ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

А. Тяпкин

D - 642

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДОПУСТИМЫХ ОБЛАСТЕЙ ФАЗ В ФАЗОВОМ АНАЛИЗЕ ПО МЕТОДУ "ОВРАГОВ"

Дубна 1960 год

А. Тяпкин

D - 642

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДОПУСТИМЫХ ОБЛАСТЕЙ ФАЗ В ФАЗОВОМ АНАЛИЗЕ ПО МЕТОДУ "ОВРАГОВ"

При проведении фазового анализа экспериментальных данных минимизирует-ся сумма

$$\chi^2(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{y_i(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m) - y_{i\ \text{эксп.}}}{\sigma_i} \right]^2, \qquad /1/$$

где $y_i(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m)$ – теоретические значения величин, зависящие от искомых параметров /ф а з/ $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m$;

$y_{i\ \text{эксп.}}$ – экспериментально найденные значения тех же величин,

σ_i – средние квадратические погрешности измерений данных величин.

В случае большого числа параметров минимум χ^2 находится в много-мерном пространстве с помощью электронной счетной машины методом градиент-ного спуска из случайно выбранной начальной точки. Значения фаз $\delta_{o1}, \delta_{o2}, ... \delta_{om}$, соответствующие минимуму χ^2, определяют теоретические кривые, наилучшим образом отвечающие имеющемуся набору экспериментальных значений величин $(y_1, y_2, ... y_n)$. После нахождения величин $\delta_{o1}, \delta_{o2}, ... \delta_{om}$, являющихся асимптотически нормальными и наилучшими оценками истинных значений фаз, ре-шается вопрос о дисперсии этих оценок. Стандартные отклонения для фаз обычно находят, исследуя функционал $\chi^2(\delta_1, \delta_2, ... \delta_m)$ в непосредственной окрестнос-ти точки минимума. В этой точке частные производные $\frac{\partial \chi^2}{\partial \delta_1} = \frac{\delta \chi^2}{\partial \delta_2} = ... = \frac{\partial \chi^2}{\partial \delta_m} = 0$ и рост функционала при изменении параметров, отвечающих точке минимума χ^2, характеризуется частными производными второго порядка.

В работе[1,2] для нахождения области допустимых значений фаз был при-менен новый метод, основанный на определении рельефа дна функционала $\chi^2(\delta_1, \delta_2, ... \delta_m)$. Специально для этой цели И.М.Гельфандом был раз-работан численный метод, так называемый метод "оврагов", при котором счет-ная машина, не застревая в точках минимумов функционала, делает шаги ко-нечной длины вдоль "оврагов" низких значений χ^2. После нахождения релье-фа дна "оврагов" функционала определялась допустимая область значений фаз при условии, чтобы возрастающие значения χ^2 не превысили уровня $\chi^2 = 2\bar{\chi}^2$ Найденные таким образом области допустимых решений оказались значительно больше областей /3-5/, определенных в методе градиентного спуска на основе исследования структуры функционала в окрестностях точек минимумов χ^2.

Выбранное в работе /1,2/ условие определения допустимой области фаз, как области окружающей точку минимума функционала $\chi^2(\delta_1, \delta_2, \dots \delta_m)$, в которой величина $\chi^2 < 2\bar{\chi}^2$, казалось бы, вполне обосновано. Величина $\chi^2 = \sum_1^n \frac{\Delta_i^2}{\sigma_i^2}$ подчиняется так называемому χ^2-распределению, которое характеризуется средним значением $\bar{\chi}^2 = n - m$ и дисперсией $\mathcal{D} = 2(n - m)$ Если много раз повторять серии независимых измерений величин $y_1, y_2, \dots y_n$ и затем для каждой такой серии находить минимальное значение суммы квадратов /1/, то полученные $\chi^2_{min.}$ распределятся согласно χ^2 -распределению с указанными выше $\bar{\chi}^2$ и $\mathcal{D}$. Так, в среднем $<16\%$ полученных значений χ^2_{min} будет превышать выбранный в работе /1,2/ уровень $\chi^2 = 2(n-m)$. Если выбранная область значений χ^2 эффективно заполняется значениями χ^2_{min}, соответствующими равноточным повторным сериям измерений, то эта область χ^2, казалось бы, должна считаться допустимой и для величин χ^2, получаемых при отклонении фаз от значений, соответствующих найденному минимуму.

Однако непосредственное определение среднеквадратических отклонений фаз из функции правдоподобия данной выборки экспериментальных значений величин $y_1, y_2, \dots y_n$ показывает несостоятельность использования χ^2 -распределения для определения допустимой области фаз. Действительно, функция правдоподобия, пропорциональная вероятности получения данной выборки, в случае, например, нормального закона распределения погрешностей измерения величин y_i имеет следующий вид:

$$P(y_1, y_2, \dots y_n ; \delta_1, \delta_2, \dots \delta_m) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_1^n \sigma_i} e^{\frac{-\chi^2(y_1, y_2 \dots y_n; \delta_1, \delta_2 \dots \delta_m)}{2}} \qquad /2/$$

В точке $\delta_{o1}, \delta_{o2}, \dots \delta_{on}$ имеем максимальное значение функции правдоподобия $P_{max} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_1^n \sigma_i} e^{\frac{-\chi^2_{min}}{2}}$. По определению средние квадратические отклонения фаз – это такие отклонения от $\delta_{o1}, \delta_{o2} \dots \delta_{on}$, при которых вероятность выборки, а следовательно, и значение функции правдоподобия уменьшается в $e^{1/2}$ раз.

Из выражения /2/ видно, что такое уменьшение функции правдоподобия происходит при $\chi^2 = \chi^2_{min} + 1$. Этим уровнем, превышающим минимальное значение на единицу, и определяется область значений χ^2, соответствующих средним квадратическим отклонениям фаз. Применяемая в обычном методе матрица ошибок как раз и выделяет эту область на основе исследования функционала $\chi^2(\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n)$ в точке минимума /определения частных производных второго порядка от функционала в точке $\delta_{o1}, \delta_{o2} \dots \delta_{om}$ /.

Если же вернуться к рассмотрению результатов фазового анализа повторных независимых равноточных серий измерений, то к тому факту, что получаемые значения χ^2_{min} будут подвержены значительному разбросу согласно χ^2 – распределению, следует добавить, что получаемые для минимумов значения фаз будут группироваться в сравнительно узкой области, соответствующей уровню $\chi^2 = \chi^2_{min} + 1$. При увеличении числа измеренных величин в выборке (n) разброс значений χ^2_{min} будет возрастать, а область координат в фазовом многомерном пространстве, отвечающих этим минимумам, будет, естественно, сужаться. В то же время области значений фаз, соответствующие $\chi^2 < C(n-m)$, не будут уменьшаться с увеличением n.

Широкие области значений фаз, найденные в работе /1/, в результате досадного недоразумения были приняты за области допустимых значений фаз[x/].

---

x/ Автору настоящей заметки довелось на конференции в Рочестере докладывать работу /1/, отвечать на многочисленные вопросы и давать об"яснение методики исследования рельефа дна "оврагов"функционала с помощью счетной машины. В связи с этим следует отметить, что никем из участников конференции не обсуждался вопрос о справедливости определения допустимой области фаз по значениям $\chi^2 < 2(n-m)$. Ошибочность такого определения была выяснена автором только в последнее время.

Вместе с тем определение областей с низким значением χ^2 по методу "оврагов" весьма целесообразно как быстрое предварительное исследование функционала χ^2, существенно упрощающее последующие поиски минимумов по методу градиентного спуска. Именно в качестве такого предварительного исследования могут оказаться полезными в дальнейшем результаты, полученные в работе /1,2/ для 95 Мэв.

Может быть поставлен также вопрос о полном решении задачи методом "оврагов", включая определение точек минимумов функционала и средних квадратических отклонений фаз, отвечающих $\chi^2 = \chi^2_{min} + 1$. Однако в этом случае в области низких значений χ^2 должны быть уменьшены скачки, задаваемые счетной машине, и значительно повышена точность вычисления величины χ^2. Вопрос о целесообразности полного решения задачи методом "оврагов" не очевиден, поскольку скорость проведения анализа при указанных требованиях резко уменьшится.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 декабря 1960 года.

Литература

1. И.М.Гельфанд, А.Ф.Грашин, Л.Н.Иванова, И.Я.Померанчук, Я.А.Смородинский. "Фазовый анализ p-p рассеяния при 95, 150 и 310 Мэв ". Доклад на X конференции по физике высоких энергий, Рочестер /1960/; препринт ОИЯИ D-598 /1960г/.
2. В.А.Боровников, И.М.Гельфанд, А.Ф.Грашин, И.Я.Померанчук. "Фазовый анализ p-p - рассеяния, 95 Мэв". И.М.Гельфанд, А.Ф.Грашин, Л.Н.Иванова. "Фазовый анализ p-p - рассеяния, 150Мэв". Препринт ИТЭФ АН СССР /1960/.
3. N.P. Stapp, T.J.Ypsilantis, N.Metropolis. Phys.Rev. 105, 302 (1957).
4. P.Cziffra, M.H.MacGregor, M.I.Moravcsik, N.P.Stapp. Phys.Rev. 114, 880 (1959).
5. R.C.Stabler. E.L.Lomon, Nuovo Cimento, 15, 150 (1960).