

3
И-85

213
УЧ. ЧИТ. ЗАЛ



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

П.С. Исаев и М.В. Сэверыньский

D - 651

РАССЕЯНИЕ π -МЕЗОНОВ
НА K -МЕЗОНАХ

В ОБЛАСТИ МАЛЫХ ЭНЕРГИЙ

Nucl. Phys., 1961, v 27, n 1, p 148-153.

Дубна 1961 г.

П.С. Исаев и М.В. Сэвэрыньский

D - 651

РАССЕЯНИЕ π -МЕЗОНОВ
НА K -МЕЗОНАХ
В ОБЛАСТИ МАЛЫХ ЭНЕРГИЙ

Направлено в журнал 'Nucleon Physics'

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

968/9 48-

А н н о т а ц и я

В приближении effective-range теории получены явные выражения для S и p -фаз π - K рассеяния.

1. В работе ¹ были получены приближенные уравнения для парциальных амплитуд π -K рассеяния. Получение точных решений этих уравнений в настоящее время связано с большими трудностями: во-первых, необходимо знание S и P -фаз рассеяния π мезонов на π -мезонах, и, во-вторых, до сих пор нет надежного правила отбора физического решения из решений, получаемых итерационным путем на электронных счетных машинах.

Однако, в грубом приближении в области малых энергий можно получить одно из возможных решений систем уравнений /25-26/ и /30-33/ из работы ¹, именно, решение $T_e^{1/2}(q^2) = T_e^{3/2}(q^2)$, где $T_e^J(q^2)$ парциальная амплитуда π -K рассеяния, зависящая от квадрата импульса π -мезона q^2 в системе центра масс, в состоянии со значением изотопического спина $= J$ и значением орбитального момента $l = 0$ или 1. Его целесообразно использовать в качестве первого приближения при решении более точных уравнений методом итерации на электронных счетных машинах, поскольку известно, что вид решения, найденный этим методом, сильно зависит от выбора первого приближения.

Итак, предположим, что $T_e^{1/2} = T_e^{3/2}$. Тогда система уравнений /25-26/ из ¹, записанная для парциальных амплитуд π -K рассеяния, усредненных по всем углам, запишется в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T_e(q^2) = \operatorname{Re} T_e(0) + \frac{1}{16\pi^2} P \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{W(x)} \left\{ \left[n_e(x, q^2) - n_e(x, 0) \right] |T_e(x)|^2 + \right. \\ \left. + 3 \left[\varphi_e(x, q^2) - \varphi_e(x, 0) \right] |T_e(q^2)|^2 \right\} dx, \end{aligned} \quad /1/$$

а система уравнений 30-33 из ¹ для амплитуд π -K рассеяния в случае рассеяния назад будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T_e(q^2) = \operatorname{Re} T_e(0) + \frac{1}{8\pi^2} P \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{W(x)} \left\{ \frac{|T_e(x)|^2}{x(x-q^2)} \left[x \left(V(x, q^2) - V(x, 0) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + q^2 V(x, 0) \right] + 3 \frac{|T_e(x)|^2}{x(x-q^2)} \left[x \left(L(x, q^2) - L(x, 0) \right) + q^2 L(x, 0) \right] \right\} dx \end{aligned} \quad /2/$$

$$\operatorname{Re} T_2(q^2) = \frac{1}{24\pi^2} P \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{W(x)} \left\{ \frac{|T_0(x)|^2}{x(x-q^2)} \left[x \left(C(x, q^2) - C(x, 0) \right) + q^2 C(x, 0) \right] + \right. \\ \left. + 3 \frac{|T_1(x)|^2}{x(x-q^2)} \left[x \left(Q(x, q^2) - Q(x, 0) \right) + q^2 Q(x, 0) \right] \right\} dx. \quad /3/$$

В уравнениях /1/-/3/ n_e, φ_e, V, L, C и Q - сложные функции переменных q^2 и x , полные обозначения которых даны в ¹. $W(x)$ полная энергия \mathcal{K} - \mathcal{K} системы.

Интересно отметить, что P - волна \mathcal{K} - \mathcal{K} рассеяния не входит в уравнения /1/-/3/, что дает большую свободу при выборе явного выражения для S -волны \mathcal{K} - \mathcal{K} рассеяния, так как теперь нет нужды заботиться о самосогласованности S - и P -фаз.

В данной работе выражение для S волны \mathcal{K} - \mathcal{K} рассеяния взято из работы ².

S - волна \mathcal{K} - \mathcal{K} рассеяния входит в уравнения /1/-/3/ посредством экспоненты $\exp[u(q^2, z_1) - u(x, z_1)]$. Расчет показывает, что учет S - фазы приводит для экспоненты к значениям, близким к единице: отклонения не превышают 5% до значений $X \sim 10 \mu^2 / \mu$ - масса покоящегося \mathcal{K} - мезона / в уравнениях /1/ и не превышают 15% до тех же значений X в уравнениях /2/-/3/. При значениях $X \geq 10 \mu^2$ должна сильно сказываться вычитательная процедура и интегральный вклад в уравнениях /1/-/3/ в области $X > 10 \mu^2$ должен быть несущественно малым.

Поэтому для простоты расчетов естественно положить $\exp[u(q^2, z_1) - u(x, z_1)] = 1$ во всей области изменения переменной x . В том же предположении, а именно, что основной вклад от интегралов по X в уравнениях /1/-/3/ должен происходить от области малых X , можно использовать следующие приближенные выражения для функций

$$n_e, \varphi_e, V, C, L, Q \text{ и } W:$$

$$\eta_e(x, q^2) = \frac{1}{x - q^2} \int_{-1}^{+1} P_e(z) dz, \quad ; \quad \varphi_e(x, q^2) = \frac{1}{x - q^2} \int_{-1}^{+1} P_e(z) dz,$$

$$V(x, q^2) = 1 \quad ; \quad L(x, q^2) = 0 \quad ; \quad C(x, q^2) = 0 \quad ;$$

$$Q(x, q^2) = 1 \quad ; \quad W(x) = \sqrt{(M + \mu)^2 + x \left(2 + \frac{M}{\mu}\right)}.$$

M - масса K -мезона.

Подставляя эти приближенные выражения в уравнения /1/-/3/, получим в обоих случаях одну и ту же систему расщепляющихся уравнений:

$$\operatorname{Re} T_0(q^2) = \operatorname{Re} T_0(0) + \frac{q^2}{8\pi^2} \rho \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{W(x)} \cdot \frac{|T_0(x)|^2}{x(x - q^2)} dx \quad /4/$$

$$\operatorname{Re} T_1(q^2) = \frac{q^2}{8\pi^2} \rho \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{W(x)} \cdot \frac{|T_1(x)|^2}{x(x - q^2)} dx \quad /5/$$

2. Связь изотопически-спиновых состояний T^J с фазами рассеяния имеет вид:

$$T^J = \frac{8\pi W(x)}{\sqrt{x}} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \exp\{i\delta_e^J\} \sin \delta_e^J \cdot P_{\ell}(z). \quad /6/$$

Отсюда легко получить следующее соотношение:

$$\frac{\operatorname{Im} T_e(x)}{|T_e(x)|^2} = \frac{\sqrt{x}}{8\pi W(x)}. \quad /7/$$

3. Решение уравнения /4/ будем искать в виде

$$T_0(q^2) = \frac{b}{v(q^2)}, \quad /8/$$

где $\operatorname{Re} v(0)$ - величина, связанная с длиной рассеяния, а b - некоторая константа. Из /8/ следует, что аналитические свойства функции $v(q^2)$ определяются аналитическими свойствами функции $T_0(q^2)$. Используя условие /7/, получаем явное выражение для $v(q^2)$:

$$v(q^2) = \operatorname{Re} v(0) - \frac{b q^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{w(x)} \cdot \frac{dx}{x(x-q^2)} \quad /9/$$

или

$$v(q^2) = \operatorname{Re} v(0) - \frac{b}{8\pi^2 \sqrt{\lambda + \frac{\nu}{q^2}}} \ln \frac{\sqrt{\lambda + \frac{\nu}{q^2}} - \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda + \frac{\nu}{q^2}} + \sqrt{\lambda}} - \frac{i b}{8\pi \sqrt{\lambda + \frac{\nu}{q^2}}}, \quad /10/$$

где $\nu = (M + \mu)^2$, $\lambda = 2 + \frac{M}{\mu} x'$. Из /8/ и /10/ видно, что в T_0 практически входит лишь одна константа, именно $\frac{b}{\operatorname{Re} v(0)}$. Поэтому в дальнейшем положим величину b равной единице.

^{x/} В том случае, когда в выражении /9/ вычитание проводится не в нуле, а в некоторой точке $0 \geq q_0^2 > -\frac{\nu}{\lambda}$ и интеграл обрывается при некотором значении параметра L , для функции $v(q^2)$ будем иметь следующее выражение:

$$v(q^2) = \operatorname{Re} v(q_0^2) - \frac{1}{8\pi^2 \sqrt{\lambda + \frac{\nu}{q^2}}} \ln \frac{\sqrt{\lambda + \frac{\nu}{q^2}} - \sqrt{\lambda + \frac{\nu}{L}}}{\sqrt{\lambda + \frac{\nu}{q^2}} + \sqrt{\lambda + \frac{\nu}{L}}} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{\lambda + \frac{\nu}{q^2}}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\lambda + \frac{\nu}{L}}}{\sqrt{\lambda + \frac{\nu}{q^2}}} \right) - \frac{i}{8\pi \sqrt{\lambda + \frac{\nu}{q^2}}} \quad /10a/$$

/В формуле /10a/ вместо q_0^2 следует подставлять положительные значения q_0^2 , именно $\frac{\nu}{\lambda} > q_0^2 \geq 0$ /. Выражение /10a/ целесообразно использовать при сравнении результатов данной работы с результатами работы ³.

Мы должны потребовать далее, чтобы во всей плоскости комплексной переменной y функция $v(y)$ была отлична от нуля. Отсюда следует, что константа вычитания может принимать только положительные значения, т.е. $Re v(0) > 0$ ^{x/}. Из выражения /10/ получается следующее выражение для S - фазы:

$$\frac{q}{\sqrt{v + \lambda q^2}} \operatorname{ctg} \delta_0 = 8\pi Re v(0) - \frac{1}{\pi \sqrt{\lambda + \frac{v}{q^2}}} \ln \frac{\sqrt{\lambda + \frac{v}{q^2}} - \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda + \frac{v}{q^2}} + \sqrt{\lambda}} \quad /11/$$

Для сравнения S - фазы, полученной в данной работе, с S - фазой, полученной в работе ³, следует предположить в /10а/ , что величина $q_0^2 = \mu^2$ / что соответствует точке вычитания из работы ³ /. Результаты сравнения приведены на рис. 1 /небольшое различие связано с выбором приближения для $W(k)$ /.

Важно подчеркнуть, что область изменения константы $Re v(0)$ явно зависит от выбора точки вычитания. Выражение /11/ при подходящем выборе констант практически совпадает с выражением для S - фазы из работы ⁵.

4. Уравнение /5/ не содержит неоднородного члена и поэтому при нахождении решения методом обратной функции оказывается необходимым учет отрицательного разреза. Действительно, если искать решение уравнения /5/ в виде:

$$T_1 = \frac{q^2}{V(q^2)}, \quad /12/$$

использовать выражение для $\operatorname{Im} V(q^2)$

$$\operatorname{Im} V(q^2) = - \frac{q^3}{\operatorname{Im} W(q^2)},$$

считать, как и в случае S - волны, что аналитические свойства функции $V(q^2)$ определяются свойствами функции $T_1(q^2)$, то, записывая теорему Коши для функции $V(q^2)$ и проводя два вычитания, получим:

$$Re V(q^2) = A + Bq^2 - J(q^2), \quad /13/$$

где

^{x/} В работах ³ и ⁴ рассматривались аналогичные ограничения, налагаемые на величину константы связи. Эти ограничения могут быть получены и в нашей работе, если ввести вычитание в подходящей точке и потребовать, чтобы функция $V(q^2)$ не имела нуля в области $-\mu^2 \leq q^2 \leq 0$.

$$A = \operatorname{Re} V(0); \quad B = \left. \frac{\partial \operatorname{Re} V(q^2)}{\partial q^2} \right|_{q^2=0}$$

$$J(q^2) = \frac{q^{\nu}}{8\pi^2} \rho \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x(x-q^2)W(x)}.$$

Элементарная проверка показывает, однако, что решение /14/ дает нуль функции $V(q^2)$ в области $q^2 < 0$. Чтобы не допустить появления нуля в этой области, надо

- а/ либо учесть влияние отрицательного разреза x' ,
- б/ либо ввести обрезание, что приводит к появлению третьей константы.

Для нашей цели - получения приближенного решения уравнения /5/ в области малых q^2 достаточно ввести обрезание L при условии $q^2 \ll L$.

В этом случае решение принимает вид:

$$\frac{q^3}{\sqrt{\nu + \lambda q^2}} \operatorname{ctg} \delta_1 = 8\pi (A + Bq^2) - \frac{q^2}{\pi \sqrt{\lambda + \frac{\nu}{q^2}}} \ln \frac{\sqrt{\lambda + \frac{\nu}{q^2}} - \sqrt{\lambda + \frac{\nu}{L}}}{\sqrt{\lambda + \frac{\nu}{q^2}} + \sqrt{\lambda + \frac{\nu}{L}}}. \quad /14/$$

В области $q^2 \approx 0$ последний член в соотношении /14/ стремится к нулю быстрее чем второй, и выражение /14/ может быть записано в виде

$$\frac{q^3}{\sqrt{\nu + \lambda q^2}} \operatorname{ctg} \delta_1 = 8\pi A \left(1 + \frac{B}{A} q^2\right), \quad /15/$$

что находится в хорошем согласии с результатами работы ⁵.

З а к л ю ч е н и е

В последнее время проблема π - K рассеяния исследуется весьма интенсивно. При этом используются два подхода: а/ метод теории возмущений ⁵

⁶ х/Можно показать ⁶, что учет влияния отрицательного разреза в некоторых предположениях сводится к появлению дополнительного множителя x^{α} ($0 < \alpha < \frac{1}{2}$) в знаменателе подынтегрального выражения $J(q^2)$. В этом случае интеграл $J(q^2)$ оказывается сходящимся и константы A и B можно подобрать таким образом, чтобы $V(q^2)$ не обращалось в нуль для всех $q^2 < 0$.

и близкий к нему метод Чу-Лоу⁷ и б/ метод мандельстамовских двойных представлений^{1, 3, 4}. В последнем методе предпринятые попытки исследования π -K рассеяния несколько отличны друг от друга: в работе³ исследование проводится с помощью "классических" мандельстамовских представлений, в работе⁴ используется метод Чини-Фубини⁸; а в работе¹ используется способ симметризации и антисимметризации амплитуд, чтобы обойти трудности, связанные с кинематическим разрезом². Однако, во всех трех случаях получение точных решений уравнений для π -K рассеяния наталкивается на огромные трудности, и решения могут быть получены лишь после перехода к различного рода упрощениям. В частности, в работах^{3,4} решения искались в effective-range приближении. Сравнение решений для S и p -фаз, полученных в данной работе и работах^{3,4,5}, показывает, что результаты являются совпадающими.

Таким образом решения /11/ и /15/, полученные в довольно грубом приближении, могут, тем не менее, оказаться полезными в двух случаях:

а/ их можно с большой достоверностью считать справедливыми для π -K рассеяния в области энергии падающих π -мезонов $< \mu c^2$;

б/ решения /11/ и /15/ могут быть использованы в качестве первого приближения при решении более точных уравнений из¹ методом итерации на электронных счетных машинах.

Авторы благодарны проф. Чжу Хун-Юань, А. Ефремову и Л. Соловьеву за полезные дискуссии.

Л и т е р а т у р а

1. П.С. Исаев и М.В. Сэварыньский. Препринт ОИЯИ Р-550
Nucl.Phys. в печати.
2. А.В. Ефремов, В.А. Мещеряков, Д.В. Ширков. ЖЭТФ, 39, 438 /1960/.
3. В.М. Lee. Phys.Rev. 120, 325 (1960).
4. M. Gourdin, Y. Noirod and Ph.Salin. Nuovo Cimento, XVIII, 651 (1960).
5. S.Okubo. Phys.Rev. 118, 357 (1960).
6. А.В. Ефремов. Частное сообщение.
7. G. Costa, L. Tenaglia. Nuovo Cim., XVIII, 368 (1960).
8. M. Cini and S. Fubini. Ann. Phys. 3, 352 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
6 января 1961 года.

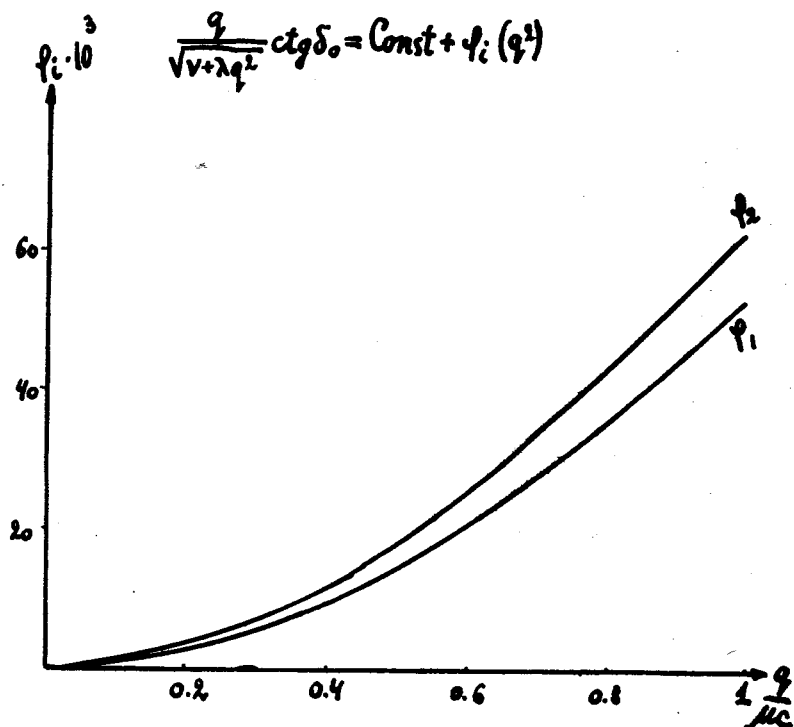


Рис. 1. Сравнение результатов для S -волны, полученных в работе ³ и данной работе.

φ_1 - из работы ³

φ_2 - из данной работы