ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В.И.Огиевецкий, И.В.Полубаринов

Д-618

О КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

ЖЭТФ, 1961, т40, в3, с926.

Дубна 1960 год

В.И.Огиевецкий, И.В.Полубаринов

Д-618

О КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

А н н о т а ц и я

Получен закон преобразования многочастичных функций Грина при изменении калибровки. Из этого закона вытекают общие тождества типа Уорда.

1. Введение

Работа Ландау и Халатникова[1] по изучению законов калибровочных преобразований функций Грина $\langle T\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle$ и $\langle T\psi(x)\bar{\psi}(y)A_\mu(u)\rangle$ повлекла за собой ряд статей, связанных с этим вопросом[1-5].

Эти законы вытекают только из трансформационных свойств гайзенберговских операторов при изменении калибровки вне зависимости от частных видов взаимодействий.

В настоящей статье доказана общая теорема, устанавливающая закон калибровочных преобразований функций Грина с любым числом операторов любых заряженных и нейтральных полей без конкретизации взаимодействия.

В электродинамике закон преобразования несколько иначе определенных многочастичных функций Грина был недавно выведен Окубо[4]. Однако, его доказательство справедливо только в электродинамике и связано с разложением функций Грина в ряды теории возмущений.

С помощью законов калибровочных преобразований функций Грина можно дать не зависящий от калибровки, наиболее общий и естественный вывод тождеств типа Уорда. Это и было сделано в [4,5] для связи вершинной части и одночастичной функции Грина.

Ниже этим способом получены общие тождества, связывающие многочастичные функции Грина, и приведено несколько конкретных примеров тождеств типа Уорда.

2. Определения функций Грина

Приведем определения многочастичных функций Грина, для которых будут рассматриваться законы калибровочных преобразований. Функция Грина без фотонных концов определяется как среднее по вакууму от Т-произведения

$$G(x^1\ldots x^n, y^1\ldots y^n, z^1\ldots) = \langle T\Psi\rangle \equiv \langle T\psi_1(x^1)\ldots\psi_n(x^n)\bar{\psi}_1(y^1)\ldots\bar{\psi}_n(y^n)\chi_1(z^1)\ldots\rangle \qquad /1/$$

где $\psi(x)$ и $\varphi(y)$ - операторы любых лептонных , мезонных, барионных заряженных полей, цреобразуюшихся при калибровочных преобразованиях по закону

$$\psi'(x)=\exp[ie\Lambda(x)]\psi(x) \qquad \varphi'(y)=\varphi(y)\exp[-ie\Lambda(y)], \qquad /2/$$

а $\chi(z)$ - операторы любых нейтральных полей, за исключением электромагнитного. Функции Грина с участием операторов электромагнитного поля $A_\mu(u)$ введем следующим образом

$$G_\mu(x^1\ldots,y^1\ldots,z^1\ldots,u)=\langle T\Psi A_\mu(u)\rangle \qquad /3/$$

$$G_{\mu_1\mu_2}(x^1\ldots,y^1\ldots,z^1\ldots,u^1u^2)=\langle T\Psi A_{\mu_1}(u^1)A_{\mu_2}(u^2)\rangle-\langle T\Psi\rangle\langle TA_{\mu_1}(u^1)A_{\mu_2}(u^2)\rangle \qquad /4/$$

. . . .

$$G_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}(x^1\ldots,y^1\ldots,z^1\ldots,u^1u^2\ldots u^m)=\langle T\Psi A_{\mu_1}(u^1)A_{\mu_2}(u^2)\ldots A_{\mu_m}(u^m)\rangle-$$
$$-\sum_{k>l}G_{\mu_1\ldots\mu_{l-1}\mu_{l+1}\ldots\mu_{k-1}\mu_{k+1}\ldots\mu_m}\langle TA_{\mu_l}(u^l)A_{\mu_k}(u^k)\rangle- \qquad /5/$$
$$-\sum_{i>j>k>l}G_{\underbrace{\mu_1\ldots\mu_m}_{m-4}}\langle TA_{\mu_i}(u^i)A_{\mu_j}(u^j)A_{\mu_k}(u^k)A_{\mu_l}(u^l)\rangle-\ldots\ldots$$

Формально эти выражения могут быть получены с помощью процедуры Швингера[6] функционального дифференцирования по внешнему току

$$G_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}(x^1\ldots,y^1\ldots,z^1\ldots,u^1\ldots u^m)=\left.\frac{\delta^m\langle T\Psi\rangle}{\delta J_{\mu_1}(u^1)\delta J_{\mu_2}(u^2)\ldots\delta J_{\mu_m}(u^m)}\right|_{J=0}, \qquad /6/$$

где функциональная производная определяется правилом

$$\frac{\delta\langle T\Psi\rangle}{\delta J_\mu(u)}=\langle T\Psi A_\mu(u)\rangle-\langle T\Psi\rangle\langle A_\mu(u)\rangle \qquad /7/$$

причем при $J = 0$ вакуумные ожидания от нечетного числа $A_\mu(u)$ обращаются в нуль.

Определенные формулами /3/-/5/ функции Грина преобразуются при изменении калибровки проще средних по вакууму и для них получается естественное обобщение тождеств типа Уорда. В теории возмущений это определение соответствует отбрасыванию диаграмм, содержащих несвязные части, все внешние концы которых фотонные.

3. Преобразование функций Грина при изменении калибровки

В настоящем разделе мы выразим функцию Грина /5/ в произвольной калибровке, через функции Грина в истинной калибровке Ландау, в которой по определению фотонный пропагатор не обладает продольной частью, а одновременной коммутатор операторов электромагнитного поля равен нулю[5].

Переход от гайзенберговских операторов в калибровке Ландау ψ^τ, φ^τ, χ^τ и A_μ^τ к операторам в произвольной калибровке ψ, φ, χ и A_μ осуществляется согласно

$$\psi(x) = \exp[ie\Lambda(x)]\,\psi^\tau(x) \qquad \varphi(y) = \varphi^\tau(y)\exp[-ie\Lambda(y)]$$
$$\chi(z) = \chi^\tau(z) \qquad A_\mu(u) = A_\mu^\tau(u) + \frac{\partial\Lambda(u)}{\partial u_\mu}, \qquad /8/$$

где $\Lambda(x)$ - соответствующим образом выбранный эрмитовский оператор, представимый в виде[1]

$$\Lambda(x) = \int d^4k\,\lambda(k^2)\left(a_k e^{ikx} + a_k^+ e^{-ikx}\right) \qquad /9/$$

/ a_k^+ и a_k операторы рождения и уничтожения/.

Можно считать, что оператор Λ действует в ином гильбертовом пространстве, чем то, в котором действуют операторы ψ^τ, φ^τ, χ^τ и A_μ^τ,[1,5] а значит, коммутирует с ними. Отметим также, что при переходах к истинным калибровкам, в которых по определению одновременной коммутатор электромагнитных полей равен нулю, выбор Λ ограничен условием

$$\langle[\Lambda(\vec{x},0),\dot{\Lambda}(0)]\rangle=0. \qquad /10/$$

Тогда фотонный пропагатор в произвольной истинной калибровке выразится следующим образом:

$$D^c_{\mu\nu}(u^1-u^2)=\langle TA_\mu(u^1)A_\nu(u^2)\rangle=\langle TA^\tau_\mu(u^1)A^\tau_\nu(u^2)\rangle+\frac{\partial^2}{\partial u^1_\mu\partial u^2_\nu}\langle T\Lambda(u^1)\Lambda(u^2)\rangle= \qquad /11/$$

$$=\int d^4q\, e^{iq(u^1-u^2)}\left[(q^2\delta_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu)d_t(q^2)+q_\mu q_\nu d_\ell(q^2)\right].$$

Теперь получим закон преобразования для функции Грина /1/. Согласно сказанному выше

$$G(x^1\ldots,y^1\ldots,z^1\ldots)=G^\tau(x^1\ldots,y^1\ldots,z^1\ldots)\langle T\exp(ie\Phi)\rangle, \qquad /12/$$

где

$$\Phi=\Lambda(x^1)+\ldots+\Lambda(x^n)-\Lambda(y^1)-\ldots-\Lambda(y^n). \qquad /13/$$

Вследствие выбора оператора $\Lambda(x)$ в виде /9/ выражение $\langle T\exp(ie\Phi)\rangle$ можно вычислить по теореме Вика, применяя ее к тому же прямо к Φ, так как Φ линейно зависит от Λ.

Таким образом,

$$\langle T\exp(ie\Phi)\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ie)^{2k}}{(2k)!}\langle T\Phi^{2k}\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ie)^{2k}}{(2k)!}(2k-1)!!\langle T\Phi^2\rangle^k=\exp\left(-\frac{e^2}{2}\langle T\Phi^2\rangle\right) \qquad /14/$$

и закон преобразования для G найден

$$G=\exp(e^2\rho)G^\tau, \qquad /15/$$

где

$$\rho \equiv \rho(x^1 \ldots, y^1 \ldots) = -\frac{1}{2}\langle T\,\Phi^2\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big[\langle T\Lambda(x^i)\Lambda(y^j)\rangle - \langle T\Lambda(x^i)\Lambda(x^j)\rangle - \langle T\Lambda(y^i)\Lambda(y^j)\rangle\Big] \qquad /16/$$

Теперь мы докажем, что справедлива следующая общая

ТЕОРЕМА. Функция Грина $G_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ в произвольной калибровке выражается через функции Грина в калибровке Ландау согласно закону

$$G_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m} = \exp(e^2\rho)\Big\{G^{\tau}_{\mu_1\ldots\mu_m} + ie\sum_{\tau=1}^{m}\rho_{\mu_\tau}G^{\tau}_{\mu_1\ldots\mu_{\tau-1}\mu_{\tau+1}\ldots\mu_m} +$$

$$+ (ie)^2\sum_{\tau_2>\tau_1=1}^{m}\rho_{\mu_{\tau_1}}\rho_{\mu_{\tau_2}}G^{\tau}_{\mu_1\ldots\mu_{\tau_1-1}\mu_{\tau_1+1}\ldots\mu_{\tau_2-1}\mu_{\tau_2+1}\ldots\mu_m} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad /17/$$

$$+ (ie)^k\sum_{\tau_k>\tau_{k-1}>\ldots>\tau_1=1}\rho_{\mu_{\tau_1}}\rho_{\mu_{\tau_2}}\ldots\rho_{\mu_{\tau_k}}G^{\tau}_{\mu_1\ldots\mu_{\tau_1-1}\mu_{\tau_1+1}\ldots\mu_{\tau_k-1}\mu_{\tau_k+1}\ldots\mu_m} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (ie)^m\rho_{\mu_1}\rho_{\mu_2}\ldots\rho_{\mu_m}G^{\tau}\Big\},$$

где

$$\rho_{\mu_\tau} \equiv \rho_{\mu_\tau}(x^1 \ldots, y^1 \ldots, u^\tau) = \Big\langle T\,\frac{\partial\Lambda(u^\tau)}{\partial u^\tau_{\mu_\tau}}\,\Phi\Big\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\Big\langle T\,\frac{\partial\Lambda(u^\tau)}{\partial u^\tau_{\mu_\tau}}\big[\Lambda(x^j) - \Lambda(y^j)\big]\Big\rangle. \qquad /18/$$

Для доказательства теоремы заметим, что определение многочастичных функций Грина /6/ можно представить в виде

$$G_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}=\frac{\delta^m\langle T\Psi\rangle}{\delta J_{\mu_1}(u^1)\delta J_{\mu_2}(u^2)\dots\delta J_{\mu_m}(u^m)}\Bigg|_{J=0}=$$

$$=\prod_{\tau=1}^{m}\left(\frac{\delta}{\delta J^{\tau}_{\mu_\tau}}+\frac{1}{i\alpha}\frac{\partial}{\partial u^{\tau}_{\mu_\tau}}\right)\langle T\Psi^{\tau}\rangle\cdot\frac{\langle T\exp[ie\Phi+i\alpha\sum_{l=1}^{m}\Lambda(u^l)]\rangle}{\langle T\exp[i\alpha\sum_{l=1}^{m}\Lambda(u^l)]\rangle}\Bigg|_{\substack{J^{\tau}=0\\ \alpha=0}} \qquad /19/$$

где функциональная производная $\delta/\delta J^{\tau}_{\mu}$ определяется правилом /7/ с заменой A_μ на A^{τ}_{μ} и действует только на $\langle T\Psi^{\tau}\rangle$. В целом, пока J^{τ} и параметр α не приравнены к нулю, оператор $\delta/\delta J^{\tau}_{\mu}+\frac{1}{i\alpha}\partial/\partial u_\mu$ генерирует $A_\mu(u)$ в виде суммы $A^{\tau}_{\mu}+\frac{\partial\Lambda}{\partial u_\mu}$ согласно правилу /7/, в котором лишь следует заменить усреднение $\langle T\dots\rangle$ на усреднение $\frac{\langle T\dots\exp[i\alpha\sum\Lambda(u^l)]\rangle}{\langle T\exp[i\alpha\sum\Lambda(u^l)]\rangle}$.

После вычислений, аналогичных /14/, получаем

$$\frac{\langle T\exp[ie\Phi+i\alpha\sum\Lambda(u^l)]\rangle}{\langle T\exp[i\alpha\sum\Lambda(u^l)]\rangle}=\exp\Big[e^2\rho-\alpha e\sum_{l=1}^{m}\langle T\Phi\Lambda(u^l)\rangle\Big]. \qquad /20/$$

Дифференцирование последнего выражения, очевидно, дает

$$\left(\frac{1}{i\alpha}\right)^k\frac{\partial^k}{\partial u^1_{\mu_1}\partial u^2_{\mu_2}\dots\partial u^k_{\mu_k}}\exp\Big[e^2\rho-\alpha e\sum_{l=1}^{m}\langle T\Phi\Lambda(u^l)\rangle\Big]\Bigg|_{\alpha=0}= \qquad /21/$$

$$=(ie)^k\,\rho_{\mu_1}\rho_{\mu_2}\cdots\rho_{\mu_k}\cdot\exp(e^2\rho).$$

Так как

$$G^{\tau}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}=\frac{\delta^m\langle T\Psi^{\tau}\rangle}{\delta J^{\tau}_{\mu_1}(u^1)\delta J^{\tau}_{\mu_2}(u^2)\dots\delta J^{\tau}_{\mu_k}(u^k)}\Bigg|_{J^{\tau}=0} \qquad /22/$$

и $$\prod_{\tau=1}^{m}\left(\frac{\delta}{\delta J^{\tau}_{\mu_\tau}}+\frac{1}{i\alpha}\frac{\partial}{\partial u^{\tau}_{\mu_\tau}}\right)=\frac{\delta^m}{\delta J^{\tau}_{\mu_1}\ldots\delta J^{\tau}_{\mu_m}}+\frac{1}{i\alpha}\sum_{\tau=1}^{m}\frac{\delta^{m-1}}{\delta J^{\tau}_{\mu_1}\ldots\delta J^{\tau}_{\mu_{\tau-1}}\delta J^{\tau}_{\mu_{\tau+1}}\ldots\delta J^{\tau}_{\mu_m}}\frac{\partial}{\partial u^{\tau}_{\mu_\tau}}+$$
$$+\left(\frac{1}{i\alpha}\right)^2\sum_{\tau_2>\tau_1=1}^{m}\frac{\delta^{m-2}}{\delta J^{\tau}_{\mu_1}\ldots\delta J^{\tau}_{\mu_{\tau_1-1}}\delta J^{\tau}_{\mu_{\tau_1+1}}\ldots\delta J^{\tau}_{\mu_{\tau_2-1}}\delta J^{\tau}_{\mu_{\tau_2+1}}\ldots\delta J^{\tau}_{\mu_m}}\frac{\partial^2}{\partial u^{\tau_1}_{\mu_{\tau_1}}\partial u^{\tau_2}_{\mu_{\tau_2}}}+ \qquad /23/$$
$$+\ldots+\left(\frac{1}{i\alpha}\right)^m\frac{\partial^m}{\partial u^1_{\mu_1}\ldots\partial u^m_{\mu_m}}$$

то из выражения /19/ следует закон преобразования /17/. Теорема доказана.

Сделаем два замечания.

Во-первых, отметим, что теорема может быть доказана и без рецепта /6/, /7/ методом математической индукции, если воспользоваться исходным определением функций Грина /5/.

Во-вторых, подчеркнем, что при доказательстве теоремы существенно использовано определение /8/, позволяющее применить теорему Вика непосредственно к операторам Λ. Если отказаться от этого определения, то указанный закон неверен. Например, если положить x/

$$\Lambda(x)=\Lambda_1(x)\Lambda_2(x), \qquad /24/$$

где $\Lambda_1(x)$ и $\Lambda_2(x)$ эрмитовские операторы вида /9/, действующие в разных гильбертовых пространствах, причем для простоты примем

$$\langle T\Lambda_1(x)\Lambda_1(y)\rangle_1=\langle T\Lambda_2(x)\Lambda_2(y)\rangle_2=F(x-y), \qquad /25/$$

то закон преобразования одночастичной функции Грина запишется

$$\langle T\psi(x)\bar\psi(y)\rangle=\langle T\psi^{\tau}(x)\bar\psi^{\tau}(y)\rangle\left\{1+e^2\left[F^2(0)-F^2(x-y)\right]\right\}^{-1}. \qquad /26/$$

В этой связи заметим, что вывод закона /15/ для $\langle T\psi(x)\bar\psi(y)\rangle$ из групповых соображений в работе Эванса, Фелдмана и Мэтьюза[5] является ошибочным, по-

---

x/ Этот пример носит чисто иллюстративный характер, поскольку после такого преобразования коммутатор операторов электромагнитного поля перестанет быть c-числом.

скольку был найден инфинитезимальный оператор перехода только от частной /Ландау/, а не произвольной калибровки. Поэтому незаконен переход от уравнения /3.15/ к уравнению /3.16/ в [5], несмотря на то, что калибровочные преобразования действительно образуют группу Ли. Так, в приведенном только что примере уравнение /3.15/ справедливо, а /3.16/ нет. Уравнение /3.16/ имеет место только в случае операторов $\Lambda(x)$ вида /8/, но для его обоснования фактически необходимо знать окончательный результат.

4. Общие тождества типа Уорда

В истинной калибровке Ландау

$$\frac{\partial}{\partial u^\tau_{\mu_r}} G^\tau_{\mu_1\cdots\mu_r\cdots\mu_k}=0 \qquad /27/$$

вследствие условия Лорентца[5]

$$\frac{\partial A^\tau_\mu(u)}{\partial u_\mu}=0 \qquad /28/$$

и того, что при $t_x=t_y=t_z=t_{u'}=t_u$

$$[\psi^\tau(x),A^\tau_\mu(u)]=[\bar\psi^\tau(y),A^\tau_\mu(u)]=[\chi^\tau(z),A^\tau_\mu(u)]=[A^\tau_\nu(u'),A^\tau_\mu(u)]=0 \qquad /29/$$

Вычисляя дивергенцию от обеих частей соотношения /17/ с учетом равенств /27/, получаем общие тождества в произвольной калибровке для функций Грина

$$\frac{\partial}{\partial u^\tau_{\mu_r}} G_{\mu_1\cdots\mu_r\cdots\mu_m}=ie\frac{\partial \rho_{\mu_r}}{\partial u^\tau_{\mu_r}} G_{\mu_1\cdots\mu_{r-1}\mu_{r+1}\cdots\mu_m}. \qquad /30/$$

В частном случае калибровки Фейнмана[5] они приобретают вид

$$\frac{\partial}{\partial u^\tau_{\mu_r}} G^F_{\mu_1\cdots\mu_r\cdots\mu_m}=-e\sum_{l=1}^{n}\left[D_c(u^\tau-x^l)-D_c(u^\tau-y^l)\right]G^F_{\mu_1\cdots\mu_{r-1}\mu_{r+1}\cdots\mu_m} \qquad /31/$$

$$D_c(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ikx}\,\frac{dk}{k^2-i\varepsilon}$$

так как переход от калибровки Ландау к калибровке Фейнмана осуществляется с помощью $\Lambda(x)$, для которого

$$\langle T\Lambda(x)\Lambda(y)\rangle = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int e^{ik(x-y)}\,\frac{dk}{(k^2)^2}\,. \qquad /32/$$

Если теперь подействовать на /31/ оператором Даламбера $\Box_{u^r}$, получим

$$\Box_{u^r}\frac{\partial}{\partial u^r_{\mu_r}}G^F_{\mu_1\cdots\mu_r\cdots\mu_m} = e\sum_{l=1}^{n}\left[\delta(u^r-x^l)-\delta(u^r-y^l)\right]G^F_{\mu_1\cdots\mu_{r-1}\mu_{r+1}\cdots\mu_m} \qquad /33/$$

Из тождеств /30/ при соответствующих определениях высших вершинных частей вытекают независящие от калибровки общие тождества Уорда для процессов с любым числом заряженных и нейтральных частиц и фотонов. Такой вывод тождеств Уорда базируется только на законах калибровочных преобразований полей и совершенно не предполагает знания конкретных видов взаимодействий и гипотез о их перенормируемости.

В качестве примера рассмотрим случай одной заряженной частицы $/\Psi = \psi(x)\bar\psi(y)/$ и m фотонов.

Определив вершинную часть $\Gamma_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}$ согласно

$$G_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}(x,y,u^1\ldots u^m) = (2\pi)^{-4(m+1)}e^m\int dp^1dp^2dq^1\ldots dq^m\,\exp(ip^1x-ip^2y+i\sum q^lu^l)\cdot \qquad /34/$$

$$\cdot\delta(p^1-p^2+\sum_{l=1}^{m}q^l)\prod_{j=1}^{m}D^c_{\mu_j\nu_j}(q^j)S^c(p^1)\Gamma_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}(p^1,p^2,q^1\ldots q^m)\,S^c(p^2),$$

получаем из /30/ после сокращения на $q^2_{\nu_r}d_l(q^2_r)$ и все $D^c_{\mu_j\nu_j}(q^j)$

$$S^c(p^1)q^r_{\nu_r}\Gamma_{\nu_1\cdots\nu_r\cdots\nu_m}(p^1,p^2,q^1\ldots q^m)S^c(p^2) = \qquad /35/$$

$$= S^c(p^1)\,\Gamma_{\nu_1\cdots\nu_{r-1}\nu_{r+1}\cdots\nu_m}(p^1,p^2-q^r,q^1\ldots q^{r-1}q^{r+1}\ldots q^m)\,S^c(p^2-q^r)$$

$$- S^c(p^1+q^r)\Gamma_{\nu_1\cdots\nu_{r-1}\nu_{r+1}\cdots\nu_m}(p^1+q^r,p^2,q^1\ldots q^{r-1}q^{r+1}\ldots q^m)\,S^c(p^2)$$

причем в этом тождестве $p^1-p^2+\sum_{l=1}^{m}q^l=0$. При $m=1$ это тождество можно записать

$$S^c(p^1)q_\nu\Gamma_\nu(p^1,p^1+q,q)S^c(p^1+q)=S^c(p^1)-S^c(p^1+q) \tag{35a}$$

Приведем еще один частный случай с двумя заряженными частицами, рассматривая связь между процессами

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$$
$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p + \gamma .$$

Вводя стандартные определения

$$G(x^1x^2,y^1y^2)=(2\pi)^{-12}\int dp^1dp^2dp^3dp^4\, \exp(ip^1x^1+ip^2x^2-ip^3y^1-ip^4y^2)\cdot$$
$$\cdot\delta(p^1+p^2-p^3-p^4)\,G(p^1,p^2,p^3,p^4)$$

/36/

$$G_\mu(x^1x^2,y^1y^2,u)=(2\pi)^{-16}e\int dp^1dp^2dp^3dp^4dq\, \exp(ip^1x^1+ip^2x^2-ip^3y^1-ip^4y^4+iqu)\cdot$$
$$\cdot\delta(p^1+p^2-p^3-p^4+q)D^c_{\mu\nu}(q)S^c(p^1)\Delta^c(p^2)\Gamma_\nu(p^1,p^2,p^3,p^4,q)S^c(p^3)\Delta^c(p^4),$$

приходим к тождеству

$$S^c(p^1)\Delta^c(p^2)q_\mu\Gamma_\mu(p^1,p^2,p^3,p^4,q)S^c(p^3)\Delta^c(p^4)=$$

/37/

$$=G(p^1,p^2,p^3,p^4-q)+G(p^1,p^2,p^3-q,p^4)-G(p^1,p^2+q,p^3,p^4)-G(p^1+q,p^2,p^3,p^4),$$

причем $p^1+p^2+q=p^3+p^4$.

Ограничимся этими примерами.

Тождества /35/, являющиеся непосредственным обобщением тождества Уорда, были найдены Е.С.Фрадкиным /1955/[2], получившим их как следствие швингеровской системы уравнений для функций Грина в электродинамике, т.е. с использованием конкретного вида перенормируемого взаимодействия. Совсем недавно тождества вида /35/ были выведены в теории возмущений Казесом[7].

Тождество в калибровке Фейнмана /33/ имеет прямое отношение к тождеству для коэфициентных[8] функций теории возмущений, полученному Боголюбовым и Ширковым /1955г./ в квантовой электродинамике.

Обобщенное тождество Уорда /35а/, сформулированное еще Грином[9], было доказано без теории возмущений также Такахаши[10] с помощью введенной им для $m=1$ формулы /33/ в фейнмановской калибровке. Независимый от калибровки вывод этого тождества в электродинамике был дан Окубо[4] методом Каяньелло, тесно связанным с теорией возмущений. Наконец, Эванс, Фелдман и Мэтьюс[5] получили это же тождество, как следствие не требующего ссылок на конкретный вид взаимодействия закона калибровочных преобразований функций Грина $\langle T\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle$ и $\langle T\psi(x)\bar{\psi}(y)A_\mu(u)\rangle$[1].

В заключение выражаем признательность за полезные обсуждения М.А.Маркову, Я.А.Смородинскому и Чжоу Гуан-чжао.

Литература

1. Л.Д.Ландау, И.М.Халатников. ЖЭТФ, 29, 89, 1955.

2. Е.С.Фрадкин. ЖЭТФ, 29 258, 1955.

3. K.Johnson, B.Zumino. Phys.Rev.Lett. 3, 351, 1959.
B.Zumino, Jour.Math.Phys. 1, 1, 1960.
B.Zumino, Nuovo Cim., 17, 547, 1960.

4. S.Okubo, Nuovo Cim., 15, 949, 1960.

5. L.Evans, G.Feldman, P.T.Matthews. препринт 1960.

6. I.Schwinger, Proc.Nat.Acad.Sci. USA, 37, 452, 1951.
K.Symanzik, Zs. f.Naturf.. 9a, 809, 1954

7. E.Kazes, Nuovo Cim., 13, n.6, 1226, 1959.

8. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков. УФН, 7, вып. 1,3, 1955.

9. H.Green, Proc.Phys.Soc. 66, 837, 1953.

10. Y.Takahashi, Nuovo Cim., 6, 371, 1957.