

675

3
Ф 68



Я.Фишер, С.Чулки

Д-815

СХОДЯЩАЯСЯ СИСТЕМА
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ СИНГЛЕТНОГО РАССЕЯНИЯ
ПРОТОНА НА ПРОТОНЕ

Искл. Phys., 1961, v 24, n 3, p 465.

Я.Фишер^{х)}, С.Чулли^{хх)}

Д-615

СХОДЯЩАЯСЯ СИСТЕМА
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ СИНГЛЕТНОГО РАССЕЯНИЯ
ПРОТОНА НА ПРОТОНЕ

х) Сотрудник Физического института Чехословацкой Академии наук в Праге.

хх) Сотрудник Института атомной физики в Бухаресте.

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

А Н Н О Т А Ц И Я

Упругое рассеяние нуклона на нуклоне исследуется с помощью двухмерного спектрального представления Мандельстама. В настоящей первой статье решена путем применения конформного отображения проблема сходимости, возникающая при одновременном применении дисперсионных соотношений для рассеяния вперед и условия унитарности на физическом разрезе.

1. Исходя из двумерного спектрального представления Мандельштама, мы получили систему интегральных уравнений для упругого рассеяния протонов на протонах в синглетном состоянии. Используемый метод основывается на подходе, предложенном недавно Ефремовым, Мещеряковым, Ширковым и Чжу¹. Напомним кратко их прием. Дисперсионные соотношения написаны только для таких углов θ в частности, вперед и назад, для которых они имеют простой вид и в ненаблюдаемой области не пересекают областей спектральных функций. После этого дисперсионные соотношения дифференцируются в этих точках по $\cos\theta$. В остальных точках области $-1 \leq \cos\theta \leq +1$ амплитуда $M(q^2, \cos\theta)$ представлена в виде разложения Тейлора в окрестности этих точек и эти ряды подставляются в условие унитарности. Парциальные волны можно тоже определить с помощью коэффициентов Тейлора.

Однако, как будет ниже показано, этот подход связан с проблемой сходимости на физическом разрезе, потому что особенности амплитуды $M(q^2, \cos\theta)$ в плоскости $\cos\theta$, расположенные в нефизической области $\cos\theta > 1$, ограничивают сходимость ряда Тейлора также в физической области. Действительно, косинус ближайшей особенности равен $\tau = 1 + \frac{k^2}{2q^2}$ и приближается асимптотически к точке рассеяния вперед, когда q^2 возрастает^{x/} /см. рис. 1/. Поэтому в физической области разложение в окрестности $\cos\theta = 1$ сходится только при $\cos\theta > 1 - \frac{k^2}{2q^2}$, и, следовательно, существует некое q_{\max}^2 так, что

$$1 - \frac{k^2}{2q_{\max}^2} = -1 \quad q_{\max}^2 = \frac{k^2}{4}$$

При $q > q_{\max}$ круг сходимости ряда по $(\cos\theta - 1)^n$ не покрывает всей физической области $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, и стало быть, этот ряд не применим для условия унитарности.

В случае процесса $NN \rightarrow NN$ соответствующая энергия $E_{\max} = 2\sqrt{q_{\max}^2 + m^2}$ особенно мала и не превышает 10 Мэв в лабораторной системе. /Если учесть сим-

^{x/} q есть длина вектора импульса процесса $NN \rightarrow NN$ в системе центра масс, θ - угол рассеяния. $M(q^2, \cos\theta)$ есть, так называемая, причинная амплитуда, определенная, например, в [2] и [3].

метрию и воспользоваться разложением по $(\cos^2 \theta - 1)$, E_{\max} продвигается до 49,4 Мэв /. Однако, желательно обеспечить сходимость ряда Тейлора по крайней мере до порога первого неупругого процесса $NN \rightarrow NN\pi$ /290 Мэв/, где имеет еще место простое условие унитарности.

2. С этой целью мы сделали конформное отображение комплексной плоскости $w \equiv \cos \theta$

$$w = \frac{1 - z^2}{\alpha^2 - z^2}, \quad z \equiv \cos \theta, \quad \alpha^2 = 1 + 2 \frac{\mu^2}{q^2} + \frac{\mu^4}{2q^4} \quad /1/$$

/см. рис. 2/. Можно убедиться в том, что ряд

$$\sum \frac{\partial^n M}{\partial w^n} \Big|_{z=1} \frac{w^n}{n!}$$

сходится во всем интервале $-1 \leq z \leq 1$ при любой наблюдаемой энергии. При энергиях ниже 49,4 Мэв, где ряд в $(z^2 - 1)$ также сходится, ряд в w дает лучшее приближение при одинаковом числе членов. Таким путем получаем быструю сходящуюся систему интегральных уравнений.

Свойства конформного отображения /1/ и обоснования его выбора приведены в Приложении 1 и количественные оценки - в Приложении 11.

3. Обратимся теперь к условию унитарности. На физическом разрезе оно имеет следующий вид / в системе центра масс /

$$\text{Im} M(q, z) = \frac{1}{2} \frac{m^2}{(4\pi)^2} \frac{q}{\sqrt{q^2 + m^2}} \int M^+(q^2, z_1) M(q^2, z_2) dz_1 dy, \quad /2/$$

где

$$z_2 = z z_1 - \sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 - z_1^2} \cos \varphi$$

В формуле /2/ обычно разлагают амплитуду M по парциальным волнам, чтобы получить унитарное условие прямо для парциальных волн. Однако, используемый метод употребляет только свойства амплитуды M в окрестности $\cos \theta = 1$: поэтому парциальные амплитуды определяются тоже с помощью

ряда Тейлора. Так как каждая степень W содержит бесконечно много парциальных волн, одновременное применение степенного ряда и ряда по парциальным волнам приводит к проблеме перестройки рядов. Каждый коэффициент одного разложения выражается через коэффициенты другого разложения в виде бесконечной суммы. В практических вычислениях, однако, необходимо ограничиться конечным числом членов и, следовательно, переход от одного разложения к другому приводит к дополнительным ошибкам. Поэтому мы разложением по парциальным волнам в дальнейшем не пользуемся, и амплитуду M аппроксимируем везде степенным рядом в W . Интеграл в /2/ получается тогда прямым вычислением.

Записав теперь синглетную амплитуду $M_{ss}(q^2, z)$ в виде

$$M_{ss}(q^2, z) = \frac{1 - \epsilon_1 \epsilon_2}{L},$$

разложим $M_{ss}(q^2, z)$ в ряд по W^z и возьмем только три члена:

$$M_{ss}(q^2, z) \approx a_0(q^2) + a_1(q^2)W^z + a_2(q^2)W^{2z}.$$

/3/

Подставив /3/ в /2/ и в соответствующие производные от /2/ по z , получим

$$\int_m M_{ss}(q^2, z) \Big|_{z=1} = \frac{1}{2} \frac{m^2}{(4\pi)^2} \frac{q}{\sqrt{q^2 + m^2}} \sum_{i,j=0}^2 a_i^* a_j K_{ij}^{(0)}$$

$$\frac{\partial \int_m M_{ss}}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{1}{2} \frac{m^2}{(4\pi)^2} \frac{q}{\sqrt{q^2 + m^2}} \sum_{i,j=0}^2 a_i^* a_j K_{ij}^{(1)}$$

$$\frac{\partial^2 \int_m M_{ss}}{\partial z^2} \Big|_{z=1} = \frac{1}{2} \frac{m^2}{(4\pi)^2} \frac{q}{\sqrt{q^2 + m^2}} \sum_{i,j=0}^2 a_i^* a_j K_{ij}^{(2)}$$

где

$$K_{ij}^{(n)} = \frac{\delta_{ij}^{(n)}}{2\pi^n} \int_0^{2\pi-1} \int_0^{2\pi-1} w_{(z_1)}^i w_{(z_2)}^j dz_1 dy \Big|_{z=1}$$

Интегралы $K_{ij}^{(n)}$ зависят только от энергии /через α^2 см. // // и получаются без трудностей. Они имеют следующий явный вид:

$$K_{00} = 4\pi$$

$$K_{10} = 4\pi - 2\pi \frac{\alpha^2-1}{\alpha} \ln \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \quad (\alpha^2 = 1 + 2\frac{A^2}{q^2} + \frac{A^4}{2q^4})$$

$$K_{11} = K_{20} = 2\pi \frac{3\alpha^2-1}{\alpha^2} - \pi \frac{(3\alpha^2+1)(\alpha^2-1)}{\alpha^2} \ln \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$$

$$K_{21} = \frac{\pi}{2\alpha^4} (15\alpha^4 - 4\alpha^2 - 1) - \frac{3\pi}{4\alpha^5} (5\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1)(\alpha^2-1) \ln \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$$

$$K'_{00} = K'_{10} = K'_{20} = 0$$

$$K'_{11} = \frac{\pi}{6\alpha^4} (3\alpha^4 - 2\alpha^2 + 3) - \frac{\pi}{4\alpha^5} (\alpha^2+1)(\alpha^2-1)^2 \ln \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$$

$$K'_{21} = \frac{\pi}{24\alpha^6} (15\alpha^6 - 7\alpha^4 - 7\alpha^2 + 15) - \frac{\pi}{16\alpha^7} (5\alpha^4 + 6\alpha^2 + 5)(\alpha^2-1)^2 \ln \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$$

$$K''_{00} = K''_{10} = K''_{20} = 0$$

$$K''_{11} = -\frac{\pi}{120\alpha^6(\alpha^2-1)} (45\alpha^8 - 90\alpha^6 - 64\alpha^4 + 90\alpha^2 - 45) + \\ + \frac{\pi}{16\alpha^7} (3\alpha^4 + 2\alpha^2 + 3)(\alpha^2-1)^2 \ln \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$$

$$K_{21}'' = -\frac{\pi}{480\alpha^8(\alpha^2-1)}(225\alpha^{10}-375\alpha^8+90\alpha^6-398\alpha^4+645\alpha^2-315) + \\ + \frac{\pi}{64\alpha^9}(15\alpha^6+15\alpha^4+13\alpha^2+21)(\alpha^2-1)^2 \ln \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$$

$$K_{ij}^{(n)} \equiv K_{ji}^{(n)}$$

Вклад от двух π -мезонов на нефизическом разрезе представляет собой неоднородный член в интегральных уравнениях, который мы обозначим через χ . Этот член, так же как и остальные вклады в нефизический разрез, будут рассмотрены в последующей работе. Они подробно изучались в работах [3] и [4], где также приведен явный вид χ . Однако, можно ожидать, что метод, применяющий только случай рассеяния вперед, позволит нам выразить χ в более простом виде.

4. Выразим теперь причинную амплитуду $M(q^2, z)$ через "физические" амплитуды

$$M = \alpha + \beta \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{n} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{n} + \gamma (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{n} + \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{n}) + \delta \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{m} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{m} + \varepsilon \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{l} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{l}$$

Как известно, дисперсионные соотношения для α, β, δ и ε /но не для γ / имеют в нерелятивистском приближении очень простой вид /см. [2] /. С другой стороны, синглетная амплитуда M_{ss} члена с γ не содержит:

$$M_{ss} = \alpha - \beta - \delta - \varepsilon$$

Поэтому интегральные уравнения для M_{ss} получаются без трудностей в простом виде:

$$a_0 = -\frac{f^2}{\mu^2} \frac{4q^2}{4q^2 + \mu^2} + \chi_{ss}(t=0) + \frac{1}{2\pi} \frac{m^2}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{q'}{\sqrt{q'^2 + m^2}} \frac{\sum_{i,j=0}^2 K_{ij} a_i^* a_j}{q'^2 - q^2} dq'^2$$

$$a_1 = (\alpha^2 - 1) q^2 f^2 \left(\frac{1}{(\mu^2 + 4q^2)^2} - \frac{1}{\mu^4} \right) - (\alpha^2 - 1) q^2 \frac{\partial \chi_{ss}}{\partial t} \Big|_{t=0} -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \frac{m^2}{(4\pi)^2} (\alpha^2 - 1) q^2 \int_0^\infty \frac{q'}{\sqrt{q'^2 + m^2}} \frac{\frac{1}{2q'^2} \sum_{i,j=1}^2 K'_{ij} a_i^* a_j}{q'^2 - q^2} dq'^2$$

$$2a_2 = \frac{\alpha^2 + 3}{2} a_1 + (\alpha^2 - 1)^2 q^4 2f^2 \left(\frac{1}{(4q^2 + \mu^2)^3} - \frac{1}{\mu^6} \right) + \quad /4/$$

$$+ (\alpha^2 - 1)^2 q^4 \frac{\partial^2 \chi_{ss}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{m^2}{(4\pi)^2} (\alpha^2 - 1)^2 q^4 \int_0^\infty \frac{q'}{\sqrt{q'^2 + m^2}} \frac{\frac{1}{4q'^4} \sum_{i,j=1}^2 K''_{ij} a_i^* a_j}{q'^2 - q^2} dq'^2$$

$$\left(f^2 \equiv \frac{\mu^2}{4m^2} q^2 \right).$$

Как всегда в случае рассеяния вперед, следует провести одно вычитание. Можно, однако, легко убедиться в том, что второе и третье уравнения имеют уже требуемое поведение на бесконечности / это было достигнуто путем дифференцирования по передаче импульса, что эквивалентно одному вычитанию/. Поэтому, вычитание следует провести только в первом уравнении.

5. Интегральные уравнения /4/ написаны для первых трех коэффициентов разложения /2/, а не для парциальных волн. Как уже было сказано, мы воспользовались этим необычным разложением /2/ с целью избежать новых ошибок, возникающих при одновременном применении двух разложений. Но существует еще другое обстоятельство, поддерживающее эту точку зрения.

Как известно, амплитуда $NN \rightarrow NN$ рассеяния содержит много волн, так что разложение по парциальным волнам сходится медленно. Для достижения быстрой сходимости необходимо разложить $M(q^2, z)$ в ряд по более удобной системе функций. В связи с используемым методом рассмотрим только разные степенные ряды в окрестности $\cos \theta = 1$.

Строго говоря, быстрее всех сходится разложение амплитуды $M(q^2, z)$ по степеням самой функции $M(q^2, z)$, где разложение сводится к тривиальному тождеству $M = M$. Но M перед разрешением уравнений неизвестно; известно только местонахождение полюсов и разрезов. В пределах такой информации быстрее всех будет сходиться разложение по степеням такой функции, которая имеет полюса и разрезы точно там же, где и M . Одна такая функция $w_M(z)$ приведена в Приложении 1, но она слишком сложна для практических вычислений. Выбранная нами функция $w(z)$, в отличие от $w_M(z)$, не имеет всех требуемых особенностей, но она намного проще и, как показывают оценки, достаточно взять в разложении по w^n три первых члена.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. Чжу Хунь-юану и Д.В.Ширкову за многочисленные обсуждения и советы, и В.С.Владимирову и Е.В.Майкову за полезные дискуссии по математическим вопросам.

Приложение 1

1. Для обеспечения сходимости ряда по степеням $(\cos^2\theta - 1)$ при любом физическом значении $\cos^2\theta$ мы преобразовали левую полуплоскость, ограниченную прямой ζ , во внутренность единичного круга ζ в плоскости w /см. рис. 2/. Точка $\cos^2\theta = 1$ переходит, очевидно, в точку $w = 0$.

Степенное разложение вокруг $w = 0$ сходится в любой точке внутри круга, так как амплитуда не имеет особенностей в этой области. Все физические точки тоже находятся внутри круга и, стало быть, ряд по степеням w можно прямо подставить в интегралы, содержащиеся в условии унитарности.

2. Имеется много других конформных отображений, обеспечивающих сходимость соответствующего ряда Тейлора во всей физической области. Как известно, разложение Тейлора ведет себя при $n \rightarrow \infty$ как геометрическая прогрессия $(\frac{r}{R})^n$, где R - радиус сходимости и $r = |w|$. Естественно, самым удобным будет такое преобразование, в котором r/R имеет минимальное значение во всех физических точках. Такое оптимальное преобразование $w_M(z)$ действительно существует, и, как будет дальше показано, оно преобразует вырезанную комплексную плоскость D_{max} в единичный круг /см. рис. 3/. Другими словами, для любого другого конформного отображения $w_1(z)$, преобразующего область $D_1 \subset D_M$ /не содержащую точек разреза/ в единичный круг, должно иметь место неравенство

$$r_1 \equiv |w_1(p)| \geq r_M \equiv |w_M(p)| \quad (R_M = R_1 = 1)$$

в любой точке $p \in D_1$.

Чтобы доказать это утверждение, заметим, что функция $w_M(z)$ преобразует D_1 в область \tilde{D}_1 , которая является частью единичного круга \tilde{D}_M . Функция $w_M = f(w_1)$, преобразующая единичный круг плоскости w_1 в область D_1 , аналитична и обладает следующими свойствами:

- 1) $|f(w_1)| \leq 1$ в любой точке P_1 внутри единичного круга плоскости w_1 ;
- 2) $f(w_1=0) = 0$, так как обе функции w_1 и w_M преобразуют точку $z^2=1$ в начало координат.

Согласно известной лемме Шварца^{x/} имеет место неравенство

$$|w_M| \leq |w_1|$$

для всех точек внутри единичного круга в плоскости w_1 .

3. Это оптимальное отображение можно непосредственно построить с помощью преобразования Жуковского. Функция $u = \frac{2\tau^2 - z^2 - 1}{z^2 - 1}$ преобразует разрез плоскости z^2 в разрез от $u = -1$ до $u = 1$, причем $u(z^2 = 1) = \infty$.

Этот разрез можно преобразовать в единичный круг / причем точка $u = \infty$ перейдет в начало / с помощью преобразования $\frac{1}{2} (w_M + \frac{1}{w_M}) = u$. Таким образом,

$$w_M = 2\sqrt{\tau^2 - 1} \frac{\sqrt{\tau^2 - 1} - \sqrt{\tau^2 - z^2}}{z^2 - 1} - 1.$$

Приложение 11

Для того, чтобы сравнить быстроту сходимости различных разложений, рассмотрим в качестве примера амплитуду

$$A = \frac{1}{\tau + \cos\theta} + \frac{1}{\tau - \cos\theta} \quad (\text{Ядро Коши}),$$

где

$$\tau^2 = \frac{\alpha^2 + 1}{2} = 1 + \frac{\mu^2}{2q^2}.$$

Для оценки точности первого, второго и т.д. членов разложения по $(\cos^2\theta - 1)$ и по $w = \frac{1 - \cos^2\theta}{\alpha^2 - \cos^2\theta}$, вычислим несколько парциальных волн функции $A(\cos^2\theta)$ сначала точно, а потом, используя приближенные выражения для A с помощью разложений по $\cos^2\theta$ и по w . Эти приближенные выражения помещены в таблицах в первом и втором столбцах соответственно. Ошибки выражены в процентах. Таблица 1 вычислена для $\tau = 5/3$, при котором оба разложения сходятся.

^{x/} Если $f(z)$ аналитична для всех $|z| < R$ и если $|f(z)| \leq M$ и $f(0) = 0$, тогда $|f(z)| \leq \frac{M|z|}{R}$.

Таблица 11 вычислена для $\zeta = 1,28$, при котором разложение по $\cos^2\theta$ уже сильно расходится, но разложение по w , естественно, сходится. Это значение ζ соответствует лабораторной энергии нуклона 72 Мэв. Если вычесть из амплитуды M одномезонный полюс, ζ будет соответствовать положению начала двухмезонного разреза и значение $\zeta = 1,28$ - порог неупругого процесса 290 Мэв.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 октября 1960 года.

Литература

1. A.V.Efremov, V.A.Meshcheryakov, D.V.Shirkov and H.Y.Tzu. "On the derivation of equations from the Mandelstam representation", preprint JINR E - 539.
- Сянь Дин-чан, Хэ Цзо-сю, В.Целлнер. "Интегральные уравнения для $\pi\pi$ -рассеяния при низких энергиях", препринт ОИЯИ Д-547; ЖЭТФ 39, № 6.
2. M.L.Goldberger, Y.Nambu and R.Oehme, Annals of Physics, 2, 226 (1957).
3. D. Amati, E. Leader and B. Vitale, Nuovo Cimento, 17, 68 (1960).
4. M.L.Goldberger and Oehme, Annals of Physics, 10, 153 (1960).

Таблица 1 ($\epsilon = \frac{5}{3}$).

точное значение	S - волна = 1,386		D - волна = 0,0831		G - волна = 0,0071	
	в $\cos^2\theta$.	в ψ .	в $\cos^2\theta$.	в ψ .	в $\cos^2\theta$.	в ψ .
1 прибл.	1,9 35%	1,9 35%	0	0	0	0
2 прибл.	1,17 -45%	1,30 -6%	0,14 69%	0,105 26%	0	0,005 -30%
3 прибл.	1,49 7%	1,403 1%	0,05 -39%	0,078 -5%	0,015 113%	0,0082 17%
4 прибл.	1,33 -4%	1,383 -0,2%	0,10 22%	0,0836 0,6%	0,001 -83%	0,0064 -9%

Таблица 11 ($\epsilon = 1,28$)

точное значение	S - волна = 2,10		D - волна = 0,265		G - волна = 0,047	
	в $\cos^2\theta$.	в ψ .	в $\cos^2\theta$.	в ψ .	в $\cos^2\theta$.	в ψ .
1 прибл.	4 91%	4 91%	0	0	0	0
2 прибл.	-0,2 -108%	1,4 -33%	0,8 216%	0,4 68%	0	0,045 -4%
3 прибл.	5 142%	2,4 12%	-0,7 -350%	0,19 -27%	0,2 361%	0,056 16%
4 прибл.	-2 -195%	1,99 +5%	1,7 528%	0,298 12%	-0,4 -1034%!	0,040 -14%

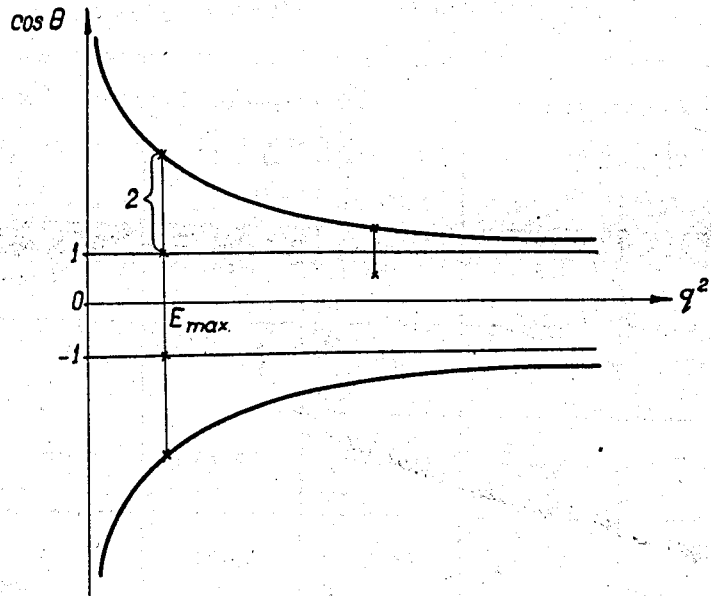
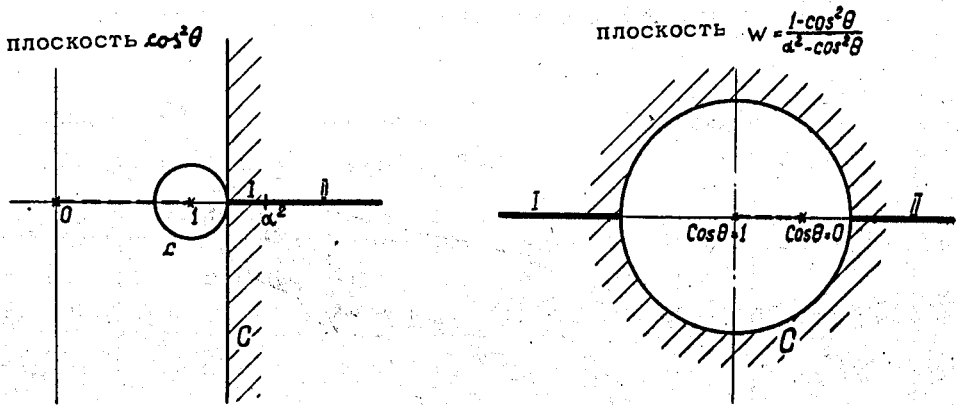
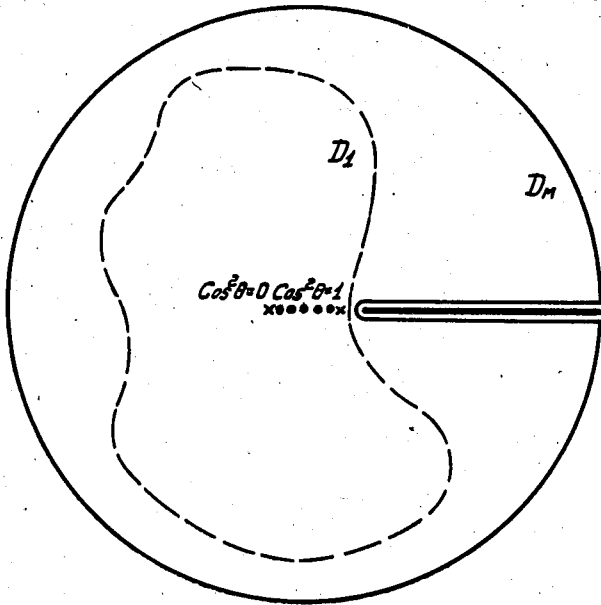


Рис. 1.

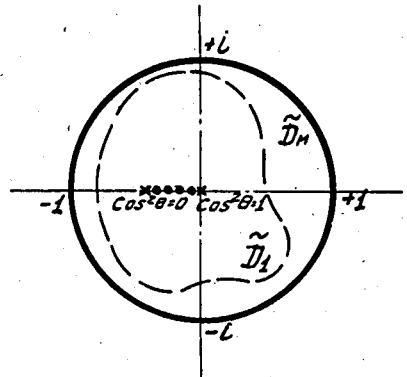


ϵ - граница сходимости разложения по $\cos^3 \theta$
 C - граница сходимости разложения по w .

Рис. 2.



ПЛОСКОСТЬ $z^2 = \cos^2 \theta$



ПЛОСКОСТЬ w_M .

Рис. 3.