ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Сянь Дин-чан, Чэнь Цун-мо

Д-684

О МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН В РЕАКЦИЯХ С ОБРАЗОВАНИЕМ БОЛЕЕ ЧЕМ ДВУХ ЧАСТИЦ В КОНЕЧНОМ СОСТОЯНИИ

ЖЭТФ, 1961, т41, в 3, с 784-789

Дубна 1960 год

Сянь Дин-чан, Чэнь Цун-мо

Д-684

О МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН В РЕАКЦИЯХ С ОБРАЗОВАНИЕМ БОЛЕЕ ЧЕМ ДВУХ ЧАСТИЦ В КОНЕЧНОМ СОСТОЯНИИ

Направлено в ЖЭТФ

А н н о т а ц и я

Получено универсальное неравенство для определения минимального числа парциальных волн, участвующих в реакции с образованием более чем двух частиц в конечном состоянии.

§ 1. Введение

Минимальное число парциальных волн L_{min}, участвующих в столкновениях частиц при больших энергиях, было обсуждено несколькими авторами. Рарита и Швед[1] показали как определить L_{min} для упругого рассеяния из полных сечений взаимодействия. Недавно Гришин и Огиевецкий[2] доказали нервенство, которое является очень эффективным для определения минимального числа парциальных волн в двухчастичных реакциях, если известно полное упругое сечение и дифференциальные сечения для некоторых углов.

Как известно, в физике высоких энергий большинство процессов столкновений при больших энергиях являются множественными процессами с образованием более чем двух частиц в конечном состоянии. Тогда возникает вопрос, как определить минимальное число парциальных волн в таких столкновениях? Решение этого вопроса имеет экспериментальное значение, так как L_{min} связано с минимальным радиусом взаимодействия.

В настоящей статье неравенство, полученное Гришиным и Огиевецким для двухчастичных реакций, было обобщено для случая с образованием более чем двух частиц в конечном состоянии. Оно связывает угловое распределение одной из частиц в конечном состоянии, полное сечение для данного канала и L_{min}.

В параграфе 2 подробно обсуждается выбор независимых переменных для описания конечных состояний трехчастичной системы.

В параграфе 3 получено неравенство для случаев частиц без спина $0+0 \to 0+0+0$.

В параграфе 4 показано, что полученное в параграфе 3 неравенство может быть перенесено без изменения на случаи $0+\frac{1}{2} \to 0+0+\frac{1}{2}$, $0+\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \to 0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \to 0+0+0$.

В параграфе 5 полученное выше неравенство было обобщено на случай с образованием n частиц в конечном состоянии.

В параграфе 6 обсуждено применение этого неравенства.

В Приложении показано, что в интеграле по фазовому пространству интеграция по углам может быть отделена от интеграции по всем другим переменным, если взять подходящий набор независимых переменных. Это было использовано при выводе неравенства.

§ 2. Кинематика трехчастичной системы

Для описания состояний трехчастичной системы вместо импульсов этих частиц $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ мы введем следующие девять величин. Первые три являются импульсом центра масс $\vec{\mathcal{P}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$. В системе центра масс этих трех частиц (ниже для простоты мы будем называть ее 3-c системой) $\vec{\mathcal{P}} = 0$. Затем мы выбираем $\vec{p}_{3c}\,(|\vec{p}_{3c}|, \vec{\Omega}_{3c})$ в 3-c системе импульс одной из трех частиц, которая может быть идентифицирована экспериментально (например, нуклон отдачи, K-мезон или гиперон). В системе, где остальные две частицы, как целое, покоятся (ниже мы будем называть ее 2-c системой), эти две частицы движутся в противоположных направлениях, тогда последние три переменных могут быть выбраны как $\vec{\Omega}_{2c}$ – направление относительного импульса этих двух частиц в 2-c системе и $\mathfrak{M}_{2c}$ – энергия этих частиц в 2-c системе.

Такой выбор независимых переменных имеет следующие два преимущества.

Во-первых, как показано в Приложении, интеграция по фазовому пространству может быть разделена на две части:

$$\iiint \frac{d\vec{p}_1\, d\vec{p}_2\, d\vec{p}_3}{8\, E_1\, E_2\, E_3}\, \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{p}_i)\, \delta(E_1 + E_2 + E_3 - E_i) = \tag{1}$$

$$= \int d\mathfrak{M}^2_{2c}\; G(\mathfrak{M}^2_{3c}, \mathfrak{M}^2_{2c}) \iint d\vec{\Omega}_{2c}\, d\vec{\Omega}_{3c}\,,$$

где $\mathfrak{M}_{3c}$ – полная энергия трех частиц в 3-c системе, $\vec{p}_i$ и E_i – импульс и энергия в начальном состоянии соответственно. Функция $G(\mathfrak{M}^2_{3c}, \mathfrak{M}^2_{2c})$ не зависит от углов, причем пределы интеграций по $d\vec{\Omega}_{2c}$ и $d\vec{\Omega}_{3c}$ не зависят друг от друга. Таким образом, интеграции по углам и по энергиям разделены.

Во-вторых, исходя из работы Чжоу и Широкова /2/, можно показать, что угловой момент этих трех частиц может быть получен обычным образом сложением ℓ_{2c} – относительного момента двух частиц в 2-c системе с ℓ_{3c} – относительным угловым моментом идентифицированной частицы с остальными двумя частицами, как целым, в 3-c системе.

§ 3. Взаимодействия типа $0+0 \to 0+0+0$

Рассмотрим вначале самый простой случай $0+0 \to 0+0+0$, когда все частицы бесспиновые. Выберем переменные, как указано в параграфе 2, тогда общий вид амплитуды этого процесса будет

$$F = \sum_{\substack{L M \ell_{2c} \\ \ell_{3c} \mu_{2c} \mu_{3c}}} R_L^{\ell_{2c}, \ell_{3c}} Y^*_{L,M}(\vec{\Omega}_i)\, C_{L,M}^{\ell_{2c}, \mu_{2c}; \ell_{3c}, \mu_{3c}} Y_{\ell_{2c}, \mu_{2c}}(\vec{\Omega}_{2c})\, Y_{\ell_{3c}, \mu_{3c}}(\vec{\Omega}_{3c}), \tag{2}$$

где $R_L^{\ell_{2c}, \ell_{3c}}$ – функция зависит от L (полный угловой момент этой трехчастичной системы), ℓ_{2c} и ℓ_{3c} – упомянутые в конце последнего параграфа угловые моменты. Остальные аргументы функции $R_L^{\ell_{2c}, \ell_{3c}}$ являются инвариантными при лоренцовском преобразовании. $Y_{\ell,m}$ – сферические гармоники, $\vec{\Omega}_i$ –единичный вектор, совпадающий с направлением импульса падающей частицы в 3-с системе. $C_{L,M}^{\ell_{2c}, \mu_{2c}; \ell_{3c}, \mu_{3c}}$ – коэффициент Клебша-Жордана.

Если выбрать ориентацию оси Z по направлению $\vec{\Omega}_{3c}$, (2) запишется как

$$F = \sum_{\substack{L M \\ \ell_{2c} \ell_{3c}}} R_L^{\ell_{2c}, \ell_{3c}} \sqrt{\frac{2\ell_{3c}+1}{4\pi}}\, C_{L,M}^{\ell_{2c}, M; \ell_{3c}, 0}\, Y_{\ell_{2c}, M}(\vec{\Omega}_{2c})\, Y^*_{L,M}(\vec{\Omega}_i). \tag{3}$$

Тогда угловое распределение идентифицированной частицы запишется в виде

$$\sigma(\theta) = \int G(\mathfrak{M}^2_{3c}, \mathfrak{M}^2_{2c})\, d\mathfrak{M}^2_{2c} \int |F|^2 d\vec{\Omega}_{2c} =$$

$$= \sum_{M \ell_{2c}} \int \Big| \sum_{L\, \ell_{3c}} R_L^{\ell_{2c}, \ell_{3c}} \sqrt{\frac{2\ell_{3c}+1}{4\pi}}\, C_{L,M}^{\ell_{2c}, M; \ell_{3c}, 0}\, Y^*_{L,M}(\theta) \Big|^2 \cdot \tag{4}$$

$$\cdot\, G(\mathfrak{M}^2_{3c}, \mathfrak{M}^2_{2c})\, d\mathfrak{M}^2_{2c}$$

и сечение этого процесса принимает вид

$$\sigma_3 = \int \sigma(\theta)\, d\vec{\Omega}$$

$$= \sum_{LM\ell_{2c}} \int G(\mathfrak{M}^2_{3c}, \mathfrak{M}^2_{2c})\, d\mathfrak{M}^2_{2c} \left| \sum_{\ell_{3c}} \sqrt{\frac{2\ell_{3c}+1}{4\pi}}\, R_L^{\ell_{2c},\ell_{3c}}\, C_{L,M}^{\ell_{2c},M;\,\ell_{3c},0} \right|^2 . \qquad (5)$$

Предположим, что в выражениях (4) и (5) можно ограничиться конечным числом парциальных волн L_{min} , тогда, используя неравенство Коши $\sum_i |A_i B_i|^2 \leqslant \sum_i |A_i|^2 \sum_i |B_i|^2$, получим

$$\sigma(\theta) \leqslant \sum_{M\ell_{2c}} \int \sum_L \left| \sum_{\ell_{3c}} R_L^{\ell_{2c},\ell_{3c}} \sqrt{\frac{2\ell_{3c}+1}{4\pi}}\, C_{L,M}^{\ell_{2c},M;\,\ell_{3c},0} \right|^2 \cdot$$

$$\cdot \sum_L |Y_{LM}(\theta)|^2\, G(\mathfrak{M}^2_{3c}, \mathfrak{M}^2_{2c})\, d\mathfrak{M}^2_{2c} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{LM\ell_{2c}} \int \left| \sum_{\ell_{3c}} R_L^{\ell_{2c},\ell_{3c}} \sqrt{\frac{2\ell_{3c}+1}{4\pi}}\, C_{L,M}^{\ell_{2c},M;\,\ell_{3c},0} \right|^2 \cdot \qquad (6)$$

$$\cdot\, G(\mathfrak{M}^2_{3c}, \mathfrak{M}^2_{2c})\, d\mathfrak{M}^2_{2c} \sum_{LM} |Y_{L,M}(\theta)|^2 =$$

$$= \sigma_3 \sum_{L=0}^{L_{min}} \frac{2L+1}{4\pi} .$$

Таким образом, неравенство имеет вид

$$\frac{4\pi\,\sigma(\theta)}{\sigma_3} \leqslant (L_{min}+1)^2 . \qquad (7)$$

Следует отметить, что после суммирования по M , правая часть в (6) уже не зависит от θ . Это отличается от двухчастичного случая, где такого суммирования по M нет, и правая часть неравенства зависит от θ /2/.

§ 4. Взаимодействие типа $0+\frac{1}{2}\to 0+0+\frac{1}{2}$

Рассмотрим случай $0+\frac{1}{2}\to 0+0+\frac{1}{2}$. Амплитудой этого процесса является

$$F=\sum_{\substack{JMLL'\ell_{2c}\\ \mu_{2c}\ell_{3c}\mu_{3c}}} R^{\ell_{2c},\ell_{3c}}_{JLL'}\, C^{L',M-\beta;\frac{1}{2},\beta}_{J,M}\, C^{\ell_{2c},\mu_{2c};\ell_{3c},\mu_{3c}}_{L',M-\beta}\, C^{L,M-\alpha;\frac{1}{2},\alpha}_{J,M}\,\cdot \tag{8}$$

$$\cdot\, Y^{*}_{L,M}(\vec{\Omega}_i)\, Y_{\ell_{3c}\mu_{3c}}(\vec{\Omega}_{3c})\, Y_{\ell_{2c},\mu_{2c}}(\vec{\Omega}_{2c}),$$

где J – полный угловой момент трехчастичной системы в $3-c$ системе, L и L' полные орбитальные угловые моменты соответственно начальных и конечных состояний в $3-c$ системе, α и β – ориентации спина частиц,обладающих спином в начальном и конечном состояниях соответственно. Остальные обозначения такие же, как и в предыдущем параграфе.

Как и в предыдущем параграфе, выбираем ориентацию оси z по направлению $\vec{\Omega}_{3c}$, тогда (8) превращается в

$$F=\sum_{\substack{JLL'\\ \ell_{2c}\ell_{3c}M}} R^{\ell_{2c},\ell_{3c}}_{JLL'}\, C^{L',M-\beta;\frac{1}{2},\beta}_{J,M}\, C^{\ell_{2c},M-\beta;\ell_{3c},0}_{L',M-\beta}\, C^{L,M-\alpha;\frac{1}{2},\alpha}_{J,M}\,\cdot \tag{9}$$

$$\cdot\sqrt{\frac{2\ell_{3c}+1}{4\pi}}\, Y_{\ell_{2c},M-\beta}(\vec{\Omega}_{2c})\, Y^{*}_{L,M}(\vec{\Omega}_i).$$

Угловое распределение идентифицированной частицы принимает вид

$$\sigma(\theta)=\sum_{\alpha\beta}\int G(\mathfrak{M}^2_{3c},\mathfrak{M}^2_{2c})\,d\mathfrak{M}^2_{2c}\int|F|^2\,d\vec{\Omega}_{2c}=$$

$$=\sum_{\substack{\alpha\beta\\ \ell_{2c}M}}\int\Big|\sum_{\substack{LL'J\\ \ell_{3c}}} R^{\ell_{2c},\ell_{3c}}_{JLL'}\, C^{L',M-\beta;\frac{1}{2},\beta}_{J,M}\, C^{\ell_{2c},M-\beta;\ell_{3c},0}_{L',M-\beta}\, C^{L,M-\alpha;\frac{1}{2},\alpha}_{J,M}\,\cdot \tag{10}$$

$$\cdot\sqrt{\frac{2\ell_{3c}+1}{4\pi}}\, Y^{*}_{L,M}(\theta)\Big|^2 G(\mathfrak{M}^2_{3c},\mathfrak{M}^2_{2c})\,d\mathfrak{M}^2_{2c}$$

и сечение для этого процесса

$$\sigma_3 = \int \sigma(\theta)\, d\vec{\Omega}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha\beta M \\ L\, \ell_{2c}}} \int G(\mathfrak{M}^2_{3c}, \mathfrak{M}^2_{2c})\, d\mathfrak{M}^2_{2c} \, \Big| \sum_{J L' \ell_{3c}} R^{\ell_{2c}, \ell_{3c}}_{JLL'} \; C^{L', M-\beta; \frac{1}{2}, \beta}_{J, M} \cdot \tag{11}$$

$$\cdot\; C^{\ell_{2c}, M-\beta; \ell_{3c}, 0}_{L', M-\beta} \; C^{L, M-\alpha; \frac{1}{2}, \alpha}_{J, M} \sqrt{\frac{2\ell_{3c}+1}{4\pi}} \Big|^2 .$$

Из (10) и (11), используя неравенство Коши, получим

$$\sigma(\theta) \leqslant \sum_{\substack{\alpha\beta L \\ M\, \ell_{2c}}} \int G(\mathfrak{M}^2_{3c}, \mathfrak{M}^2_{2c})\, d\mathfrak{M}^2_{2c} \, \Big| \sum_{J L' \ell_{3c}} \sqrt{\frac{2\ell_{3c}+1}{4\pi}} \; R^{\ell_{2c}, \ell_{3c}}_{JLL'} \cdot$$

$$\cdot\; C^{L', M-\beta; \frac{1}{2}, \beta}_{J,M} \; C^{L, M-\alpha; \frac{1}{2}, \alpha}_{J, M} \; C^{\ell_{2c}, M-\beta; \ell_{3c}, 0}_{L', M-\beta} \Big|^2 \cdot \sum_{LM} \big| Y_{L,M}(\theta) \big|^2 = \tag{12}$$

$$= \sigma_3 \sum_{L=0}^{L_{min}} \frac{2L+1}{4\pi}$$

или

$$\frac{4\pi\, \sigma(\theta)}{\sigma_3} \leqslant (L_{min} + 1)^2 . \tag{13}$$

Полученное неравенство (13) имеет тот же вид, что и для бесспинового случая. Кроме этого легко показать, что для случаев $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \to 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $0 + \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \longrightarrow 0 + 0 + 0$ и $0 + 0 \to 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ можно получить тот же самый результат.

§ 5. Взаимодействия с образованием n частиц в конечном состоянии

Как пример рассмотрим вначале случай $o + o \to \overbrace{o + o + \cdots + o}^{n}$. Переменные для такого случая могут быть выбраны следующим образом. Во-первых $\vec{\mathcal{P}}$ – импульс центра масс n частиц. В системе центра масс этих n частиц (n-c система) $\vec{\mathcal{P}} = 0$. Затем $\vec{P}_{nc}$ ($|\vec{P}_{nc}|, \vec{\Omega}_{nc}$) – импульс идентифицированной частицы в $n-c$ системе. В системе, где покоится $n-1$ частица, как целое ($(n-1)-c$ система), могут быть выбраны следующие переменные: $\mathfrak{M}_{(n-1)c}$ – полная энергия $n-1$ частицы в $(n-1)-c$ системе и $\vec{\Omega}_{(n-1)c}$ – единичный вектор по направлению $\vec{P}_{(n-1)c}$ – относительного импульса одной из этих $n-1$ частиц и остальных $n-2$ частиц, как целого, в $(n-1)-c$ системе. Остальные переменные могут быть выбраны таким же образом и записаны в виде $\mathfrak{M}^2_{(n-2)c}$, $\vec{\Omega}_{(n-2)c}$, . . . , $\mathfrak{M}_{2c}$, $\vec{\Omega}_{2c}$. Преимущества такого выбора независимых переменных указаны в параграфе 2. Интеграция по фазовому пространству принимает следующий вид:

$$\int \frac{d\vec{p}_1\, d\vec{p}_2 \cdots d\vec{p}_n}{2^n E_1 E_2 \cdots E_n}\, \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n - \vec{p}_i)\, \delta(E_1 + E_2 + \cdots + E_n - E_i) = \tag{14}$$

$$= \int G(\mathfrak{M}^2_{nc}, \cdots, \mathfrak{M}^2_{2c})\, d\mathfrak{M}^2_{(n-1)c} \cdots d\mathfrak{M}^2_{2c} \int d\vec{\Omega}_{nc} \cdots d\vec{\Omega}_{2c},$$

где G – функция, зависящая только от энергий, но не от углов.

С помощью приведенного выше набора независимых переменных амплитуда для этого процесса имеет вид

$$F_n = \sum_{\substack{LM\, \ell_{2c} \cdots \ell_{nc} \\ \mu_{2c} \cdots \mu_{nc},\, L_{3c} \cdots L_{(n-1)c} \\ M_{3c} \cdots M_{(n-1)c}}} R^{\ell_{2c}, \ell_{3c}, \cdots \ell_{nc}}_{L, L_{3c}, \cdots L_{(n-1)c}}\, C^{\ell_{2c}, \mu_{2c}; \ell_{3c}, \mu_{3c}}_{L_{3c}, M_{3c}}\, C^{L_{3c}, M_{3c}; \ell_{4c}, \mu_{4c}}_{L_{4c}, M_{4c}} \cdots$$

$$\cdots C^{L_{(n-1)c}, M_{(n-1)c}; \ell_{nc}, \mu_{nc}}_{L, M}\, Y^{*}_{L,M}(\vec{\Omega}_i)\, Y_{\ell_{2c}, \mu_{2c}}(\vec{\Omega}_{2c}) \cdots Y_{\ell_{nc}, \mu_{nc}}(\vec{\Omega}_{nc}), \tag{15}$$

где L и M – полный угловой момент и его z составляющая n –частичной системы в n-c системе соответственно, ℓ_{ic} и μ_{ic} – относительные угловые моменты и их z –составляющие, которые соответствуют $\vec{p}_{ic}$ в i-c системе, L_{ic} и M_{ic} полные угловые моменты и их z –составляющие в i-c –системе.

Выберем ориентацию оси z по направлению $\vec{\Omega}_{nc}$, тогда угловое распределение идентифицированной частицы принимает вид

$$\sigma_n(\theta) = \int |F_n|^2 G(\mathfrak{M}^2_{nc}, \cdots \mathfrak{M}^2_{2c}) d\mathfrak{M}^2_{2c} \cdots d\mathfrak{M}^2_{(n-1)c} \, d\vec{\Omega}_{2c} \cdots d\vec{\Omega}_{(n-1)c} \qquad (16)$$

и полное сечение для данного процесса равно

$$\sigma_n = \int \sigma_n(\theta) \, d\vec{\Omega} . \qquad (17)$$

Используя неравенство Коши, из (16) и (17) получаем

$$\frac{4\pi\,\sigma_n(\theta)}{\sigma_n} \leqslant (L_{min} + 1)^2. \qquad (18)$$

Это неравенство аналогично неравенству, полученному в бесспиновом трехчастичном случае. Для общих случаев, в которых несколько частиц являются спиновыми, можно доказать таким же путем, что результат тот же, что и в бесспиновом случае.

§ 6. Обсуждение

Мы получили универсальное неравенство (18), которое оказывается полезным для определения L_{min}.

Чтобы использовать это неравенство, нам надо измерить полное сечение для процесса с образованием определенного числа частиц в конечном состоянии и угловое распределение одной идентифицированной частицы (K –мезон, гиперон, нуклон отдачи или антибарион) в системе центра масс.

Ввиду того, что правая часть в (18) не зависит от θ, неравенство принимает вид

$$\frac{4\pi\,[\sigma_n(\theta)]_{max}}{\sigma_n} \leq (L_{min}+1)^2. \tag{19}$$

Следует заметить, что если выбрать ось z по направлению $\vec{\Omega}_i$, тогда между угловым распределением одной идентифицированной частицы из j частиц в j-с системе

$$\sigma_n(\theta_j) = \int |F_n|^2\, G(\mathfrak{M}^2_{nc}, \cdots, \mathfrak{M}^2_{2c})\, d\mathfrak{M}^2_{2c} \cdots d\mathfrak{M}^2_{(n-1)c} \cdot \tag{20}$$

$$\cdot\, d\vec{\Omega}_{2c} \cdots d\vec{\Omega}_{(j-1)c}\, d\vec{\Omega}_{(j+1)c} \cdots d\vec{\Omega}_{nc}$$

и сечением для данного процесса имеется соотношение

$$\frac{4\pi\,\sigma_n(\theta_j)}{\sigma_n} \leq [\,(\ell_j)_{min}+1\,]^2. \tag{21}$$

Неравенство (21) дает возможность определить минимальное число парциальных волн, участвующих в подсистеме j-с. Это оказывается полезным для экспериментаторов.

Авторы благодарят Чжоу Гуан-чжао и Огиевецкого за полезные обсуждения.

<u>Приложение</u>[x)]

Интегралом по фазовому пространству n -частичного процесса является

$$I = \int \frac{d\vec{p}_1 \cdots d\vec{p}_n}{2^n E_1 \cdots E_n}\, \delta(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\cdots+\vec{p}_n-\vec{p}_i)\, \delta(E_1+\cdots+E_n-E_i)\,. \tag{A.1}$$

---

x) После окончания этой работы М.И.Широков сообщил нам, что аналогичный метод интегрирования по фазовому пространству был ранее предложен Копыловым Г.И. (ЖЭТФ,<u>39</u>, 1091 /1960/).

(A.1) может быть написан в явной инвариантной форме:

$$I = \int d^4p_1 \cdots d^4p_n \, \delta(p_1^2+m_1^2) \cdots \delta(p_n^2+m_n^2) \, \delta^4(p_1+p_2+\cdots+p_n-p_i) . \tag{A.2}$$

Преобразованием

$$\begin{cases} p_1+p_2 = k_{2c} \\ p_1-p_2 = 2q_{2c} \end{cases} \tag{A.3}$$

(A.2) превращается в

$$I = \int d^4k_{2c} \, d^4q_{2c} \, d^4p_3 \cdots d^4p_n \, \delta\left(\left(\frac{k_{2c}}{2}+q_{2c}\right)^2+m_1^2\right) \delta\left(\left(\frac{k_{2c}}{2}-q_{2c}\right)^2+m_2^2\right) \cdot \tag{A.4}$$

$$\cdot \, \delta(p_3^2+m_3^2) \cdots \delta(p_n^2+m_n^2) \, \delta^4(k_{2c}+p_3+\cdots+p_n-p_i)$$

замечая, что

$$d^4q_{2c} = \frac{1}{2}\sqrt{q_{2c}^2+q_{2c0}^2} \; dq_{2c0} \, dq_{2c}^2 \, d\vec{\Omega}_{2c} \tag{A.5}$$

можем вести интегрирование по d^4q_{2c} в 2-с системе, где

$$\begin{cases} k_{2c}^2 = -k_{2c0}^2 \\ (k_{2c}\cdot q_{2c}) = -k_{2c0}\cdot q_{2c0} \end{cases} \tag{A.6}$$

и (A.4) превращается в

$$I = \frac{1}{2}\int d\mathfrak{M}_{2c}^2 \, d\vec{\Omega}_{2c} \, d^4k_{2c} \, d^4p_3 \cdots d^4p_n \left[1-2\frac{m_1^2+m_2^2}{\mathfrak{M}_{2c}^2}+\left(\frac{m_1^2-m_2^2}{\mathfrak{M}_{2c}^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \tag{A.7}$$

$$\cdot \, \delta(k_{2c}^2+\mathfrak{M}_{2c}^2) \, \delta(p_3^2+m_3^2) \cdots \delta(p_n^2+m_n^2) \, \delta^4(k_{2c}+p_3+\cdots+p_n-p_i) ,$$

где

$$\frac{1}{4}\mathfrak{M}_{2c}^2 = q_{2c}^2 + \frac{m_1^2+m_2^2}{2}. \tag{A.8}$$

Нетрудно видеть, что $\mathfrak{M}_{2c}$ является полной энергией двух частиц в 2-c -системе. Продолжая предыдущую процедуру, т.е. полагая

$$\begin{cases} k_{ic} + p_{i+1} = k_{(i+1)c} \\ k_{ic} - p_{i+1} = 2q_{(i+1)c} \end{cases} \qquad i = 3, 4, \cdots, n-1 \tag{A.9}$$

и интегрируя $d^4 q_{(i+1)c}$ в $(i+1)$-c системе, в конце концов получим по фазовому пространству в виде

$$I = \int G(\mathfrak{M}_{nc}^2, \cdots, \mathfrak{M}_{2c}^2)\, d\vec{\Omega}_{2c} \cdots d\vec{\Omega}_{nc}\, d\mathfrak{M}_{2c}^2 \cdots d\mathfrak{M}_{(n-1)c}^2, \tag{A.10}$$

где

$$\begin{gathered} \frac{1}{4}\mathfrak{M}_{ic}^2 = q_{ic}^2 + \frac{\mathfrak{M}_{(i-1)c}^2 + m_i^2}{2} \\ \mathfrak{M}_{1c} = m_1 \end{gathered} \tag{A.11}$$

$\mathfrak{M}_{ic}$ - является полной энергией i частицы в i-c системе и

$$G(\mathfrak{M}_{nc}^2, \cdots, \mathfrak{M}_{2c}^2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \prod_{i=2}^{n} \left[1 - 2\,\frac{\mathfrak{M}_{(i-1)c}^2 + m_i^2}{\mathfrak{M}_{ic}^2} + \left(\frac{\mathfrak{M}_{(i-1)c}^2 - m_i^2}{\mathfrak{M}_{ic}^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{A.12}$$

Литература

1. Rarita, W and Schwed P, Phys. Rev., 112, 271 (1958).
2. Grishin V.G. and Ogiewetski V.I., Nucl. Phys., 18, 516, (1960).
3. Чжоу Гуан-чжао и Широков М.И. ЖЭТФ, 34, 1230 (1958).

Рукопись поступила в издательский отдел
21 февраля 1961 года.