ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.М.Барбашов, Г.В.Ефимов

Д-612

ЖЭТФ, 1961, т40, в 3, с848.

МОДЕЛЬ ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С КОНЕЧНОЙ ПЕРЕНОРМИРОВКОЙ ЗАРЯДА

Дубна 1960 год

895/8 кр.

Б.М.Барбашов, Г.В.Ефимов

Д-612

МОДЕЛЬ ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С КОНЕЧНОЙ ПЕРЕНОРМИРОВКОЙ ЗАРЯДА

Направлено в ЖЭТФ

А н н о т а ц и я

Методом, развитым в предыдущих работах /4/, рассмотрена предложенная Бялыницким-Бируля модель локальной теории поля. Получены S-матрица и константы перенормировок. Доказано, что перенормировка заряда конечна во всех порядках и не содержит логарифмических особенностей. Показывается, что вклад в ряды от ультрафиолетовой области суммируется к конечному пределу. Доказано, что ряд для функции Грина нуклона сходится абсолютно при малых временах и имеет точку ветвления при t =0, причем особенность в нуле интегрируема.

Введение

При исследовании внутренней замкнутости квантовой теории поля известную популярность приобрело изучение различных моделей, так как на пути получения решений точных уравнений поля лежат пока непреодолимые трудности. Исследование модели Ли[1] привело, как казалось, к выводу о внутренней противоречивости теории. Однако, позднее было показано[2], что несамосогласованность модели связана с упрощениями, которые делаются для получения точно решаемого гамильтониана. В частности, этими упрощениями нарушается важное требование перекрестной симметрии.

В настоящей статье методом, развитым авторами в предыдущих работах[3,4], исследуется предложенная Бялыницким-Бируля[5] модифицированная модель Ли, в которой выполнено условие перекрестной симметрии. Решения получаются в виде рядов по перенормированной константе Δm. (Δm - физический параметр, обуславливающий разность масс между двумя фермионными состояниями в модели). Доказана сходимость этих рядов в ультрафиолетовой области $E \gg \Delta m$. Важным свойством модели является конечная перенормировка заряда во всех порядках по Δm в случае точечного взаимодействия, в противоположность модели Ли, где существует хорошо известная проблема нуль-заряда.

Функция Грина рассматриваемой модели обладает всеми свойствами функции Грина перенормируемой теории[6,7]: 1. Перенормированный пропагатор аналитичен в плоскости t и при $t=0$ имеет точку ветвления, 2/ при $g^2/\pi^2 < 1$ существует фурье-образ, который допускает разложение в ряд около точки $g^2=0$.

1. S - матрица модели

В работе Бялыницкого-Бируля была рассмотрена модель локальной теории поля с фиксированным нуклоном, в которой нуклон может находиться в двух состояниях, отличающихся друг от друга по массе (мы условно будем называть эти состояния протоном и нейтроном).

Гамильтониан системы имеет вид:

$$H = m_0(\psi^+\psi) + \frac{1}{2}\int d\vec{x} : [\pi^2(\vec{x}) + (\vec{\nabla}\varphi(\vec{x}))^2 + \mu^2\varphi^2(\vec{x})] : + \tag{1}$$

$$+ g(\psi^+\tau_1\psi)\int d\vec{x}\,\varphi(\vec{x})\delta(\vec{x}) + \Delta m_0(\psi^+\tau_3\psi),$$

где $\psi = v_p c_p + v_n c_n$ – оператор нуклонного поля, c_N $(N = p, n)$ – оператор уничтожения нуклона, v_N – спинор, описывающий нуклон $[v_p = \binom{1}{0},\ v_n = \binom{0}{1}]$; $\pi(\vec{x})$ и $\varphi(\vec{x})$ – операторы мезонного поля, τ_1 и τ_3 – матрицы изотопического спина 1/2.

Заметив, что при $\Delta m_0 = 0$ получается точно решаемый случай скалярных мезонов с фиксированным источником, можно применить теорию возмущения по константе Δm_0, не ограничивая силы взаимодействия между нуклоном и мезонами. Этим способом в работе /5/ был получен интересный результат, заключающийся в том, что перенормировка заряда оказалась конечной, не содержащей логарифмических особенностей.

С точки зрения метода, развитого в работах /3,4/ x), гамильтониан (1) интересен тем, что ряд Лаппо-Данилевского совпадает здесь с рядом теории возмущения по константе Δm_0, однако, новый метод позволяет получить n-й член ряда, чего не дает теория возмущения.

Итак, рассмотрим уравнение для S-матрицы в представлении взаимодействий. Будем искать сразу "адиабатическую" S^α-матрицу, чтобы воспользоваться формулами (I.4.2) и (I.4.3).

В представлении взаимодействия имеем:

$$i\frac{\partial}{\partial t} S^\alpha(t,t_0) = H_I(t)\, e^{-\alpha|t|} S^\alpha(t,t_0)$$

$$S^\alpha(t,t_0)\Big|_{t=t_0} = 1$$

x) Далее работа /4/ будет обозначаться как I.

где

$$H_I(t) = g(\psi^+\tau_1\psi)\hat{\varphi}(t) + \Delta m_o(\psi^+\tau_3\psi)$$

$$\hat{\varphi}(t) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(a_{\vec{k}} e^{-i\omega t} + a_{\vec{k}}^+ e^{i\omega t} \right). \tag{2}$$

Повторяя полностью процедуру, изложенную в разделах /I. 1 –3 /, получим следующее выражение для $S^\alpha(t,t_o)$ – матрицы:

$$S^\alpha(t,t_o) = 1 - [2(\psi^+\psi) - (\psi^+\psi)^2] +$$
$$+\sum_{q=0}^{\infty} \frac{[-i(\psi^+\tau_3\psi)\Delta m_o]^q}{q!} \int_{t_o}^{t} d\xi_1 \ldots \int_{t_o}^{t} d\xi_q \, exp\left\{-\alpha\sum_{j=1}^{q}|\xi_j|\right\} : exp\left\{-ig(\psi^+\tau_1\psi)\int_{t_o}^{t} ds\, e^{-\alpha|s|} \prod_{j=1}^{q} \mathcal{E}(\xi_j - s)\hat{\varphi}(s)\right\} : \times$$
$$\times\, exp\left\{-\frac{ig^2}{2}\int_{t_o}^{t}\int_{t_o}^{t} ds_1 ds_2\, e^{-\alpha(|s_1|+|s_2|)} \prod_{j=1}^{q} \mathcal{E}(\xi_j - s_1)\,\Delta(s_1 - s_2)\,\mathcal{E}(\xi_j - s_2)\right\}. \tag{3}$$

Найденная S^α – матрица определена с точностью до унитарного фазового множителя и для нее выполняются равенства

$$S^\alpha(\infty,-\infty)|0\rangle = |0\rangle$$
$$S^\alpha(\infty,-\infty)|N\rangle = e^{i\frac{Const}{\alpha}}|N\rangle, \tag{4}$$

где $|0\rangle$ и $|N\rangle$ обозначают вакуумное и однонуклонное состояния свободного гамильтониана. Однако, обычные условия стабильности вакуума и одночастичного состояния требуют, чтобы

$$S(\infty,-\infty)|0\rangle = |0\rangle$$
$$S(\infty,-\infty)|N\rangle = |N\rangle. \tag{5}$$

Во всех дальнейших расчетах мы будем пользоваться адиабатической гипотезой, которая позволит, в частности, корректно устранить неопределенный при $\alpha=0$ фазовый множитель [10] и, следовательно, удовлетворить условию (5) (см.приложение А).

Рассмотрим теперь наиболее важные матричные элементы S -матрицы.

Собственное значение энергии однофермионного состояния равно /10/ (см. приложение Б).

$$E_N = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\langle N|HS^{\alpha}(0,-\infty)|N\rangle}{\langle N|S^{\alpha}(0,-\infty)|N\rangle} =$$

$$= m + \delta_N \Delta m \sum_{q=0}^{\infty} (-\delta_N \Delta m)^q \int_0^{\infty} dx_1 \ldots \int_0^{\infty} dx_q \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_q \; \times \tag{6}$$

$$\times \frac{\partial^q}{\partial x_1 \ldots \partial x_q} \exp\left\{ 2g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega^3} \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{m=1}^{\ell} (-)^{\ell+m} e^{-\omega \sum_{j=m}^{\ell} x_j} \right\}$$

где

$$\delta_N = \begin{cases} +1 \text{ для протона } & (N=p) \\ -1 \text{ для нейтрона } & (N=n) \end{cases} \tag{6'}$$

$$m = m_0 - \frac{1}{2} g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega^2}$$

$$\Delta m = \Delta m_0 \exp\left\{ -g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega^3} \right\}. \tag{6''}$$

Требование конечности наблюдаемых m и Δm приводит к тому, что затравочные величины m_0 и Δm_0 необходимо считать бесконечными. Заметим, что перенормировка m_0 точно совпадает со случаем скалярных мезонов в поле фиксированного источника. После проведения перенормировок (6') и (6'') каждый член ряда (6) конечен при условии $g^2/\pi^2 < 1$ x) (подробнее см. приложение Б).

Константа перенормировки фермионного поля Z_2^N определяется, согласно ее вероятностному смыслу, квадратом матричного элемента

$$Z_2^N = |\langle N|\mathbf{N}\rangle|^2 = |\langle N|S^{\alpha}(0,-\infty)|N\rangle|^2 =$$

---

x) В работе /5/ приведено неправильное условие конечности членов ряда $\frac{g^2}{4\pi^2} < e^{-1}$

$$= Z_2^{ск}\Big[\sum_{q=0}^{\infty}(\delta_N \Delta m)^q \int_0^{\infty} dx_1 \ldots \int_0^{\infty} dx_q \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_q \times$$

$$\times \frac{\partial^q}{\partial x_1 \cdots \partial x_q} \exp\Big\{g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega^3}\Big[-\sum_{\ell=1}^{q}(-)^{\ell} e^{-\omega \sum_{j=1}^{\ell} x_j} + 2\sum_{\ell=2}^{q}\sum_{m=2}^{\ell}(-)^{\ell+m} e^{-\omega \sum_{j=m}^{\ell} x_j}\Big]\Big\}\Big]^2, \qquad (7)$$

где

$$Z_2^{ск} = \exp\Big\{-\frac{1}{2} g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega^3}\Big\}$$

$|N\rangle$ – обозначает однонуклонное состояние полного гамильтониана.

Подчеркнем, что константа Z_2^N в рассматриваемой модели равна произведению константы $Z_2^{ск}$ скалярной нейтральной теории с фиксированным источником на ряд из конечных членов, так как при $g^2/\pi^2 < 1$ все члены ряда конечны. В дальнейшем это обстоятельство позволит сделать заключения о константе Z_1. Перенормированная константа связи определяется как обычно:

$$\frac{g_r}{g} = \langle p|(\psi^+ \tau_1 \psi)|n\rangle = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\langle p| S^{\alpha}(\infty,0)(\psi^+\tau_1\psi) S^{\alpha}(0,-\infty)|n\rangle}{\sqrt{\langle p| S^{\alpha}(\infty,-\infty)|p\rangle \langle n| S^{\alpha}(\infty,-\infty)|n\rangle}} = \qquad (8)$$

$$= 1 + \sum_{q=1}^{\infty}(\Delta m)^{2q} \int_0^{\infty} dx_1 \ldots \int_0^{\infty} dx_{2q-1} \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2q-1} \cdot \sum_{j=1}^{q} x_{2j-1} \times$$

$$\times \frac{\partial^{2q-1}}{\partial x_1 \cdots \partial x_{2q-1}} \exp\Big\{2g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega^3} \sum_{\ell=1}^{2q-1}\sum_{m=1}^{\ell}(-)^{\ell+m} e^{-\omega \sum_{j=m}^{\ell} x_j}\Big\}.$$

Ситуация в этой модели существенно отличается от той, которая возникла для заряженной теории (см./1.4.10/и далее), так как в точке $g^2 = 0$ все интегралы ограничены в противоположность выражению /1.4.12/. Поэтому здесь при применении теории возмущения, т.е. при представлении решения в виде ряда по g^2, не возникает логарифмических расходимостей по максимальному импульсу обрезания, столь характерных для локальной теории поля. В этой связи данная модель, на наш взгляд, не отражает некоторых фундаментальных трудностей, свойственных точным уравнениям мезодинамики.

Константа перенормировки вершинной части Z_1 может быть найдена из хорошо известного уравнения

$$g_r = Z_1^{-1} \left(Z_2^p Z_2^n \right)^{1/2} Z_3^{1/2} g .$$

В данной модели константа перенормировки мезонного поля Z_3 равна 1. Используя (7) и (8), можно заключить, что константа Z_1 имеет структуру

$$Z_1 = Z_2^{ck} \cdot \sigma(g^2, \Delta m), \tag{9}$$

где $\sigma(g^2, \Delta m)$ ряд по Δm из конечных величин при $g^2/\pi^2 < 1$.

Напишем матричный элемент упругого рассеяния мезона на нуклоне (см. приложение А)

$$S_{f\leftarrow i} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\langle N | a_{\vec{p}_f} S^{\alpha}(\infty, -\infty) a^{+}_{\vec{p}_i} | N \rangle}{\langle N | S^{\alpha}(\infty, -\infty) | N \rangle} =$$

$$= \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_f) - 2\pi i\, \delta(\omega_i - \omega_f)\, M_{f\leftarrow i}(\omega_f), \tag{10}$$

где

$$M_{f\leftarrow i}(\omega_f) = - \frac{2\delta_N g^2}{\omega_f^2} \cdot \frac{\Delta m}{\omega_f} \sum_{q=0}^{\infty} (-i\delta_N \Delta m)^q \int_0^{\infty} dx_1 \ldots \int_0^{\infty} dx_q \Big[q + 1 -$$

$$- \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{m=1}^{q} (-)^{\ell+m} \Big(e^{i\omega_f \sum_{j=m}^{\ell} x_j} + e^{-i\omega_f \sum_{j=m}^{\ell} x_j} \Big) \Big] \times$$

$$\times (-)^q \int_{x_1}^{\infty} dy_1 \ldots \int_{x_q}^{\infty} dy_q \frac{\partial^q}{\partial y_1 \ldots \partial y_q} \exp\Big\{ 2g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega^3} \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{m=1}^{\ell} (-)^{\ell+m} e^{-i\omega \sum_{j=m}^{\ell} y_j} \Big\} .$$

2. О сходимости рядов для E_p, Z_2^n, g_r.

Доказательство сходимости рядов (6)-(10) чрезвычайно сложно, так как оценка n-ого члена требует крайне тонких методов апроксимаций, без которой нельзя судить о поведении рядов в целом. Однако, ряды для E_p , Z_2^n и g_r удается просуммировать в некотором обобщенном смысле /9/ (мы будем говорить в $\mathcal{E}$ - смысле), суть которого изложим на примере ряда для E_p .

Рассмотрим ряд

$$\delta m = \sum_{q=0}^{\infty} (-\Delta m)^q \int_0^{\infty} dx_1 \dots \int_0^{\infty} dx_q \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_q \frac{\partial^q}{\partial x_1 \cdot \ldots \cdot \partial x_q} F_q(x_1, \dots, x_q), \tag{11}$$

где

$$F_q(x_1, \dots, x_q) = \exp\left\{ 2g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega^3} \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{m=1}^{\ell} (-)^{\ell+m} e^{-\omega \sum_{j=m}^{\ell} x_j} \right\}.$$

После интегрирования по частям в каждом члене, получим (см.формулу /Б.8/ в приложении Б).

$$\delta m = \sum_{q=0}^{\infty} (\Delta m)^q \int_0^{\infty} dx_1 \dots \int_0^{\infty} dx_q \prod_{j=1}^{q} (1 - \hat{Q}_j) F_q(x_1, \dots, x_q), \tag{12}$$

где оператор $\hat{Q}_j$ определен равенством:

$$\hat{Q}_j F_q(\dots, x_j, \dots) = F_q(\dots, \infty, \dots).$$

Введем другой ряд

$$\delta m^{\varepsilon} = \sum_{q=0}^{\infty} (\Delta m)^q \int_0^{\infty} dx_1 \dots \int_0^{\infty} dx_q \, e^{-\varepsilon \sum_{j=1}^{q} x_j} \prod_{\ell=1}^{q} (1 - \hat{Q}_\ell) F_q(x_1, \dots, x_q), \tag{13}$$

который при $\varepsilon = 0$ переходит в (12).

Можно показать, что для ε, удовлетворяющих неравенству:

$$\frac{\Delta m}{\varepsilon} < 1 - \Delta m \int_0^{\infty} dx \, e^{-\varepsilon x} F_1(x), \tag{14}$$

ряд (13) ограничен величиной (см.приложение В)

$$\delta m^{\varepsilon} < \left\{ 1 - \Delta m \int_0^{\infty} dx \, e^{-\varepsilon x} [F_1(x) - 1] \right\}^{-1} \tag{15}$$

При $\varepsilon \to 0$ левая часть неравенства (15) переходит в исходный ряд (12), а правая часть имеет конечный положительный предел при $\Delta m \int_0^{\infty} dx [F_1(x) - 1] < 1$.

Изложенная процедура означает, что ряд (11) суммируем в обобщенном смысле[x)] ($\mathcal{E}$ - смысле) при

$$\Delta m \int_0^\infty dx [F_1(x) - 1] < 1$$

и его сумма ограничена величиной

$$\delta m < \left\{ 1 - \Delta m \int_0^\infty dx [F_1(x) - 1] \right\}^{-1} \qquad (\mathcal{E}) \qquad (16)$$

В $\mathcal{E}$ - смысле суммируются ряды для Z_2^n и g_r. Приведем результат:

$$Z_2^n < Z_2^{ck} \left\{ 1 - \Delta m \int_0^\infty dx [F_1(x) - 1] \right\}^{-2} \qquad (\mathcal{E}) \qquad (17)$$

$$\left| \frac{g_r}{g} - 1 \right| < \frac{2(\Delta m)^2 \int_0^\infty dx \cdot x [F_1(x) - 1]}{\left\{ 1 - \left(\Delta m \int_0^\infty dx [F_1(x) - 1] \right)^2 \right\}^2} \qquad (\mathcal{E}) \qquad (17')$$

Остановимся на физическом смысле предложенного суммирования. Мы видели, что ряд (13) сходится обычным образом при достаточно больших $\mathcal{E}$ (условие /14/), но ряд (13) отличается от (12) тем, что в нем уменьшен вклад от больших времен (большие X_j), т.е. от малых энергий. Следовательно, вклад от ультрафиолетовой области оказывается суммируемым к конечной величине, что кажется неожиданным с точки зрения локальной теории поля.

В связи с этим интересно исследовать поведение функции Грина при малых временах, т.е. в ультрафиолетовой области. Функция Грина определяется:

$$G(t) = \langle 0 | T \{ \psi(t) \psi^+(0) S(\infty, -\infty) \} | 0 \rangle =$$

$$= Z_2^{ck} \cdot G_{ck}(t) \sum_{q=0}^{\infty} (-i \tau_3 \Delta m)^q \int_0^t d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \ldots \int_0^{\xi_{q-1}} d\xi_q \times \qquad (18)$$

$$\times \exp \left\{ -g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega^3} \left[\sum_{\ell=1}^{q} (-)^\ell \left(e^{-i\omega(t-\xi_\ell)} - e^{-i\omega \xi_\ell} \right) + \right. \right.$$

---

x) Изложенный метод является регулярным, т.е. сходящиеся ряды вида (11) суммирует к их обыкновенной сумме /9/.

$$+ 2\sum_{\ell=2}^{q}\sum_{m=1}^{\ell-1}(-)^{\ell+m}e^{-i\omega(\zeta_m-\zeta_\ell)}\Big]\Big\},$$

где
$$G_{ck}(t) = \theta(t)e^{-imt}\exp\Big\{\frac{1}{2}g^2\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\omega^3}e^{-i\omega t}\Big\}.$$

Функция $G_{ck}(t)$ является функцией Грина скалярной нейтральной теории и при малых временах ведет себя как $t^{-g^2/4\pi^2}$ (11).

Можно показать (см.приложение Г), что ряд по Δm при малых t ($\mu t << 1$) сходится абсолютно при условии $g^2/\pi^2 < 1$ и имеет в t =0 точку ветвления. Таким образом, функция $G(t)$ имеет при $t=0$ особую точку, причем эта особенность интегрируема из-за условия $g^2/\pi^2 < 1$, что делает возможным Фурье-преобразование.

Заключение

Приведенный пример модели с конечной перенормировкой заряда показывает другую возможность (по сравнению с моделью Ли), которая может осуществляться в строгой теории. Однако, по нашему мнению, и эта модель не отражает истинного положения в теории поля, так как исследование более сложных моделей (см. /4/) приводит, по-видимому, к выводу о существовании в точном решении особой точки $g^2=0$, разложение решения около которой в ряд Тейлора приводит к дополнительным расходимостям. Как уже отмечалось выше, рассматриваемая модель подобным свойством не обладает.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность проф.Д.И.Блохинцеву за постоянный интерес к работе и стимулирующие обсуждения, а также Л.Г.Заставенко за обсуждение математических вопросов.

Приложение А

Так как S^{α} - матрица задана в виде ряда, то матричные элементы представляются в виде предела при $\alpha \to 0$ от отношения двух рядов. Оказывается, что, если разделить один ряд на другой и собрать члены при одинаковых степенях Δm, то в полученных таким способом членах фаза сокращается, и, следовательно, можно переходить к пределу при $\alpha \to 0$ в каждом члене отдельно.

Проиллюстрируем процедуру устранения фазы на примере матричного элемента рассеяния мезона на нуклоне (см.формулу /10/)

$$M_{f\leftarrow i}(\omega_f) = \frac{g^2}{2i\omega_f}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-i\omega_f \tau} \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sum_{q=1}^{\infty}(-i\delta_N \Delta m_0)^q B_q^{\alpha}(\tau)}{\sum_{q=0}^{\infty}(-i\delta_N \Delta m_0)^q b_q^{\alpha}}, \tag{A.1}$$

где

$$B_q^{\alpha}(\tau) = \frac{1}{q!}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_q \, \exp\Big\{-\alpha\sum_{j=1}^{q}|\xi_j|\Big\} \prod_{\ell=1}^{q} \mathcal{E}(\xi_\ell)\mathcal{E}(\xi_\ell - \tau) \times$$
$$\times \exp\Big\{-\frac{ig^2}{2}\iint_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2\, e^{-\alpha(|s_1|+|s_2|)} \prod_{j=1}^{q} \mathcal{E}(\xi_j - s_1)\Delta(s_1 - s_2)\mathcal{E}(\xi_j - s_2)\Big\} \tag{A.2'}$$

$$b_q^{\alpha} = \frac{1}{q!}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_q \, \exp\Big\{-\alpha\sum_{j=1}^{q}|\xi_j|\Big\} \times$$
$$\times \exp\Big\{-\frac{ig^2}{2}\iint_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2\, e^{-\alpha(|s_1|+|s_2|)} \prod_{j=1}^{q} \mathcal{E}(\xi_j - s_1)\Delta(s_1 - s_2)\mathcal{E}(\xi_j - s_2)\Big\} \tag{A.2''}$$

Интеграл показателя экспоненты равен:

$$-\frac{ig^2}{2}\iint_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2\, e^{-\alpha(|s_1|+|s_2|)} \prod_{j=1}^{q} \mathcal{E}(\xi_j - s_1)\Delta(s_1-s_2)\mathcal{E}(\xi_j - s_2) = -\frac{g^2}{2i\alpha}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\omega^2} -$$

$$-g^2\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\omega^3}\left\{ q + 2\sum_{\nu_1=2}^{q}\sum_{\nu_2=1}^{\nu_1-1} \prod_{j_1\neq\nu_1}\mathcal{E}(\xi_{\nu_1}-\xi_{j_1})\prod_{j_2\neq\nu_2}\mathcal{E}(\xi_{\nu_2}-\xi_{j_2})\, e^{-i\omega|\xi_{\nu_1}-\xi_{\nu_2}|}\right\}. \quad (A.3)$$

Первое слагаемое одинаково для всех членов ряда и поэтому сокращается.

Наличие фазы в выражении для матричного элемента проявляется в том, что интегралы по времени (по ξ_j) расходятся линейно на бесконечности при $\alpha=0$. Однако, как сказано выше, ряд, представляющий собой отношение расходящихся при $\alpha=0$ рядов, содержит интегралы, конечные при $\alpha = 0$. Это обстоятельство обуславливается тем, что около каждой степени Δm расходящиеся интегралы группируются так, что бесконечности сокращаются. Процедура регуляризации следующая. Перейдем в интегралах (A.2') и (A.2") к интегрированию по симплексу и произведем замену переменных

$$\xi_1 = \xi$$
$$\xi_\ell = \xi - \sum_{j=1}^{\ell-1} x_j \qquad (\ell \geq 2), \quad (A.4)$$

тогда

$$B_q^\alpha(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} dx_1 \ldots \int_0^{\infty} dx_{q-1}\, e^{-\alpha(|\xi| + \sum_{\ell=1}^{q-1}|\xi - \sum_{j=1}^{\ell} x_j|)}\, \mathcal{E}(\xi)\mathcal{E}(\xi-\tau)\prod_{\ell=1}^{q-1}\mathcal{E}(\xi - \sum_{j=1}^{\ell}x_j)\mathcal{E}(\xi-\tau-\sum_{j=1}^{\ell}x_j)\times$$

$$\times\left(\frac{\Delta m}{\Delta m_0}\right)^q F_{q-1}(x_1,\ldots,x_{q-1}) \quad (A.5)$$

$$\mathcal{B}_q^\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} dx_1 \ldots \int_0^{\infty} dx_{q-1}\, e^{-\alpha(|\xi| + \sum_{\ell=1}^{q-1}|\xi - \sum_{j=1}^{\ell} x_j|)}\left(\frac{\Delta m}{\Delta m_0}\right)^q F_{q-1}(x_1,\ldots,x_{q-1}),$$

где

$$F_{q-1}(x_1,\ldots,x_{q-1}) = \exp\left\{2g^2\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\omega^3}\sum_{\ell=1}^{q-1}\sum_{m=1}^{\ell}(-)^{\ell+m} e^{-i\omega\sum_{j=m}^{\ell}x_j}\right\}.$$

Интеграл от функции F_{q-1} расходится линейно на бесконечности по любому аргументу x_j, однако, функция $F_{q-1}(\ldots,x_j,\ldots) - F_{q-1}(\ldots,\infty,\ldots)$ уже интегрируется по x_j на бесконечности. Заметим далее, что

$$F_{q-1}(x_1,\ldots,x_{j-1},\infty,x_{j+1},\ldots,x_{q-1}) = F_{j-1}(x_1,\ldots,x_{j-1})\,F_{q-j-1}(x_{j+1},\ldots,x_{q-1}). \tag{A.6}$$

Из сказанного следует, что для того, чтобы регуляризировать функцию $B_q^{\alpha}(\tau)$ надо из функции F_{q-1} вычесть ее значения на бесконечности по каждому ее аргументу, т.е. вместо F_{q-1} поставить функцию

$$\prod_{\ell=1}^{q-1}(1-\hat{Q}_j)\,F_{q-1}(x_1,\ldots,x_{q-1}), \tag{A.7}$$

где оператор $\hat{Q}_j$ определяется равенством $\hat{Q}_j F_{q-1}(\ldots,x_j,\ldots) = F_{q-1}(\ldots,\infty,\ldots)$. Такая замена функции F_{q-1} на функцию (A.7) как раз и осуществляется делением на ряд и группировкой членов около одинаковых степеней Δm. То же самое относится и к регуляризации интеграла по ξ (A.5). Окончательно матричной элемент рассеяния с устраненной фазой записывается в виде:

$$M_{f\leftarrow i}(\omega_f) = \frac{g^2}{2i\omega_f}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-i\omega_f\tau}\sum_{q=1}^{\infty}(-i\delta_N\Delta m)^q\int_0^{\infty}dx_1\ldots\int_0^{\infty}dx_q\prod_{j=1}^{q}(1-\hat{Q}_j)F_q(x_1,\ldots,x_q)\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\left[\mathcal{E}(\xi)\mathcal{E}(\xi-\tau)\prod_{\ell=1}^{q}\mathcal{E}\Big(\xi-\sum_{j=1}^{\ell}x_j\Big)\mathcal{E}\Big(\xi-\tau-\sum_{j=1}^{\ell}x_j\Big)-1\right]. \tag{A.8}$$

Из (A.8) непосредственно получается (10), если учесть, что оператор $(1-\hat{Q}_j)$ может быть представлен в виде:

$$1-\hat{Q}_j = -\int_{x_j}^{\infty}dy_j\,\frac{\partial}{\partial y_j}. \tag{A.9}$$

Аналогичным способом устраняется фаза для любого другого матричного элемента.

Приложение Б

Согласно формуле (6) собственное значение однофермионного состояния определяется так:

$$E_N = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\langle N | H S^{\alpha}(0,-\infty) | N\rangle}{\langle N | S^{\alpha}(0,-\infty) | N\rangle} = m_0 + \delta_N \Delta m_0 + \delta E_N , \tag{Б.1}$$

где

$$\delta E_N = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\langle N | g(\psi^+\tau_1\psi)\hat{\varphi}(0) S^{\alpha}(0,-\infty) | N\rangle}{\langle N | S^{\alpha}(0,-\infty) | N\rangle} . \tag{Б.1'}$$

Матричный элемент в числителе равен

$$M_1^{\alpha} = \langle N | g(\psi^+\tau_1\psi)\hat{\varphi}(0) S^{\alpha}(0,-\infty) | N\rangle =$$

$$= -\sum_{q=1}^{\infty} (-i\delta_N \Delta m_0)^q \int_{-\infty}^{0} d\xi_1 \ldots \int_{-\infty}^{\xi_{q-1}} d\xi_q \, e^{\alpha \sum_{j=1}^{q} \xi_j} \, i g^2 \int_{-\infty}^{0} ds \, e^{\alpha s} \, i\Delta(s) \prod_{j=1}^{q} \mathcal{E}(s-\xi_j) \times \tag{Б.2}$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{ig^2}{2} \iint_{-\infty}^{0} ds_1 ds_2 \, e^{\alpha(s_1+s_2)} \prod_{j=1}^{q} \mathcal{E}(s_1-\xi_j)\Delta(s_1-s_2)\mathcal{E}(s_2-\xi_j) \right\} .$$

Матричный элемент в знаменателе (Б.1') получается аналогично

$$M_2^{\alpha} = \langle N | S^{\alpha}(0,-\infty) | N\rangle = \sum_{q=0}^{\infty} (-i\delta_N \Delta m_0)^q \tau_q ,$$

где

$$\tau_q = \int_{-\infty}^{0} d\xi_1 \ldots \int_{-\infty}^{\xi_{q-1}} d\xi_q \, e^{\alpha \sum_{j=1}^{q} \xi_j} \exp\left\{ -\frac{ig^2}{2} \iint_{-\infty}^{0} ds_1 ds_2 \, e^{\alpha(s_1+s_2)} \prod_{j=1}^{q} \mathcal{E}(s_1-\xi_j)\Delta(s_1-s_2)\mathcal{E}(s_2-\xi_j) \right\} \tag{Б.3}$$

Интеграл, стоящий в показателе экспоненты, равен (при $\xi_1 > \xi_2 > \ldots \xi_q$):

$$I_q(\xi_1,\ldots,\xi_q) = -\frac{ig^2}{2}\iint\limits_{-\infty}^{0} ds_1 ds_2\, e^{\alpha(s_1+s_2)} \prod_{j=1}^{q} \mathcal{E}(s_1-\xi_j)\,\Delta(s_1-s_2)\,\mathcal{E}(s_2-\xi_j) =$$

$$= -\frac{g^2}{4}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{i\alpha}+\frac{1}{\omega}\right) - g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega^3}\left[q + \sum_{\ell=1}^{q} (-)^{\ell} e^{i\omega\xi_\ell} + 2\sum_{\ell=2}^{q}\sum_{m=1}^{\ell-1} (-)^{\ell+m} e^{-i\omega(\xi_m-\xi_\ell)}\right] \quad (Б.4)$$

Первое слагаемое в (Б.4) одинаково для всех членов ряда как числителя, так и знаменателя, и, следовательно, сокращается. Вычисляя в (Б.2) интеграл , получим

$$M_1^{\alpha} = -\frac{g^2}{2}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega^2}\cdot M_2^{\alpha} - \sum_{q=1}^{\infty} (-i\delta_N \Delta m_0)^q \int\limits_{-\infty}^{0} d\xi_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{\xi_{q-1}} d\xi_q\, e^{\alpha\sum_{j=1}^{q}\xi_j} \times$$

$$\times\, i\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial\xi_q}\right) exp\left\{I_q(\xi_1,\ldots,\xi_q)\right\}. \quad (Б.5)$$

Рассмотрим теперь q-ый член ряда (Б.5)

$$\int\limits_{-\infty}^{0} d\xi_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{\xi_{q-1}} d\xi_q\, e^{\alpha\sum_{j=1}^{q}\xi_j}\, i\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial\xi_q}\right) exp\left\{I_q(\xi_1,\ldots,\xi_q)\right\} =$$

$$= i\,\tau_{q-1} - i\alpha q \tau_q. \quad (Б.6)$$

Далее, подставляя (Б.6) в (Б.5), получим для E_N, согласно (А.1), выражение

$$E_N = m_0 - \frac{g^2}{2}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\omega^2} + \lim_{\alpha\to 0} i\alpha \frac{\sum_{q=1}^{\infty}(-i\delta_N \Delta m_0)^q q\tau_q}{\sum_{q=0}^{\infty}(-i\delta_N \Delta m_0)^q \tau_q}. \quad (Б.7)$$

Производя в (Б.7) почленное деление ряда на ряд, тем самым исключим фазовый множитель в каждом порядке по Δm. Это делает возможным переход по $\alpha \to 0$ в каждом порядке по Δm /см. приложение А/.

В результате получим

$$E_N = m_0 - \frac{g^2}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega^2} +$$
$$+ \sum_{q=1}^{\infty} (-i\delta_N \Delta m)^q \int_0^{\infty} dx_1 \ldots \int_0^{\infty} dx_{q-1} \prod_{j=1}^{q-1} (1-\hat{Q}_j) F_{q-1}(x_1, \ldots, x_{q-1}), \qquad (Б.8)$$

где F_{q-1} дается (А.5). Из (Б.8) непосредственно получается (6), если учесть (А.9).

Приложение В

Рассмотрим формулу (13). Воспользуемся соотношениями:

$$\prod_{j=1}^{q} (1-\hat{Q}_j) = \sum_{\ell=0}^{q} (-)^{\ell} \sum_{s_1=\ell}^{q} \ldots \sum_{s_i=\ell-i+1}^{s_{i-1}-1} \ldots \sum_{s_\ell=1}^{s_{\ell-1}-1} \hat{Q}_{s_1} \ldots \hat{Q}_{s_i} \ldots \hat{Q}_{s_\ell} \qquad (В.1)$$

$$\int_0^{\infty} dx_1 \ldots \int_0^{\infty} dx_q \, e^{-\varepsilon(x_1+\ldots+x_q)} \hat{Q}_{s_1} \ldots \hat{Q}_{s_i} \ldots \hat{Q}_{s_\ell} F_q(x_1, \ldots, x_q) =$$
$$= \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\ell} I^{\varepsilon}_{s_\ell - 1} I^{\varepsilon}_{s_{\ell-1}-s_\ell-1} \ldots I^{\varepsilon}_{s_i - s_{i+1}-1} \ldots I^{\varepsilon}_{s_1-s_2-1} I^{\varepsilon}_{q-s_1} \qquad (В.2)$$

$$I^{\varepsilon}_s = \int_0^{\infty} dx_1 \ldots \int_0^{\infty} dx_s \, e^{-\varepsilon(x_1+\ldots+x_s)} F_s(x_1, \ldots, x_s) \qquad (В.3)$$

Подставляя эти соотношения в (13), получим после перемены порядка суммирования в суммах по q, ℓ и S_i и замены индексов суммирования (выкладки просты, но несколько громоздки, поэтому мы не будем их здесь приводить)

$$\delta m^{\varepsilon} = \sum_{q=0}^{\infty} (\Delta m)^q \bar{I}_q^{\varepsilon} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-\Delta m)^{\ell}}{\varepsilon^{\ell}} \left\{ \sum_{q=0}^{\infty} (\Delta m)^q I_q^{\varepsilon} \right\}^{\ell+1}, \tag{B.4}$$

где

$$\bar{I}_q^{\varepsilon} = \int_0^{\infty} dx_1 \ldots \int_0^{\infty} dx_q \, e^{-\varepsilon(x_1+\ldots+x_q)} \prod_{j=1}^{q} (1-\hat{Q}_j) \, F_q(x_1,\ldots,x_q).$$

Выполним формально в (B.4) суммирование

$$\delta m^{\varepsilon} = \left[\frac{\Delta m}{\varepsilon} + \left\{ \sum_{q=0}^{\infty} (\Delta m)^q I_q^{\varepsilon} \right\}^{-1} \right]^{-1}. \tag{B.5}$$

Так как $I_q^{\varepsilon} \leqslant (I_1^{\varepsilon})^q$, то

$$\delta m^{\varepsilon} \leqslant \left[\frac{\Delta m}{\varepsilon} + 1 - \Delta m \, I_1^{\varepsilon} \right]^{-1} = \left[1 - \Delta m \, \bar{I}_1^{\varepsilon} \right]^{-1}. \tag{B.6}$$

Суммирование в (B.4) будет справедливым, если ε удовлетворяет условиям:

$$\Delta m \, I_1^{\varepsilon} < 1 \tag{B.7а}$$

$$\frac{\Delta m}{\varepsilon} < 1 - \Delta m \, I_1^{\varepsilon}, \tag{B.7б}$$

из которых более сильное второе.

Приложение Г

Рассмотрим q -ый член ряда (18) для функции Грина

$$J_q(t) = (-i\Delta m)^q \int_0^t d\xi_1 \dots \int_0^{\xi_{q-1}} d\xi_q \ \exp\Big\{-g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega^3} \Big[\sum_{\ell=1}^{q} (-)^\ell \big(e^{-i\omega(t-\xi_\ell)} -$$

$$- e^{-i\omega\xi_\ell} \big) + 2 \sum_{\ell=2}^{q} \sum_{m=1}^{\ell-1} (-)^{\ell+m} e^{-i\omega(\xi_m-\xi_\ell)} \Big]\Big\} \qquad (\text{Г}.1)$$

Так как нас будет интересовать поведение функции Грина при малых временах ($\mu t \ll 1$), то стоящие в экспоненте функции можно заменить их асимптотическим разложением при малых аргументах.

$$g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega^3} e^{-i\omega\xi} = - G^2 \ln(i\mu\xi) + G^2 (\ln 2 - C - 1) + O(\mu\xi), \qquad (\text{Г}.2)$$

где C - постоянная Эйлера, $G^2 = \dfrac{g^2}{2\pi^2}$.

Производя далее замену переменных интегрирования в (Г.1) $\xi_j = \mu t \cdot x_j$ и подставляя туда асимптотическое разложение (Г.2), получим

$$J_q(t) = \Big(-\frac{\Delta m}{\mu}\Big)^q (i\mu t)^{q - 2G^2[\frac{q}{2}]} \exp\{2G^2(\ln 2 - C - 1)[\tfrac{q}{2}]\} \cdot I_q$$

где

$$I_q = \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{q-1}} dx_q \prod_{z=1}^{q} \Big(\frac{1-x_z}{x_z}\Big)^{(-)^z G^2} \prod_{\ell=2}^{q} \prod_{m=1}^{\ell-1} (x_m - x_\ell)^{(-)^{\ell+m} 2G^2} \qquad (\text{Г}.3)$$

$$\Big[\frac{q}{2}\Big] = \begin{cases} \dfrac{q}{2}, & \text{если } q \text{ четное} \\ \dfrac{q-1}{2}, & \text{если } q \text{ нечетное} \end{cases}$$

Рассмотрим сначала числа I_q для четных значений $q = 2n$

$$I_{2n} = \int_0^1 dx_1 \ldots \int_0^{x_{2n-1}} dx_{2n} \prod_{r=1}^{n} \left[\frac{(1-x_{2r})\,x_{2r-1}}{x_{2r}(1-x_{2r-1})} \right]^{\sigma^2} \times \tag{Г.4}$$

$$\times \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{(x_{2l-1}-x_{2l})^{2\sigma^2}} \prod_{m=1}^{l-1} \left[\frac{(x_{2m}-x_{2l})(x_{2m-1}-x_{2l-1})}{(x_{2m}-x_{2l-1})(x_{2m-1}-x_{2l})} \right]^{2\sigma^2} .$$

Произведем в интегралах следующую замену переменных

$$x_l = \prod_{j=1}^{l} z_j , \tag{Г.5}$$

тогда получим

$$I_{2n} = \int_0^1 dz_1 \ldots \int_0^1 dz_{2n} \prod_{s=1}^{2n} z_s^{(2n+1-s)(1-\sigma^2)-1} \times$$

$$\times \prod_{l=1}^{n} \left(\frac{1-\prod_{j=1}^{2l} z_j}{1-\prod_{j=1}^{2l-1} z_j} \right)^{\sigma^2} \frac{1}{(1-z_{2l})^{2\sigma^2}} \prod_{m=1}^{l-1} \left[\frac{\left(1-\prod_{j=2m+1}^{2l} z_j\right)\left(1-\prod_{j=2m}^{2l-1} z_j\right)}{\left(1-\prod_{j=2m+1}^{2l-1} z_j\right)\left(1-\prod_{j=2m}^{2l} z_j\right)} \right]^{2\sigma^2} . \tag{Г.6}$$

Легко видеть, что интегралы сходятся на верхнем пределе при условии

$$2\sigma^2 < 1 \qquad \text{или} \qquad \frac{g^2}{\pi^2} < 1 . \tag{Г.7}$$

Для оценки числа I_{2n} сверху воспользуемся неравенством

$$\frac{1-x}{1-x\beta} \leqslant 1 \qquad \text{при} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1 . \tag{Г.8}$$

Оценка дает

$$I_{2n} \leqslant \int_0^1 \frac{dz_1\, z_1^{2n(1-\sigma^2)-1}}{(1-z_1)^{\sigma^2}} \prod_{l=2}^{2n} \int_0^1 dz_l \frac{z_l^{(2n+1-l)(1-\sigma^2)-1}}{(1-z_l)^{2\sigma^2}} . \tag{Г.9}$$

Вычисление интегралов приводит к результату:

$$I_{2n} \leqslant \frac{\left[(1-G^2)\Gamma(1-2G^2)\right]^{2n}}{\Gamma\left(\frac{1-2G^2}{1-G^2}\right)}\,\Gamma\left(\frac{(2n+1)(1-G^2)-1}{1-G^2}\right)\left[\frac{\Gamma(1-G^2)}{\Gamma\left((2n+1)(1-G^2)\right)}\right]^2. \qquad (\Gamma.10)$$

При стремлении n к бесконечности неравенство имеет вид:

$$I_{2n} \leqslant \frac{\left[\Gamma(1-2G^2)\right]^{2n}}{\Gamma\left((2n+1)(1-2G^2)\right)}\cdot\frac{(1-G^2)^{2n}\left[\Gamma(1-G^2)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{1-2G^2}{1-G^2}\right)}\left[\frac{(1-2G^2)^{(1-2G^2)}}{(1-G^2)^{2(1-2G^2)}}\right]^{2n+1} \qquad (\Gamma.11)$$

при

$$(2n+1)(1-2G^2) \gg 1 .$$

Наличие в знаменателе в правой части неравенства фактора $\Gamma((2n+1)(1-2G^2))$ обеспечивает абсолютную сходимость ряда (Г.1) при малых t $(\mu t \ll 1)$, произвольных Δm и условии на затравочную константу связи $g^2/\pi^2 < 1$.

Оценка нечетных чисел I_{2n+1} производится аналогичным способом и дает то же результат.

Рукопись поступила в издательский
отдел 27 сентября 1960года.

Литература

1. T.D.Lee. Phys.Rev. 95, 1329 (1954).
2. Th.W.Ruijgrok, L.Van Hove. Physica, 22, 880 (1956).
3. Б.М.Барбашов, Г.В.Ефимов. ЖЭТФ, 38, 198 (1960).
4. Б.М.Барбашов, Г.В.Ефимов. ЖЭТФ, 39, 450 (1960), препринт ОИЯИ Д-498 (1960 .
5. I.Bialynicki-Birula. Nucl.Phys. 12, 309 (1959).
6. R.Arnowitt and S.Deser. Phys.Rev. 100, 349 (1955).
7. L.N.Cooper. Phys.Rev. 100, 362 (1955).
8. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957 г.
9. Г.Харди. Расходящиеся ряды. ИЛ, 1951.
10. M.Gell-Mann, F.Low, Phys.Rev. 84, 350 (1951).
11. S.F.Edwards, R.E.Peierls. Proc.Roy.Soc. 224, 24 (1954).