ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

D-676

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ НЕЙТРАЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Дубна 1961 год

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

D–676

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ НЕЙТРАЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Направлено в ЖЭТФ

Показано, что теория нейтрального векторного поля с ненулевой массой покоя допускает калибровочно-инвариантную формулировку без вьедения вспомогательных полей. Калибровочная инвариантность в такой теории имеет тривиальный физический смысл: кванты нулевого спина, описываемые четыре-вектором A_μ, ни с чем не взаимодействуют. Во взаимодействии участвуют только кванты со спином 1.

1. Введение

Широко распространено убеждение [1-10], что теория нейтрального векторного поля $A_\mu(x)$ с ненулевой массой покоя, в отличие от электродинамики, не может быть сформулирована калибровочно инвариантным образом без привлечения вспомогательных полей. Это рассматривается как серьезное препятствие довольно часто предпринимаемым в последнее время попыткам проведения аналогии между барионным и электрическим или гиперонным и электрическим зарядами путем введения соответствующих векторных полей (Ли и Янг, Сакурай и др.) /5,6,7,9,10/.

В обычной формулировке теории нейтрального векторного поля используется уравнение (см., например, /11,12/)

$$\Box A_\mu - \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - m^2 A_\mu = -j_\mu, \qquad (1)$$

что эквивалентно уравнению

$$(\Box - m^2) A_\mu = -j_\mu \qquad (2)$$

с дополнительным условием

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \qquad (3)$$

Ни уравнение (1), ни уравнение (2) с дополнительным условием (3) не являются калибровочно инвариантными.

Необходимость дополнительного условия (3) мотивируется стремлением исключить спин 0 и обеспечить положительную определенность энергии.

Отметим, что ценой введения кроме 4-вектора $A_\mu(x)$ еще и некоего вспомогательного скалярного поля $B(x)$ Штюкельбергу /3/ удалось построить калибровочно инвариантный формализм векторного поля с дополнительным условием /1,4,8,11/. Однако, смысл калибровочной инвариантности в такой теории в значительной мере завуалирован.

Ниже будет показано, что теория нейтрального векторного поля с ненулевой массой покоя допускает калибровочно инвариантную формулировку без привлечения каких-либо вспомогательных полей. Для этого нужно вообще отказаться от дополнительного условия. В рассматриваемой теории $A_\mu(x)$ подчиняется только калибровочно инвариантному уравнению (2) (§ 2). Оказывается, что калибровочным преобразованиям подвергается лишь часть $A_\mu(x)$ со спином 0. Калибровочная инвариантность физически означает здесь, что у квантов векторного поля со спином нуль отсутствует взаимодействие с другими полями и между собой (§ 3). Поэтому для исключения спина нуль дополнительное условие оказывается излишним. В нем нет необходимости и для обеспечения положительной определенности энергии (§ 3). Такая теория полностью эквивалентна обычной теории нейтрального массивного векторного поля, основанной на уравнениях (1) или (2), (3) (§ 4).

Можно сказать, что в рассматриваемом случае калибровочная инвариантность играет ту же роль, которую обычно играют дополнительные условия в теории высших спинов. В отличие от обычных дополнительных условий она не исключает квантов ненужного спина, а лишь обезвреживает их.

2. Основные уравнения

Плотность лагранжиана, описывающего нейтральное векторное поле A_μ во взаимодействии со спинорным полем ψ x), выберем, как это часто делают /12/, в виде:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{m^2}{2}A_\mu A_\mu + j_\mu A_\mu - \bar{\psi}\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\right)\psi . \tag{4}$$

$$/\ j_\mu = ig\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\ /$$

Лагранжиан и вытекающие из него уравнения движения

$$(\Box - m^2)A_\mu = -j_\mu \tag{5}$$

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\right)\psi = ig\gamma_\mu\psi A_\mu , \tag{6}$$

---

x) Аналогично можно описать взаимодействие при наличии нескольких полей, а также при наличии связей типа аномального магнитного момента.

а также одновременные $/x_0 = y_0/$ перестановочные соотношения, аналогичные электродинамическим[x)],

$$
\begin{aligned}
&\{\psi(x), \psi(y)\} = 0 && \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = \gamma_4 \delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
&[A_\mu(x), A_\nu(y)] = 0 && \left[A_\mu(x), \frac{\partial A_\nu}{\partial y_4}(y)\right] = \delta_{\mu\nu} \delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
&[\psi(x), A_\nu(y)] = 0 && \left[\psi(x), \frac{\partial A_\nu}{\partial y_4}(y)\right] = 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

инвариантны[xx)] относительно калибровочных преобразований

$$\psi'(x) = \exp\left[ig\Lambda(x)\right]\psi(x) \tag{8}$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_\mu} \tag{9}$$

с произвольной $\Lambda(x)$, удовлетворяющей уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\Box - m^2)\Lambda = 0 . \tag{10}$$

Калибровочная инвариантность, таким образом, имеет место при $m \neq 0$ точно так же, как и в случае, когда в (4), (5) и (10) положено $m = 0$ (квантовая электродинамика).

---

x) Одновременные перестановочные соотношения могут быть выбраны в такой форме, так как дополнительное условие на операторы поля A_μ не накладывается.

xx) Плотность лагранжиана (4) при этом инвариантна с точностью до несущественной дивергенции (см. Приложение 1).

Заметим, что в отличие от /5,6,7,9/, где $\Lambda(x)$ предполагались совершенно произвольными, в рассматриваемых здесь преобразованиях (8), (9) $\Lambda(x)$ ограничены условием (10). Такая же ограниченность имеет место и в квантовой электродинамике, в отличие от классической.

Из калибровочной инвариантности лагранжиана или уравнений следует закон сохранения[x)]

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[-j_\mu\Lambda-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\nu}+A_\nu\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\right]=0. \qquad (11)$$

Это равенство должно соблюдаться при любых $\Lambda(x)$, удовлетворяющих уравнению (10). В частности при $\Lambda=\mathrm{const}$ получаем

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}=0 \qquad (12)$$

– закон сохранения тока.

Дифференцируя (5) с учетом (12), получаем уравнение

$$(\Box-m^2)\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0, \qquad (13)$$

которое нам сейчас понадобится.

3. Отсутствие взаимодействия у квантов со спином 0

Четыре-вектор $A_\mu(x)$ используют, имея в виду описание частиц со спином 1. В рамках однородной группы Лоренца нет величин, описывающих только спин 1. В соответствии с этим $A_\mu(x)$, наряду с квантами спина 1, описывает еще и кванты со спином 0; A_μ может быть разбит на 2 части:

---

x) Вывод закона сохранения и обсуждение связанного с ним оператора преобразования векторов состояния см. в Приложении 1.

$$A_\mu = \left(A_\mu - \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\right) + \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\,, \tag{14}$$

где первая часть

$$A_\mu - \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} \tag{15}$$

описывает кванты со спином 1, а вторая

$$\frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} \tag{16}$$

– кванты нулевого спина.

В этом можно убедиться, применяя ковариантный оператор квадрата спина[13–16] для поля $A_\mu(x)$ (см. Приложение 11):

$$\left(\Gamma^2\right)_{\mu\nu} = 2\left(\delta_{\mu\nu}\Box - \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right) \tag{17}$$

с собственными значениями $s(s+1)\Box$ при спине s. Именно, используя уравнение (13), легко проверить, что

$$\left(\Gamma^2\right)_{\mu\nu}\left(A_\nu - \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\lambda}\right) = 2\Box\left(A_\mu - \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\lambda}\right) \tag{18}$$

$$\left(\Gamma^2\right)_{\mu\nu}\frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\lambda} = 0. \tag{19}$$

Естественно, что те же кванты нулевого спина описывает и сам скаляр $\dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}$.

Следует подчеркнуть, что калибровочное преобразование (9) при условии (10) изменяет лишь часть A_μ со спином 0

$$\frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A'_\nu}{\partial x_\nu} = \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu}, \tag{20}$$

тогда как часть со спином 1 остается неизменной

$$A'_\mu - \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A'_\nu}{\partial x_\nu} = A_\mu - \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\,. \tag{21}$$

Если мы хотим рассматривать только кванты со спином 1, то, казалось бы, необходимы меры для исключения квантов с нулевым спином.

Наше утверждение сводится к тому, что никаких специальных мер (например, наложение дополнительного условия) в случае ненулевой массы покоя векторных квантов принимать не нужно. Уже из самих калибровочно-инвариантных уравнений поля (5) и (6) следует, что кванты со спином 0 не взаимодействуют с другими полями и между собой: описывающая их часть A_μ подчиняется свободному уравнению

$$\left(\Box - m^2\right)\frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \tag{22}$$

(тривиальное следствие уравнения (10)). Следовательно, уравнению со взаимодействием (5) подчиняется лишь часть A_μ со спином 1

$$\left(\Box - m^2\right)\left(A_\mu - \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\right) = -j_\mu . \tag{23}$$

Таким образом, частицы со спином 0 не влияют на физику: если какой-то комплекс их присутствует в начальном состоянии, то точно такой же комплекс их будет и в конечном состоянии. В противном случае матричный элемент S -матрицы равен нулю. Это утверждение может быть сформулировано на языке законов сохранения. Из свободного уравнения (13) следуют законы сохранения полных 4-импульса $P_\mu^{(o)}$ и момента $M_{\mu\nu}^{(o)}$ скалярного поля $\frac{1}{m}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}$ и, более того, числа квантов с каждым значением импульса. Тем самым, S - матрица диагональна по квантовым числам скалярных фотонов.

Наложение дополнительного условия вида

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \tag{24}$$

или

$$\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right)_- \Phi = 0 \quad ^{x)} \tag{25}$$

---

x) Это условие в рассматриваемой теории фиксирует калибровку и означает отсутствие скалярных квантов в физических состояниях Φ .

для исключения спина 0 является излишним, так как касается только той части $A_\mu(x)$, которая описывает ни с чем не взаимодействующие, свободные кванты нулевого спина.

В качестве еще одного довода, а иногда и основного [1,2], в пользу необходимости наложения условия (24) приводили соображение, что в противном случае оператор полной энергии P_0 не является положительно-определенным. Однако, оператор энергии $P_0^{(0)}$ всегда свободных квантов со спином 0 сохраняется. Поэтому в качестве физического оператора энергии можно принять оператор[x)]

$$P_0^{\text{физ}} = P_0 - P_0^{(0)}. \tag{26}$$

Этот оператор сохраняется, калибровочно-инвариантен и его спектр положительно определен. По существу такое вычитание можно было бы и не делать. Тогда энергия отсчитывалась бы не от нуля, а от некоторого зависящего от калибровки отрицательного уровня. Таким образом, и с этой точки зрения нет необходимости в дополнительном условии (24).

4. Эквивалентность обычной теории с дополнительным условием

Хотя скалярное поле $\frac{1}{m}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}$ и оказалось свободным, но оно еще не исключено из уравнения Дирака (6). Разобьем теперь оператор ψ мультипликативно на зависящую и независящую от калибровки части

$$\psi(x) = \exp\left[ig\frac{1}{m^2}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\right]\varphi(x), \tag{27}$$

где

$$\varphi(x) = \exp\left[-ig\frac{1}{m^2}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\right]\psi(x) \tag{28}$$

---

x) Конкретный вид оператора $P_0^{\text{физ}}$ для свободного поля A_μ см. в Приложении III.

– независящая[x] от калибровки часть ψ. Тогда в переменных φ лагранжиан /4/ и уравнение Дирака /6/ запишутся

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{m^2}{2}A_\mu A_\mu + \frac{ig}{2}\bar\varphi\gamma_\mu\left(\varphi A_\mu^{(1)} + A_\mu^{(1)}\varphi\right) - \bar\varphi\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\right)\varphi \tag{29}$$

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\right)\varphi = \frac{ig}{2}\gamma_\mu\left(\varphi A_\mu^{(1)} + A_\mu^{(1)}\varphi\right), \tag{30}$$

где

$$A_\mu^{(1)} \equiv A_\mu - \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}. \tag{31}$$

Заметим далее, что с точностью до 4-мерной дивергенции плотность лагранжиана (29) может быть переписана в виде

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(1)}F_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{m^2}{2}A_\mu^{(1)}A_\mu^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{1}{m}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\right)^2 + \frac{m^2}{2}\left(\frac{1}{m}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\right)^2 + \frac{ig}{2}\bar\varphi\gamma_\mu\left(\varphi A_\mu^{(1)} + A_\mu^{(1)}\varphi\right) - \bar\varphi\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\right)\varphi, \tag{32}$$

где

$$F_{\mu\nu}^{(1)} \equiv \frac{\partial A_\nu^{(1)}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu^{(1)}}{\partial x_\nu}. \tag{33}$$

Этот лагранжиан соответствует обычной теории взаимодействия спинорного поля φ и векторного поля $A_\mu^{(1)}$ с дополнительным условием

$$\frac{\partial A_\mu^{(1)}}{\partial x_\mu} = 0 \tag{34}$$

и, кроме того, описывает свободное скалярное поле $\frac{1}{m}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}$.

---

[x] С точностью до постоянного фазового множителя: при преобразованиях (8), (9), (10) $\varphi' = \exp\left[-\frac{ig}{m^2}(\Box - m^2)\Lambda\right]\varphi = \exp\left[-\frac{ig}{m^2}\mathrm{const}\right]\varphi$.

Перестановочные соотношения для полей φ и $A_\mu^{(1)}$ такие же как в обычной векторной теории с дополнительным условием [x)]. В то же время взаимодействующие поля φ и $A_\mu^{(1)}$ коммутируют со скалярным полем $\frac{1}{m}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}$ и со всеми его производными. Следовательно, скалярное поле $\frac{1}{m}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}$ совершенно динамически независимо. Таким образом, рассмотренная теория полностью эквивалентна обычной теории нейтрального векторного поля с дополнительным условием. Эквивалентность обеих теорий можно установить и другим способом – с помощью унитарного преобразования Дайсона[17,11], также "выключающего" векторное взаимодействие скалярного поля.

Отметим, что наложение дополнительного условия не только придает теории некалибровочно инвариантный вид, но заставляет испытывать некоторые другие неудобства. Например, использование соответствующих такой теории функций распространения в теории возмущений приводит к тому, что перенормируемость становится не совсем очевидной (см.[12], стр. 235).

5. Заключительные замечания

Сделаем одно замечание о перенормировке массы. Калибровочным преобразованиям подвергается только та часть A_μ, которая описывает кванты со спином 0. Следовательно, только для этих квантов можно ожидать, что их масса не должна перенормироваться. И действительно это так, ибо они ни с чем не взаимодействуют. Что же касается квантов со спином 1, то их масса, естественно, перенормируется в процессе взаимодействия. Уравнение (5) с учетом перенормировки массы квантов со спином 1, например, можно записать в виде:

$$(\square - m^2)A_\mu = -j_\mu - \delta m^2\left(A_\mu - \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\right). \qquad (35)$$

Наконец, отметим, что в рассматриваемой теории векторного поля A_μ с массой функции Грина подчиняются таким же законам калибровочных преобразований, как и в электродинамике[18–22]. Такие законы связывают средние по одному

---

x) Их можно получить из перестановочных соотношений (7) и уравнений движения (5), (6).

и тому же состоянию от произведений операторов в двух разных калибровках. Это состояние в обеих калибровках есть вакуум для квантов со спином 1, но лишь с точки зрения одной из них не содержит квантов со спином 0. (Приложение 1). Из указанных законов следуют, как и в электродинамике, тождества Уорда.

Авторы сердечно благодарят М.А. Маркова и Б.Н. Валуева за общие замечания, А.А. Логунова и М.И. Широкова за дискуссию вопроса об операторе квадрата спина. Мы особенно признательны Л.Г. Заставенко, Я.А. Смородинскому и Чжоу Гуан-чжао за стимулирующие обсуждения ряда пунктов работы.

Приложение 1

Закон сохранения, следующий из калибровочной инвариантности

Плотность лагранжиана (4) после калибровочного преобразования (8), (9) с учетом условия (10) отличается от первоначальной на дивергенцию

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(A_\nu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right), \tag{1.1}$$

или инфинитезимально

$$\delta \mathcal{L} = -\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(A_\nu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right). \tag{1.2}$$

Вычисляя вариацию $\mathcal{L}(x)$ обычным образом с использованием уравнений Эйлера, приходим к закону сохранения (11)

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[-j_\mu \Lambda - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu} + A_\nu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right] = 0. \tag{1.3}$$

В этот закон сохранения можно подставить любые функции $\Lambda(x)$, ограниченные лишь уравнением (10), поэтому (1.3) представляет собой континуум законов сохранения соответственно континууму параметров калибровочной группы.

Легко убедиться, что уравнение (1.3) эквивалентно уравнению (5).

Отметим, что закон сохранения (1.3) можно еще переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\right)\Lambda - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} + A_\mu(\Box - m^2)\Lambda\right] = 0. \qquad (1.4)$$

Сохраняющийся оператор в квантовой теории поля служит инфинитезимальным оператором преобразования векторов состояния, связывающего собственные векторы с одинаковыми собственными значениями в разных системах отсчета, калибровках и т.п. Таким преобразованием при переходе от одной калибровки к другой будет

$$\Psi' = U\Psi, \qquad (1.5)$$

где

$$U = \exp\left\{\int d\vec{x}\left[-j_4\Lambda - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_4}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu} + A_\nu\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_4 \partial x_\nu}\right]\right\} = \qquad (1.6)$$

$$= \exp\left\{\int d\vec{x}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_4}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\right)\Lambda - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_4} + A_4(\Box - m^2)\Lambda\right]\right\}. \qquad (1.7)$$

Закон калибровочных преобразований операторов поля (8) и (9) тогда запишется

$$\psi'(x) = U\psi(x)U^{-1} = \exp\left[ig\Lambda(x)\right]\psi(x) \qquad (1.8)$$

$$A'_\mu(x) = UA_\mu(x)U^{-1} = A_\mu(x) + \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_\mu}, \qquad (1.9)$$

что легко проверить с помощью перестановочных соотношений (7).

С точки зрения различных калибровок одно и то же состояние обладает различными наборами невзаимодействующих скалярных квантов.

Это мы сейчас проиллюстрируем на примере преобразования вакуума. При этом ограничимся $\Lambda(x)$, удовлетворяющими

$$(\Box - m^2)\Lambda(x) = 0, \qquad (1.10)$$

что позволяет представить $\Lambda(x)$ в виде

$$\Lambda(x) = \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} \left[\lambda(\vec{p}) e^{ipx} + \lambda^*(\vec{p}) e^{-ipx}\right] \qquad \Big/ p_0 \equiv \sqrt{\vec{p}^2+m^2} \Big/ \quad (1.11)$$

Кроме того, в силу свободного уравнения (13) возможна запись для $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}$

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = i \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} \left[a_\mu p_\mu e^{ipx} - a_\mu^+ p_\mu e^{-ipx}\right] \qquad \Big/ p_0 \equiv \sqrt{\vec{p}^2+m^2} \Big/, \quad (1.12)$$

где $a_\mu p_\mu$ и $a_\mu^+ p_\mu$ операторы рождения и уничтожения[x)] скалярных квантов с перестановочными соотношениями[xx)]

$$\left[a_\mu(\vec{p}_1) p_{1\mu}, a_\nu^+(\vec{p}_2) p_{2\nu}\right] = -m^2 \, \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2), \qquad (1.13)$$

согласующимися с (7).

Подставляя (1.11) и (1.12) в (1.7), получаем

$$U = \exp\left\{-i \int d\vec{p} \left[a_\mu p_\mu \lambda^*(\vec{p}) + a_\mu^+ p_\mu \lambda(\vec{p})\right]\right\}. \qquad (1.14)$$

Если определить вакуумы в двух разных калибровках согласно[xxx)]

$$a_\mu^+ p_\mu \Psi_0 = 0 \qquad\qquad a_\mu'^+ p_\mu \Psi_0' = 0, \qquad (1.15)$$

то преобразование U (1.14), связывающее Ψ_0' и Ψ_0, дает

---

x) См. Приложение III.

xx) Их можно рассматривать как следствие более общих, но имеющих смысл только в свободном случае, перестановочных соотношений

$$\left[a_\mu(\vec{p}_1), a_\nu^+(\vec{p}_2)\right] = \delta_{\mu\nu}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2).$$

xxx) Мы не выписываем условий того, что в Ψ_0 и Ψ_0' нет квантов со спином 1. Эти условия калибровочно инвариантны.

$$\Psi_0' = U\Psi_0 = \exp\left\{ -\frac{m^2}{2}\int d\vec{p}\,\lambda(\vec{p})\,\chi^*(\vec{p}) - i\int d\vec{p}\,\chi^*(\vec{p})\,a_\mu p_\mu \right\}\Psi_0 . \qquad (1.16)$$

Последнее выражение дает разложение вакуума новой калибровки Ψ_0' по состояниям старой, порождаемым операторами рождения $a_\mu p_\mu$ из старого вакуума Ψ_0.

Таким образом, вакуум с точки зрения одной калибровки не есть вакуум с точки зрения другой.

Это понятно, так как условие (1.15), как и более общее условие (25), не калибровочно-инвариантны, поскольку являются условиями, фиксирующими, закрепляющими калибровку.

Приложение 11
Оператор квадрата спина для поля A_μ.

Общее определение оператора квадрата спина (одного из инвариантов неоднородной группы Лорентца) для произвольных многокомпонентных функций, преобразующихся по представлениям неоднородной группы Лорентца, было дано и обсуждалось в ряде работ [13-16]. Это определение гласит [16]

$$\Gamma^2 = -p_\lambda^2\, m_{\rho\sigma} m_{\rho\sigma} + m_{\lambda\rho} m_{\lambda\sigma} p_\rho p_\sigma , \qquad (11.1)$$

где

$$p_\lambda = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \qquad (11.2)$$

$$m_{\rho\sigma} = \frac{1}{i}\left(x_\rho \frac{\partial}{\partial x_\sigma} - x_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\rho}\right) + s_{\rho\sigma} \qquad (11.3)$$

– инфинитезимальные операторы сдвига и 4-вращений для данной функции. Матрицы $s_{\rho\sigma}$ являются инфинитезимальными операторами вращения ее компонент.

Так как для векторной функции

$$(s_{\rho\sigma})_{\mu\nu}' = i\left(\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu} - \delta_{\rho\nu}\delta_{\sigma\mu}\right), \qquad (11.4)$$

то подстановка (11.2), (11.3) и (11.4) в (11.1) как раз и дает выражение (17)

$$\left(\Gamma^2\right)_{\mu\nu} = 2\left(\delta_{\mu\nu}\Box - \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right). \tag{11.5}$$

Закон преобразования векторной функции $A_\mu(x)$, а значит, и инфинитезимальные операторы p_λ и $m_{\rho\sigma}$ и построенный из них оператор квадрата спина (11.1) или (11.5) не зависят от того подчинена $A_\mu(x)$ каким-либо уравнениям или нет. Однако, если в случае уравнений без взаимодействия $A_\mu(x)$ может быть разбита на независимые части со спином 0 и 1, то в случае взаимодействия могло бы быть и не так.

В нашем случае, как мы видели (§ 3), даже при наличии взаимодействия $A_\mu(x)$ разбивается на динамически независимые части со спином 0 и 1.

Приложение 111

Нормальное произведение операторов векторного поля и определение физического оператора энергии в свободном случае

В свободном случае удобно определять все операторы в виде нормальных произведений, то есть так, чтобы операторы рождения стояли слева от операторов уничтожения.

Например, в таком смысле мы хотели бы понимать оператор 4-импульса

$$P_\mu = \int d\vec{p}\ p_\mu :a_\nu^+ a_\nu: \qquad \left/ p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \right/, \tag{111.1}$$

что и обозначаем двоеточием.

Операторы a_ν и a_ν^+ подчинены перестановочным соотношениям

$$\left[a_\mu(\vec{p}_1), a_\nu^+(\vec{p}_2)\right] = \delta_{\mu\nu}\,\delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2). \tag{111.2}$$

Из этих соотношений ясно, что операторами уничтожения являются a_m и a_0^+, а операторами рождения a_m^+ и a_0. Однако запись нормального произведения в (111.1) в виде

$$:a_\nu^+ a_\nu: = a_m^+ a_m - a_0 a_0^+ \qquad (111.3)$$

неприемлема, хотя бы из-за нековариантности. Ковариантное определение можно дать, если разбить операторы a_μ и a_μ^+ на части со спином 0 и 1.

	Операторы уничтожения	Операторы рождения
$s=1$	$a_\mu - \frac{a_\nu p_\nu}{p^2} p_\mu$	$a_\mu^+ - \frac{a_\nu^+ p_\nu}{p^2} p_\mu$
$s=0$	$\frac{a_\nu^+ p_\nu}{p^2} p_\mu$	$\frac{a_\nu p_\nu}{p^2} p_\mu$

(111.4)

$$/\, p^2 = -m^2 /$$

Спин этих частей может быть установлен с помощью ковариантного оператора квадрата спина (17)[x], записанного в импульсном представлении. Смысл их как операторов уничтожения и рождения следует из (111.2).

Нормальные произведения теперь запишутся, например,

$$:\left(a_\mu^+ - \frac{a^+p}{p^2}p_\mu\right)\left(a_\nu - \frac{ap}{p^2}p_\nu\right): = :\left(a_\nu - \frac{ap}{p^2}p_\nu\right)\left(a_\mu^+ - \frac{a^+p}{p^2}p_\mu\right): =$$

$$= \left(a_\mu^+ - \frac{a^+p}{p^2}p_\mu\right)\left(a_\nu - \frac{ap}{p^2}p_\nu\right) \qquad (111.5)$$

$$:\frac{a^+p}{p^2}p_\mu \frac{ap}{p^2}p_\nu: = :\frac{ap}{p^2}p_\nu \frac{a^+p}{p^2}p_\mu: = \frac{ap}{p^2}p_\nu \frac{a^+p}{p^2}p_\mu . \qquad (111.6)$$

---

x) См. Приложение 11.

В смешанных произведениях с $S=1$ и $S=0$ порядок несущественен вследствие коммутации.

Нормальное произведение в (111.1) может теперь быть раскрыто как

$$P_\mu = \int d\vec{p}\; p_\mu \left\{ \left[a_\nu^+ a_\nu - \frac{(a^+p)(ap)}{p^2} \right] + \frac{(ap)(a^+p)}{p^2} \right\}. \tag{111.7}$$

Первый член в фигурных скобках есть положительно определенный оператор числа квантов со спином 1, а второй – отрицательно определенный оператор числа квантов со спином 0. Соответственно энергия квантов со спином 1 определена положительно, а квантов со спином 0 – отрицательно.

Если из P_μ вычесть 4-вектор энергии-импульса квантов со спином 0, то получим в свободном случае инвариантный относительно калибровочных преобразований $/ a_\mu \to a_\mu + i\lambda(\vec{p})\, p_\mu /$ оператор энергии-импульса квантов со спином 1 (физических)

$$P_\mu^{\text{физ}} = \int d\vec{p}\; p_\mu \left[a_\nu^+ a_\nu - \frac{(a^+p)(ap)}{p^2} \right] \tag{111.8}$$

с положительно определенной энергией.

Литература

1. В. Паули. Релятивистская теория элементарных частиц. М., 1947 , стр.43.

2. Г.Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей. М.-Л. 1947. стр.138.

3. E.C.G.Stueckelberg. Helv.Phys.Acta, 11, 225, 229 (1938).

4. R.J. Glauber. Prog.Theor.Phys. 9, 295 (1953).

5. T.D. Lee,C.N.Yang. Phys.Rev. 98, 1501 (1955).

6. R.Utiyama. Phys.Rev. 101, 1597 (1956).

7. M.E. Mayer. Препринт ОИЯИ, Р-212 (1958).

8. Y.Fujii. Prog. Theor. Phys. 21, 232 (1959).

9. H.Nakamura. Prog. Theor. Phys. 21, 827 (1959).

10. J.J. Sakurai. Annals of Physics, 11, 1 (1960).

11. Х. Умэдзава. Квантовая теория поля. М, 1958.

12. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков.Введение в теорию квантованных полей.М. 1957.

13. M.H.L.Pryce. Proc. Roy. Soc. 150A, 166 (1935).
    Proc. Roy. Soc. 195A, 62 (1948).

14. В.Паули. См. J.K. Lubanski. Physica IX, 310 (1942).

15. V.Bargman and E.P.Wigner. Proc. Nat.Acad.Sci. USA, 34, N 5, 211 (1948).

16. Ю.М. Широков. ЖЭТФ, 21, 748 (1951).

17. F.J. Dyson. Phys.Rev. 73, 929 (1948).

18. Л.Д.Ландау и И.М. Халатников. ЖЭТФ, 29, 89 (1955).

19. Е.С. Фрадкин. ЖЭТФ, 29, 258 (1955).

20. S. Okubo. Nuovo Cimento, 15, 949 (1960).

21. L.Evans, G. Feldman, P.T.Matthews, preprint (1960).

22. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. Препринт ОИЯИ, Д-618 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
14 февраля 1961 года.