ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория ядерных проблем

Лаборатория теоретической физики

Л.И. Лапидус, Чжоу Гуан-чжао

Д-682

ДЛИННОВОЛНОВОЙ ПРЕДЕЛ АМПЛИТУДЫ γN -РАССЕЯНИЯ И КРОСС-СИММЕТРИЯ

ЖЭТФ, 1961, т41, в2, с491-494.

Дубна 1961 год

Л.И. Лапидус, Чжоу Гуан-чжао

Д-682

ДЛИННОВОЛНОВОЙ ПРЕДЕЛ АМПЛИТУДЫ γN -РАССЕЯНИЯ И КРОСС-СИММЕТРИЯ

Длинноволновой предел для амплитуды γN рассеяния получен с помощью однонуклонных членов инвариантных амплитуд. Учет требований кросс-симметрии позволяет получить следующие члены по ν при $Q^2 = 0$ и выражение для предельного значения первой производной по Q^2 при $Q^2 \to 0$.

1. Лоу, Гелл-Манн и Гольдбергер показали [1], что требования релятивистской и градиентной инвариантности позволяют выразить предельное значение амплитуд рассеяния γ -квантов с малыми частотами на частицах со спином 1/2 и предельное значение производной от амплитуды по частоте при $\nu \to 0$ через заряд и магнитный момент частицы.

Позже этот результат был обобщен [2] на случай упругого рассеяния γ -квантов частицами других спинов, а также на случай тормозного излучения [3].

Результат для упругого рассеяния сохраняется и в случае, когда предполагается лишь CP-инвариантность.

К предельной теореме приводит также рассмотрение однонуклонных членов в дисперсионных соотношениях для γN -рассеяния [4,5,6]. (Аналогичный результат справедлив для тормозного излучения [7]).

В настоящей заметке рассматривается получение предельной теоремы для γN рассеяния, исходя из однонуклонных членов. Требование кросс-симметрии инвариантных функций T_i (ν, Q^2) (i =1, ..6) позволяет получить дополнительные слагаемые к предельным значениям функций $R_i(\nu, 0)$, которые характеризуют матрицу γN рассеяния в системе центра масс, а также предельные значения производных от амплитуд по Q^2 при $\nu \to 0$. (Определение величин T_i и R_i, см., например, в [6]).

2. Инвариантные функции $T_i(\nu, Q^2)$ связаны со скалярными функциями R_i (ν, Q^2) (i =1,..6) следующим образом

$$T_1 - T_3 = \frac{8MW^2}{(W^2-M^2)^2}\left[\nu - \frac{W-M}{W+M}\frac{Q^2}{M}\right](R_3+R_4) - \frac{4W}{W+M}\left[1-\frac{4Q^2W^2}{(W^2-M^2)^2}\right](R_1+R_2)$$

$$T_2 - T_4 = \frac{8MW^2}{(W^2-M^2)^2}\left[1+\frac{2W}{M}\frac{Q^2}{(W+M)^2}\right](R_3+R_4) + \frac{4W}{(W+M)^2}\left[1-\frac{4Q^2W^2}{(W^2-M^2)^2}\right](R_1+R_2)$$

$$T_1 + T_3 = \frac{8MW^2}{(W^2-M^2)^2}\left[\nu - \frac{W-M}{W+M}\frac{Q^2}{M}\right](R_3-R_4) + \frac{16W^3Q^2}{(W+M)(W^2-M^2)^2}(R_1-R_2)$$

$$T_2 + T_4 = \frac{8MW^2}{(W^2-M^2)^2}\left[1 + \frac{2W}{M}\frac{Q^2}{(W+M)^2}\right](R_3+R_4) - \frac{16W^3Q^2}{(W+M)^2(W^2-M^2)^2}(R_1-R_2)$$

$$\frac{M\nu + Q^2}{W^2} T_5 = \frac{8W^2Q^2}{(W^2-M^2)^2}(R_5-R_6) - (R_3+R_4)$$

$$\frac{M\nu + Q^2}{W} T_6 = \left(2 - \frac{8W^2Q^2}{(W^2-M^2)^2}\right)(R_5+R_6) + (R_3+R_4) \,, \qquad (1)$$

где W – полная энергия в с.ц.м., а ν и Q^2 – два инварианта, характеризующие кинематику процесса ; $W^2 - M^2 = 2M\nu + 2Q^2$.

Полюсные члены для $T_i(\nu, Q^2)$ имеют вид

$$T_1^\circ = \frac{2e^2}{M}\frac{M^2Q^2}{Q^4-M^2\nu^2} \;;\; T_2^\circ = \frac{e^2}{M}\cdot\frac{M^2\nu}{Q^4-M^2\nu^2} \;;\; T_3^\circ = 0$$

$$T_4^\circ = -\frac{e^2(1+\lambda)^2}{M}\frac{M^2\nu}{Q^4-M^2\nu^2} \qquad (2)$$

$$T_5^\circ = M T_6^\circ = \frac{e^2(1+\lambda)}{M}\frac{M^2Q^2}{Q^4-M^2\nu^2} \,,$$

где приняты единицы, в которых $\hbar = C = 1$, магнитный момент равен $\mu = \frac{e(1+\lambda)}{2M}$.

При $Q^2 = 0$ из (1)

$$T_1 - T_3)_0 = \frac{2W^2}{M\nu}(R_3+R_4)_0 - \frac{4W}{W+M}(R_1+R_2)_0$$

$$T_2 - T_4)_0 = \frac{2W^2}{M\nu^2}(R_3+R_4)_0 + \frac{4W}{(W+M)^2}(R_1+R_2)_0 \tag{3}$$

$$T_1 + T_3)_0 = \frac{2W^2}{M\nu}(R_3-R_4)_0$$

$$T_2 + T_4)_0 = \frac{2W^2}{M\nu^2}(R_3-R_4)_0$$

$$T_5)_0 = -\frac{W^2}{M\nu}(R_3-R_4)$$

$$T_6)_0 = \frac{W}{M\nu}\left[2(R_5+R_6)+R_3+R_4\right].$$

Дифференцируя соотношения в (1) по Q^2, в пределе $Q^2=0$ получаем

$$(T_1-T_3)'_0 \equiv \lim_{Q^2\to 0}\frac{d}{dQ^2}(T_1-T_3) = \frac{2W^2}{M\nu}(R_3+R_4)'_0 - \frac{4W}{W+M}(R_1+R_2)'_0 -$$

$$-\frac{2(2W^3+M^2W+M^3)}{M^2\nu^2(W+M)}(R_3+R_4)_0 + \frac{4(R_1+R_2)_0}{W(W+M)}\left[\frac{W^4}{M^2\nu^2} - \frac{M}{W+M}\right];$$

$$(T_2-T_4)'_0 = \frac{2W^2}{M\nu^2}(R_3+R_4)'_0 + \frac{4W}{(W+M)^2}(R_1+R_2)'_0 + \frac{4}{M^2\nu^2}\left[\frac{W^3}{(W+M)^2} -\right.$$

$$\left. - M - \frac{M^2}{\nu}\right](R_3+R_4)_0 - \frac{4}{(W+M)^2}\left[\frac{W^3}{M^2\nu^2} - \frac{1}{W} + \frac{2}{W+M}\right](R_1+R_2)_0;$$

$$(T_1+T_3)'_0 = \frac{2W^2}{M\nu}(R_3-R_4)'_0 - \frac{2(2W^3+WM^2+M^3)}{M^2\nu^2(W+M)}(R_3-R_4)_0 +$$

$$+\frac{4W^3}{(W+M)M^2\nu^2}(R_1-R_2)_0 \quad ; \tag{4}$$

$$(T_2+T_4)'_0 = \frac{2W^2}{M\nu^2}(R_3-R_4)'_0 + \frac{4(R_3-R_4)_0}{M^2\nu^2}\left[\frac{W^3}{(W+M)^2} - M - \frac{M^2}{\nu}\right] -$$

$$-\frac{4W^3}{(W+M)^2}\frac{(R_1-R_2)_0}{M^2\nu^2} \quad ;$$

$$T_5)'_0 = \frac{W^2}{M\nu}\left[\frac{2W^2}{M^2\nu^2}(R_5-R_6)_0 - (R_3-R_4)'_0 + \frac{M}{W^2\nu}(R_3-R_4)_0\right]$$

$$T_6)'_0 = \frac{W}{M\nu}\left[-\frac{2W^2}{M^2\nu^2}(R_5+R_6)_0 + (2R_5+2R_6+R_3+R_4)'_0 - \right.$$

$$\left. - \frac{M+\nu}{W^2\nu}(R_3+R_4+2R_5+2R_6)_0\right].$$

Из (2) видно, что T_1-T_3 и T_2+T_4 не содержат полюса при $Q^2=0$. Из (1) тогда следует, что R_1+R_2 и $\left.\frac{R_3\pm R_4}{\nu}\right)_0$ конечны при $\nu\to 0$.

Так как функции $T_2 \pm T_4$ обладают сингулярностью вида

$$\left[-\frac{e^2}{M} \pm \frac{e^2}{M}(1+\lambda)^2\right]\frac{1}{\nu}$$

из (1) следует, что

$$\left.\frac{R_3\pm R_4}{\nu}\right)_0 = -\frac{e^2}{2M^2}\left[1\pm(1+\lambda)^2\right] \tag{5}$$

при $\nu\to 0$, что находится в соответствии с предельной теоремой.

В силу того, что T_5 и T_6 не содержит полюса при $Q^2=0$, $\left.\frac{R_5+R_6}{\nu}\right)_0$ должно оставаться постоянным при $\nu\to 0$. Аналогично, из того условия, что $(T_1\pm T_3)'_0$ содержат полюс второго порядка

$$(T_1 \pm T_3)'_0 = -\frac{2e^2}{M\nu^2},$$

а $\nu\,(T_2-T_4)'_0$ не содержит полюса следует, что

$$(R_1\pm R_2)_0 = -\frac{e^2}{M}, \tag{6}$$

а $(R_3\pm R_4)'_0 \to Const$ и $\nu\,(R_1\pm R_2)'_0 \to Const$ при $\nu\to 0$.

Из того обстоятельства, что

$$T_5)'_{0p} = M\,T_6)'_{0p} = -\frac{e^2(1+\lambda)}{2M^2}\,\nu,$$

заключаем, что

$$(R_5 \pm R_6)_0 = \pm \frac{e^2(1+\lambda)}{2M^2}\nu \tag{7}$$

и $(2R_5 + 2R_6 + R_3 + R_4)'_0 \to Const$ при $\nu \to 0$.

Мы видим, что формулы (5)-(7), полученные из рассмотрения полюсных членов (2), содержат результаты предельной теоремы для $Q^2 = 0$.

3. Интересно отметить, что с помощью условий кросс-симметрии можно получить дополнительную информацию о пределе малых энергий. Из кросс-симметрии следует, что, например, величина $T_1 - T_3$ должна быть функцией ν.

Если подставить в первое соотношение из (2)

$$(R_1+R_2)_0 = -\frac{e^2}{M} + \alpha_1\nu + \cdots$$

$$(R_3+R_4)_0 = -\frac{e^2}{2M^2}\left[1+(1+\lambda)^2\right]\nu + \alpha_3\nu + \cdots \tag{8}$$

и учесть, что при малых ν $W = (M^2+2M\nu)^{1/2} \cong M+\nu$, то из условия отсутствия линейной зависимости от ν получаем соотношение

$$\alpha_3 M - \alpha_1 = \frac{e^2}{M}\left[1/2 + (1+\lambda)^2\right]. \tag{9}$$

Требование кросс-симметрии приводят к тому, что величина $\nu(T_2 - T_4)$ должна быть четной функцией от ν. Отсутствие линейных по ν членов приводит к соотношению

$$\alpha_3 M = \frac{e^2}{M}\left[3/2 + (1+\lambda)^2\right]. \tag{10}$$

Из (8)-(10) имеем

$$(R_1+R_2)_0 = -\frac{e^2}{M}\left(1-\frac{\nu}{M}\right) + O(\nu^2)$$

$$(R_3+R_4)_0 = -\frac{e^2}{2M^2}\left(1-\frac{3\nu}{M}\right)\nu - \frac{e^2}{2M^2}(1+\lambda)^2\left(1-\frac{2\nu}{M}\right)\nu + O(\nu^3). \tag{11}$$

Функция T_1+T_3, T_5, $\nu(T_2+T_4)$ и T_6 должны быть четными функциями ν. Аналогичное рассмотрение приводит к тому, что

$$(R_3-R_4)_0 = -\frac{e^2}{2M^2}\left[1-(1+\lambda)^2\right]\left(1-\frac{2\nu}{M}\right)\nu + O(\nu^3), \tag{12}$$

а

$$(R_3+R_4+2R_5+2R_6)_0 = -\frac{e^2\lambda^2}{2M^2}\left(1-\frac{\nu}{M}\right)\nu + O(\nu^3) \tag{13}$$

и

$$(R_5+R_6)_0 = \frac{e^2(1+\lambda)}{2M^2}\nu + \frac{e^2}{4M^3}\left[\lambda^2-3-2(1+\lambda)^2\right]\nu^2 + O(\nu^3).$$

Функция $(T_1-T_3)'_0$ является четной функцией от ν. Подставляя в (4)

$$(R_3+R_4)'_0 = \alpha'_3+\cdots \qquad ; \qquad (R_1+R_2)'_0 = \frac{\alpha'_1}{\nu}+\cdots$$

получаем из условия отсутствия слагаемого, пропорционального ν^{-1},

$$2M\alpha'_3 - 2\alpha'_1 = \frac{e^2}{M}\left[1-2(1+\lambda)^2\right].$$

Аналогичное условие на четную функцию $\nu(T_2-T_4)'_0$ приводит к тому, что

$$2M\alpha'_3 = -\frac{e^2}{M}\left[3+2(1+\lambda)^2\right].$$

Тогда

$$\alpha'_1 = -2\frac{e^2}{M^2}.$$

Откуда

$$(R_1+R_2)'_0 = -2\frac{e^2}{M^2}\frac{1}{\nu} + O(1) \tag{14}$$

$$(R_3+R_4)'_0 = -\frac{e^2}{2M^3}\left[3+2(1+\lambda)^2\right] + O(\nu).$$

Условия исчезновения полюсов первого порядка в четных функциях $(T_1+T_3)'_0$ и $\nu(T_2+T_4)_0$ приводят к тому, что

$$(R_1-R_2)_0 = -\frac{e^2}{M}\left(1-\frac{3\nu}{M}\right) + O(\nu^2)$$
$$(R_3-R_4)'_0 = \frac{e^2}{2M^3}\left[-3+2(1+\lambda)^2\right] + O(\nu). \tag{15}$$

Аналогичные условия для функций $T_5)'_0$ и $T_6)'_0$ требуют, чтобы

$$(R_5-R_6)_0 = -\frac{e^2(1+\lambda)}{2M^2}\nu + \frac{e^2}{4M^3}\left[-2+8(1+\lambda)+(1+\lambda)^2\right]\nu^2 + O(\nu^3)$$

$$(R_3+R_4+2R_5+2R_6)'_0 = -\frac{e^2}{2M^3}(2\lambda^2-2\lambda-1). \tag{16}$$

Подчеркнем, что полученная предельная энергетическая зависимость справедлива для амплитуд в системе центра масс. Полученные результаты могут быть полезны при дисперсионном анализе рассеяния γ -квантов нуклонами.

Литература

1. F.E. Low. Phys., Rev., 96, 1428, 1954.
   M. Gell-Mann, M.L. Goldberger Phys., Rev., 96,1433,1954.
2. Л.И. Лапидус, Чжоу Гуан-чжао. ЖЭТФ, 39, 1286, 1960.
3. F.E. Low Phys., Rev., 110, 974, 1958.
4. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. ДАН СССР, 113, 529,1957.
5. T. Akiba, J. Sato Prog. Theor. Phys., 19, 93, 1958.
6. Л.И. Лапидус, Чжоу Гуан-чжао. "О роли одномезонной полюсной диаграммы в рассеянии γ -квантов протонами". ЖЭТФ (в печати).
7. С.М. Биленький, Р.М. Рындин "Об излучении мягких γ -квантов при рассеянии электронов протонами". Препринт ОИЯИ Д-589, 1960; ЖЭТФ (в печати).

Рукопись поступила в издательский отдел
23 февраля 1961 года.