная зависимость которых от импульсов нам, очевидно, неизвестна. Поэтому, конечно, мы не можем найти и зависимость от импульсов для всего интеграла. Если, однако, мы сделаем то естественное предположение, что в интегрировании по $\vec{k}_1, \dots \vec{k}_\nu$ основную роль играет область больших значений импульсов, то нам достаточно будет знать асимптотическое поведение стоящих под интегралом матричных элементов при росте всех импульсов, определяемое индексом роста $\omega(\ell, \nu)$ или $\omega(\nu, s)$. Но тогда определение поведения интеграла при росте всех импульсов сведется, совершенно так же, как то делают в теории возмущений, к подсчету степеней импульсов. В силу сказанного, такой подсчет даст нам

$$3\nu - \nu - 3 - 1 + \omega(\ell,\nu) + \omega(\nu,s) = \omega(\ell,\nu) + \omega(\nu,s) + 2\nu - 4. \tag{22}$$

Чтобы оценить теперь степень роста всей правой части, заметим, что было бы совершенно неестественным, если бы старшие степени импульсов из различных членов в сумме по ν в правой части (16) скомпенсировались без какой-либо физической причины. К компенсации могло бы, конечно, привести только наличие какой-то группы, как, например, в случае известной компенсации старших степеней в электродинамике за счет группы градиентных преобразований.

Поэтому, если теория не допускает никакой группы, что мы будем ради простоты предполагать ниже[x)], то из уравнений (16) будет следовать, что индекс

[x)] Случай, когда такая группа имеется, требует особого исследования.

роста матричного элемента в левой части будет во всяком случае не ниже найденных степеней роста (22) каждого члена правой части. Мы придем таким образом к двум системам неравенств

$$\omega(\ell+1,s) \geqslant \omega(\ell,\nu) + \omega(\nu,s) + 2\nu - 4 \qquad (23.1)$$

$$\omega(\ell,s+1) \geqslant \omega(\ell,\nu) + \omega(\nu,s) + 2\nu - 4\,, \qquad (23.2)$$

которые должны выполняться для всех ℓ , s и ν , удовлетворяющих

$$\nu \geq 1, \quad \ell+s \geqslant 1, \quad \nu+\ell \geqslant 2, \quad \nu+s \geqslant 2. \qquad (24)$$

Совершенно аналогичным образом из (19) получается оценка для степеней роста матричных элементов $\tilde{I}$ вне поверхности энергии:

$$\tilde{\omega}(\ell,s) \geqslant \omega(\ell,\nu) + \omega(\nu,s) + 2\nu - 4\,. \qquad (25)$$

Легко сообразить, что степени роста должны зависеть не от чисел ℓ и s по отдельности, а только от их суммы (общего числа концов диаграммы), то есть, что

$$\omega(\ell,s) = \Omega(\ell+s)\,. \qquad (26)$$

Обе системы (23) объединятся тогда в одну

$$\Omega(\ell+s+1) \geqslant \Omega(\ell+\nu) + \Omega(s+\nu) + 2\nu - 4 \qquad (27)$$

при тех же условиях (24) на числа ℓ , s и ν . Легко заметить, что система (27) допускает при замене всех неравенств на равенства частное решение

$$\Omega_0(n) = 3 - n\,. \qquad (28)$$

Поэтому общее решение удобно искать в виде суммы этого частного решения и некоторой добавки $N(n)$:

$$\Omega(n) = \Omega_0(n) + N(n) = 3 - n + N(n)\,. \qquad (29)$$

После такой подстановки основная система примет вид:

$$N(\ell+s+1) \geqslant N(\ell+\nu) + N(s+\nu)\,. \qquad (30)$$

Рассуждения, которые привели нас к системе (30), нельзя еще, конечно, рассматривать как доказательство в строгом математическом смысле. Математик назвал бы их скорее эвристическими соображениями и добавил бы, что он может придумать противоречащие примеры. Не пытаясь построить здесь такое строгое доказательство, приведем еще следуюшее соображение. Матричные элементы под интегралами в правых частях (16) также содержат в себе в качестве слагаемых контрчлены. Поскольку эти контрчлены зависят от импульсов полиномиально, то все подинтегральное выражение оказывается явно заданным, и интеграл, в своей контрчленной части, поддается исчерпывающему исследованию элементарными средствами. В таком исследовании, впрочем, нет и нужды, поскольку фактически эта самая задача была подробно разобрана в теории R -операции, см.[7] § 26.

Перейдем к исследованию системы неравенств (30). Установим прежде всего, что все $N(n)$ неположительны. Для этого для нечетных n достаточно положить в (30) $\nu = s+1 \geq 2$, ℓ - любое. Тогда левая часть уничтожится с первым членом справа, и мы получим, что

$$0 \geq N(2s+1) \qquad \text{для} \qquad s \geq 1. \tag{32}$$

Чтобы установить то же для четных n, выберем $s = \ell \geq 1$, $\nu \geq 1$, что опять разрешено условиями (24). Приходим при этом к

$$2N(\ell+\nu) \leq N(2\ell+1) \leq 0, \tag{32}$$

где для последнего неравенства использовано (31). Итак

$$\Omega(n) \leq \Omega_0(n) = 3-n \qquad \text{для всех} \qquad n \geq 2. \tag{33}$$

Таким образом мы убеждаемся, что найденное частное решение (28) дает нам наибольшие возможные индексы роста матричных элементов $I\,(p_1,\dots p_\ell;\, q_1 \dots q_s)$. В частности, отсюда уже следует, что матричных элементов с положительными индексами роста может быть не более конечного числа и что, следовательно, наше определение перенормируемых теорий оказывается совпадающим с обычным.

Покажем теперь, что возможные индексы роста ограничены не только сверху, но и снизу. Для этого, обозначая аргумент в левой части (30) одной буквой n, положим $\nu = 1$ - наименьшему возможному значению. Тогда

$$N(n) \geq N(n-s) + N(s+1), \qquad (34)$$

где n и s ограничены, согласно (24), условиями

$$n \geq s+2, \qquad s \geq 1. \qquad (35)$$

К первому члену в правой части (34) можно вновь применить ту же формулу (с новыми значениями n). Продолжая этот процесс k раз, получим для $N(n)$ ограничение снизу:

$$N(n) \geq N(n-ks) + kN(s+1). \qquad (36)$$

При этом, в силу (35), при выборе k мы должны удовлетворить условию

$$k \leq \frac{n-2}{s}. \qquad (37)$$

Выбирая в (36) $s = 1$ и k равным наибольшему возможному значению $k = n-2$, получим, что для всех $n \geq 2$ должно быть

$$N(n) \geq N(2) + (n-2)N(2) = (n-1)N(2). \qquad (38)$$

Полученная оценка (38) не завышена, в том смысле, что устанавливаемая ею нижняя грань возможных значений $N(n)$ действительно может быть достигнута. В самом деле, если подставить в основную систему (30) для всех $N(n)$ наименьшие разрешаемые (38) значения, то эта система сведется к условию $\nu \geq 1$, которое выполняется согласно (24).

Полученными выше условиями (32) и (38) ограничения на возможные $N(n)$ не исчерпываются. Именно, если $N(n)$ для какого-либо $n = n_0 > 2$ превышает минимальное значение (38), то это приведет к возникновению дальнейших ограничений на $N(n)$ с $n > n_0$, которые можно вывести из (36), придавая в нем s значения, большие единицы. Мы не будем выводить здесь этих условий.

Наконец, для индекса роста диаграммы с двумя концами вне поверхности энергии соотношения (25) дадут нам ограничение снизу:

$$\tilde{N}(1) = \tilde{\Omega}(1) - 2 = \tilde{\omega}(1|-;-) - 2 \geq 2N(\nu) \qquad (38a)$$

Ограничений сверху в данном случае нет.

4. Собственно перенормируемые теории

В предыдущем параграфе мы в предположении перенормируемости извлекли из основных уравнений теории (16) только систему неравенств (23). Мы воспользовались для этого тем, что индекс роста левой части (16) не может превышать индекса роста каждого из членов правой, т.е. он больше или равен максимальному индексу роста членов правой части. Хотелось бы усилить это условие и заменить в нем неравенство равенством. Поскольку, однако, как мы уже не раз подчеркивали, в правой части (16) кроме явно выписанных интегралов подразумеваются еще и не выписанные явно контрчлены, то такое усиление условий требует дополнительного предположения.

Будем называть теорию собственно-перенормируемой, если в ней степени добавляемых к Т-произведениям полиномов не превосходят индексов роста соответствующих Т-произведений. Предположим теперь, что мы имеем дело с собственно перенормируемой теорией. Тогда условия (23) действительно можно будет переписать в более сильной форме:

$$\begin{aligned} \omega(\ell+1, s) &= \underset{\nu}{\mathrm{Max}} \left\{ \omega(\ell,\nu) + \omega(\nu,s) + 2\nu - 4 \right\} \\ \omega(\ell, s+1) &= \underset{\nu}{\mathrm{Max}} \left\{ \omega(\ell,\nu) + \omega(\nu,s) + 2\nu - 4 \right\}. \end{aligned} \tag{39}$$

Для величин $N(n)$ усиленными условиями будут

$$N(\ell+s+1) = \underset{\nu}{\mathrm{Max}} \left\{ N(\ell+\nu) + N(s+\nu) \right\}, \tag{40}$$

где Max берется по всем значениям аргументов, разрешаемых условиями (24).

Попробуем решить эту систему.

Запишем ее в форме

$$N(n_1) = \mathrm{Max} \left\{ N(n_2) + N(n_3) \right\}, \tag{41}$$

где теперь Max ищется по всем значениям n_2 и n_3, удовлетворяющим системе условий

$$n_2 + n_3 = n_1 - 1 + 2\nu; \quad n_2 > \nu \geqslant 1, \quad n_3 > \nu \geqslant 1. \tag{42}$$

Для решения системы (41) запишем совокупности пар $N(n)$, по которым берется максимум в правой части (41), в виде двух таблиц (табл. 1 и 2) (отдельно для четных и для нечетных) с двумя входами, в которых строки нумеруются суммами n_2 и n_3, а столбцы – их разностями. Суммы в клетках таблицы представляют собой все возможные разбиения $n_1 - \ell + 2\nu$ в сумму n_2 и n_3, удовлетворяющих (42); ясно, что одновременно они изображают суммы, стоящие под знаком максимума в (41). Если какая-либо из этих комбинаций n_2 и n_3 удовлетворяет неравенствам (42), то ясно, что тем же неравенствам будут удовлетворять, при фиксированном n_1, и все комбинации, расположенные ниже в том же столбце, так как смещение вниз по столбцу отвечает просто увеличению ν. Придавая ν наименьшее возможное значение 1, убеждаемся, что согласно первому равенству (42) в область, по которой ищется максимум в (41) для некоторого n_1, будут входить лишь строки с $n_2 + n_3 \geq n_1 + 1$. Что же касается числа входящих в эту область столбцов, то оно определяется из следующего из (42) условия $(n_2 - n_3) \leq (n_2 + n_3) - 4$. Получающиеся области отмечены на таблицах 1 и 2 и обозначены заключенными в кружки значениями n_1.

Таблица 1

	2						
5	3+2	4					
7	4+3;	5+2	6				
9	5+4;	6+3;	7+2	8			
11	6+5;	7+4;	8+3;	9+2	10		
13	7+6;	8+5;	9+4;	10+3;	11+2	12	
15	8+7;	9+6;	10+5;	11+4;	12+3;	13+2	
17	9+8;	10+7;	11+6;	12+5;	13+4;	14+3;	15+2

....

Таблица 2

4	2+2	3				
6	3+3;	4+2	5			
8	4+4;	5+3;	6+2	7		
10	5+5;	6+4;	7+3;	8+2	9	
12	6+6;	7+5;	8+4;	9+3;,	10+2	11
14	7+7;	8+6;	9+5;	10+4;	11+3;	12+2

....

Переходя теперь к рассмотрению таблиц 1 и 2, сразу устанавливаем, что

$$N(2) \leq N(4), \tag{43}$$

поскольку из таблицы 1 видно, что область, по которой ищется максимум для $N(2)$, целиком содержится в области, по которой ищется максимум для $N(4)$.

Далее дело несколько осложняется, так как при переходе от $N/3/$ к $N/5/$ не только добавляется новый (третий в табл. 2) столбец, но и исключается элемент 2+2 из первой строки. Однако, в силу (43) $N/2/ + N/2/ \leq N/4/ + N/2/$, а комбинация 4+2 также входит в обе допустимые области. Таким образом можно записать новое неравенство

$$N/3/ \leq N/5/. \tag{44}$$

Легко видеть, что такое положение вещей сохранится и при каждом дальнейшем шаге. Именно, каждый раз при переходе от n к $n+2$ уменьшение области, по которой ищется максимум, окажется несущественным, коль скоро установлены цепочки неравенств типа (43), (44) для всех $k \leq n+1$. Таким образом, оказывается возможной полная индукция и мы приходим к бесконечным цепочкам

$$N(2) \leq N(4) \leq \ldots \leq N(2k) \leq \ldots \tag{45.1}$$

и

$$N(3) \leq N(5) \leq \ldots \leq N(2k+1) \leq \ldots \tag{45.2}$$

С другой стороны, однако, все $N(n)$ ограничены сверху условием (33). Таким образом, обе неубывающие последовательности целых чисел (34) должны достигать своих верхних граней, то есть должны существовать

$$\max_{k\geq 1} N(2k) = -a \leq 0 \quad и \quad \max_{k\geq 1} N(2k+1) = -b \leq 0. \tag{46}$$

Замечая теперь, что область (42), по которой ищется максимум в (41), включает для любого n_1 сколь угодно большие n_2 и n_3, заключаем, что вместо (41) можно записать уравнения

$$N(2k) = \max\{-a-b\} = -a-b \tag{47}$$

$$N(2k+1) = \max\{(-a-a), (-b-b)\}.$$

Следовательно, $N(2k)$ и $N(2k+1)$ не зависят от k. Но тогда $N(2k) = -a = -a-b$, то есть $b = 0$ и, далее, $N(2k+1) = -b = \mathrm{Max}\{-2a, -2b\}$ то есть $-a \leq 0$.

Итак, решение системы (40) имеет вид:

$$N(2k) = -a, \quad N(2k+1) = 0, \tag{48}$$

где a – произвольное целое неотрицательное число. Согласно (29) это означает, что общее выражение для возможных индексов роста матричных элементов I в собственно перенормируемой теории имеет форму

$$\Omega(2k) = 3-2k-a, \quad \Omega(2k+1) = 2-2k; \quad a \geq 0, \quad a \in N. \tag{49}$$

Нам осталось еще выписать условие для индекса роста диаграммы с двумя концами

$$\tilde{N}(1) = 2\,\mathrm{Max}_{v \geq 2} N(v) = 0, \quad \tilde{\Omega}(1) = \tilde{N}(1) + 2 = 2. \tag{50}$$

5. Дискуссия

Важнейшим из полученных в двух предыдуших параграфах результатов является ограничение сверху (33) на возможные индексы роста. Неотрицательными индексами могут обладать (кроме не входящей в систему (16) собственно-энергетической части) только матричные элементы с тремя и с четырьмя концами (n =2 и 3). Но это значит, что только эти матричные элементы могут содержать контрчлены (будучи полиномами по импульсам, они не могут иметь отрицательных индексов роста!). Таким образом, мы видим, что в рамках дисперсионного подхода "динамический принцип" оказывается почти излишним – одно лишь задание трансформационных свойств полей специализирует характер допустимых взаимодействий с точностью до небольшого числа констант. В рассматриваемом случае поля спина нуль таких констант оказывается лишь две – постоянный контрчлен четвертой вершины (n =3) и такой же – тройной вершины (формально допустимый линейный контрчлен запрещен релятивистской инвариантностью).

Особенно сильные ограничения возникают в собственно перенормируемой теории. Заметим, что условие, казалось бы тождественное условию собственно перенормируемости, всегда накладывают и при обычном построении по теории возмущений, выбирая для контрчленов в импульсном представлении полиномы минимально возможной степени (ср., например,[7], § 26. Без такого условия нельзя было бы построить R -операцию). Существенное различие возникает, однако, в следующем пункте. Обычно имеют фактически дело с контрчленами (в широком смысле) двоякого рода. Наряду с собственно контрчленами (константами перенормировки), возникающими при определении произведений сингулярных функций, рассматриваются еще и "заряды", которые происходят из первоначального лагранжиана. Степени отвечающих им полиномов не определяются из требования минимальности, а задаются ad hoc при формулировке теории.

В нашем подходе все контрчлены рассматриваются единообразно, "заряды" выступают на совершенно равных правах с "постоянными перенормировки". И те и другие играют роль неоднородностей или своего рода граничных условий для основной системы (16); есть основания думать[10], что в их отсутствии она допускала бы только тривиальные нулевые решения. Это во всяком случае будет так, если допустить разложение по малому параметру в духе [8].

В этой связи наложение требования минимального роста сообщает всей логической схеме теории особую красоту: в отсутствиии контрчленов система (16) обладала бы лишь тривиальным решением; мы достигаем отличных от нуля решений, вводя контрчлены; однако вводя их мы не добавляем никаких чуждых (16) элементов, но лишь используем неоднозначность, заложенную в ней благодаря ее сингулярности. Будь система типа (16) регулярной, для добавления контрчленов не было бы никаких внутренних причин, и мы пришли бы к единственному-нулевому решению ср. [11].

Итак, условие "минимального роста" накладывается у нас и на контрчлены, включаемые обычно в "затравочный лагранжиан". Это, естественно, может привести к более сильным ограничениям допустимого класса теорий - класс собственно перенормируемых теорий уже класса теорий, перенормируемых в обычном смысле. В частности, из первого выпадает теория с одним тройным взаимодействием скалярных частиц - поле Херста-Тирринга. В этой теории индекс роста простейшей диаграммы с тремя концами равен минус двум, а для более сложных еще меньше. Поэтому с точки зрения минимального роста такие диаграммы не должны сопровождаться контрчленом и заряд должен равняться нулю[x)]. Любопытно, что собственно перенормируемая теория с двумя видами скалярного взаимодействия – тройным и четверным – одновременно может существовать. Действительно, индекс роста тройной вершины Ω (2) мы можем выбрать в (49) или равным нулю или отрицательным за счет a, но отвечающий четверной вершине Ω (3) обязательно равен нулю – то есть в теории взаимодействия частиц спина нуль обязательно есть четверное взаимодействие.

Авторы благодарны Н.Н.Боголюбову, В.С.Владимирову и И.Ф.Гинзбургу за плодотворную дискуссию и ряд ценных замечаний.

[x)] Интересно сравнить это соображение с имеющимися в литературе указаниями/12/ на внутреннюю несостоятельность этой теории.

Литература

1. H.Lehman, K.Symanzik und W. Zimmerman. Nuovo Cimento, 1,205 (1955).
2. R. Haag. Dan. Mat. Fys. Medd. 29, N12 (1955).
3. A.S.Wightman. Colloque international en Lille, Juin 1957.
4. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев и М.К.Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз (1958).
5. W. Heisenberg. Zs. f. Phys. 120, 513, 673 (1943).
6. Н.Н.Боголюбов. Изв. АН СССР. Сер.физическая, 19, 237 (1955).
7. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957.
8. Б.В.Медведев. ДАН СССР, 135, 1087 (1960).
9. Б.В.Медведев. ЖЭТФ, № 8 (1961).
10. Б.В.Медведев и М.К.Поливанов. ДАН СССР (направлено в печать).
11. В.Л.Бонч-Бруевич и Б.В.Медведев. ЖЭТФ, 22, 425 (1952).
12. Gordon Baym. Phys. Rev. 117, 886 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
8 марта 1961 года.