ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Л.Д. Соловьев

Д-580

ФОТОРОЖДЕНИЕ ПИОНОВ НА ПИОНАХ

ЖЭТФ, 1961, т40, в2, с 597.

Дубна 1960 год

Д-580

Л.Д. Соловьев

ФОТОРОЖДЕНИЕ ПИОНОВ НА ПИОНАХ

А н н о т а ц и я

Найдено точное решение уравнения, описывающего фоторождение пионов на пионах при низких энергиях. Сформулировано требование, отбирающее единственное решение. Решение определяется высокоэнергетическими особенностями амплитуды. Оно имеет резонансный характер, если имеется резонанс в рассеянии пионов на пионах в состоянии с $\mathcal{J} = I = 1$.

1. Введение

Фоторождение пионов на пионах

$$\gamma + \pi \rightarrow \pi + \pi \qquad (1)$$

необходимо рассматривать при изучении фоторождения пионов на нуклонах с помощью представления Мандельстама [1], точно так же, как для изучения пион-нуклонного рассеяния необходимо рассматривать рассеяние пионов на пионах.

При рассмотрении пион-пионного рассеяния в теорию вводится новая константа пион-пионного взаимодействия [2]. Должна ли войти еще одна подобная константа при рассмотрении фоторождения пионов на пионах? Теория возмущений отвечает на этот вопрос отрицательно. В самом деле, если четырехпионная вершина с четырьмя внутренними нуклонными линиями расходится, что заставляет вводить в лагранжиан соответствующий контр-член и константу пион-пионного взаимодействия (см., например, [3]), то аналогичная вершина с одной фотонной и тремя пионными внешними линиями сходится, так что нет нужды в новых контрчленах и новой константе. Более того, такие фотон-трехпионные контрчлены просто нельзя ввести из соображений ковариантности и перенормируемости. Таким образом, с точки зрения теории возмущений амплитуда фоторождения должна выражаться через "старые" константы (скажем, константы электромагнитного, пион-пионного и пион-нуклонного взаимодействий). Далее, если после того как электромагнитное взаимодействие учтено один раз при включении фотона, рассматривать только сильные взаимодействия и не учитывать пион - двухкаонного (πKK) взаимодействия (которое не может быть сильнее, чем электромагнитное [4]), то любая диаграмма процесса (1) должна содержать нуклонную или нуклон-гиперонную петлю (рис.1). Таким образом, процесс (1) существенно связан с барионами в промежуточных состояниях и должен исчезать в пределе бесконечно больших масс барионов.

Ниже будет показано, что эти результаты теории возмущений вытекают также из теории дисперсионных соотношений.

С помощью двойных дисперсионных соотношений процесс (1) рассматривался в работе [5], где для него получено однородное уравнение и в приближении резкого пионного резонанса найдено его решение, которое зависит от неопределенной константы и имеет резонансный характер в пределе, когда ширина пионного резонанса (при конечной его высоте) равна нулю. С физической же точки зрения ясно, что если амплитуда пионного рассеяния всюду равна нулю кроме одной точки, где она конечна, то процесс рассеяния не должен нигде проявляться.

В дальнейшем мы будем исходить из обычного (одномерного) дисперсионного соотношения в наблюдаемой области, предполагая, что оно справедливо без вычитаний. В п. 3 приведено физическое соображение, из которого следует, что если для рассеяния справедливы дисперсионные соотношения с одиним вычитанием (как в [2]), то для фоторождения, вследствие градиентной инвариантности, дисперсионные соотношения справедливы для вычитаний. Для того, чтобы из дисперсионного соотношения получить неоднородное уравнение, имеющее не нулевое решение, нужно учесть далекие особенности, в первую очередь особенность, соответствующую нуклон-антинуклонный паре в промежуточном состоянии в условии унитарности[x)].

Для уравнения, полученного из дисперсионного соотношения, в п.4 найдено решение в явном виде.

Это решение единственно, если пионная фаза на бесконечности стремится к нулю. Если же фаза стремится к π , решение не единственно. Однако, одно из решений на бесконечности стремится к неоднородному члену быстрее всех. Только это решение обладает тем свойством, что из него исчезает весь вклад от пионного рассеяния, если ширина пионного резонанса (при конечной высоте) стремится к нулю. Именно это решение мы выбираем как физическое.

Построены графики решения для двух моделей пионного резонанса, отличающихся поведением фазы на бесконечности.

[x)] Подобный учет далеких особенностей (для πK -рассеяния с перезарядкой) был сделан в работе А.А.Ансельма и В.М.Шехтера, доложенной на совещании по дисперсионным соотношениям в Дубне (май 1960 г.).

2. Кинематика

Пусть k и e - импульс и вектор поляризации фотона, q_1, α и $q_2, \beta; q_3, \gamma$ - импульсы и зарядовые числа соответственно начального и конечных пионов. Матричный элемент процесса (1) имеет вид[5]

$$\langle\pi\pi|S|\pi\gamma\rangle = (2\pi)^{-4}\delta(k+q_1-q_2-q_3)\frac{\varepsilon_{mnrs}\, q_1^m q_2^n q_3^r e^s}{4(q_1^0 q_2^0 q_3^0 k^0)^{1/2}}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \mathcal{F}(s,\bar{s},t), \tag{2}$$

где ε - полностью антисимметричные тензоры, а $\mathcal{F}$ - полностью симметричная функция инвариантов

$$\begin{aligned} s &= (q_2+q_3)^2 \\ \bar{s} &= (q_1-q_3)^2 \\ t &= (q_1-q_2)^2 \qquad\qquad s+\bar{s}+t = 3\mu^2. \end{aligned} \tag{3}$$

В системе центра масс

$$\langle\pi\pi|S|\pi\gamma\rangle = (2\pi)^4\delta(k+q_1-q_2-q_3)\frac{\vec{e}\,[\vec{q}\,\vec{k}]}{2(\omega_k k)^{1/2}}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \mathcal{F}(s,\bar{s},t) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} s &= (k+\omega_k)^2 = 4\omega_q^2 \\ \bar{s} &= \mu^2 - 2k\omega_q - 2kq\cos\theta \\ t &= \mu^2 - 2k\omega_q + 2kq\cos\theta, \end{aligned} \tag{5}$$

где μ - масса пиона $k = |\vec{k}|$, $\vec{q} = \vec{q}_3$, $\omega_k = (k^2+\mu^2)^{\frac{1}{2}}$, $\cos\theta = \dfrac{(\vec{k}\vec{q})}{kq}$

$$\mathcal{F}(s,\cos\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{2\ell+1}(s)\, P'_{2\ell+1}(\cos\theta) \tag{6}$$

Из условия унитарности следует, что при низких энергиях

$$f_l = |f_l| e^{i\delta_l^1}, \tag{7}$$

где δ_l^1 – фаза пион-пионного рассеяния в состоянии с угловым моментом l и изотопическим спином 1. Дифференциальное сечение равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{8} k q^3 \sin^2\theta \left| \frac{\mathcal{F}}{4\pi} \right|^2. \tag{8}$$

3. Дисперсионное соотношение.

Постулируем теперь степень роста $\mathcal{F}$ при фиксированном t и $s \to \infty$. Из (8) следует, что при фиксированном t и $s \to \infty$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\theta=0} = const \left| \sqrt{s}\, \mathcal{F} \right|^2. \tag{9}$$

Если бы это равенство относилось к упругому процессу, то из него следовало бы, что при фиксированном t и $s \to \infty$ $Jm\, \mathcal{F}$ ведет себя как полное сечение этого процесса. Имеются теоретические соображения (Грибов), что полное сечение на бесконечности должно убывать как $1/\ln^2 s$. Следовательно, так же должна была бы убывать $Jm\, \mathcal{F}$ в (9) для упругого процесса. Примем, что это имеет место и для рассматриваемого процесса.

Если вообще принять, что дифференциальные сечения вперед для фоторождения и рассеяния пионов на бесконечности имеют одинаковую степень роста, то инвариантные амплитуды для процессов фоторождения должны убывать быстрее, чем для рассеяния, так как из требования градиентной инвариантности между инвариантной амплитудой и матричным элементом фоторождения должен стоять энергетический множитель, отсутствующий в случае рассеяния. При этом, если для рассеяния дисперсионные соотношения справедливы с одним вычитанием, то для фоторождения они справедливы без вычитаний. Таким образом, мы примем, что одномерные дисперсионные соотношения для рассматриваемого процесса, строго доказанные в /6/, справедливы без вычитаний:

$$\mathcal{F}(s,t) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{Jm\, \mathcal{F}(s',t)}{s'-s-i\varepsilon}\, ds' + (s \to \bar{s}). \tag{10}$$

Если в этом соотношении ограничиться рассмотрением ближайших особенностеи, т.е. в условии унитарности учесть лишь двухпионное промежуточное состояние, то для амплитуды фоторождения мы получим однородное уравнение, которое должно иметь нулевое решение (требование единственности сформулировано ниже, п.4). Таким образом, рассматриваемый процесс существенно зависит от далеких особенностей.

Следующие особенности соответствуют 4,6 и т.д. пионам в промежуточных состояниях и их учет вводит в соотношение (10) амплитуды фоторождения многих пионов. В настоящее время мы не можем написать системы уравнений для этих амплитуд. Однако, ясно, что поскольку все эти амплитуды не имеют полюсных особенностей, такая система должна быть однородной, и ее решение должно быть нулевым. Следующая особенность соответствует каон-антикаонной паре $K\bar{K}$. Если не учитывать несильные взаимодействия, то амплитуда процесса $\gamma\pi \to K\bar{K}$ также не имеет полюсной особенности. Для нее нетрудно написать дисперсионное соотношение (без вычитаний, как и (10)), которое имеет нулевое решение, если равна нулю амплитуда фоторождения пионов.

Ближайшая особенность, которая вносит неоднородность в (10) соответствует нуклон-антинуклонной паре ($N\bar{N}$) в промежуточном состоянии, так как дисперсионные соотношения для амплитуды процесса $\gamma\pi \to N\bar{N}$ имеют неоднородный полюсный член.

После того как в рассматриваемые уравнения введена неоднородность, амплитудами фоторождения 4-х и т.д. пионов в рассматриваемой области малых энергий можно пренебречь.

Таким образом, в $Jm\,\mathcal{F}$ в (10) мы учтем два члена

$$Jm\,\mathcal{F} = (Jm\,\mathcal{F})_{\pi\pi} + (Jm\,\mathcal{F})_{N\bar{N}}, \tag{11}$$

где $(Jm\mathcal{F})_{\pi\pi}$ выражается через амплитуды процессов $\gamma\pi \to \pi\pi$ и $\pi\pi \to \pi\pi$ (формула 7), а $(Jm\,\mathcal{F})_{N\bar{N}}$ – через амплитуды процессов $\gamma\pi \to N\bar{N}$ и $\pi\pi \to N\bar{N}$.

$(Jm\,\mathcal{F})_{\pi\pi}$ в (11), вообще говоря, содержит область ненаблюдаемых углов при малых энергиях. Ненаблюдаемая область отсутствует при

$$t = -\mu^2/2 \tag{12}$$

и соотношение (10) в этом случае имеет вид

$$\mathcal{F}(s, \cos\theta = \frac{q}{K}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{4\mu^2}^{\infty} \frac{(Jm\,\mathcal{F}(s', \cos\theta = q'/K'))_{\pi\pi}}{s' - s - i\varepsilon}\, ds' + \tag{13}$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{4m^2}^{\infty} \frac{(Jm\,\mathcal{F}(s', \cos\theta = q'/K'))_{N\bar{N}}}{s' - s}\, ds' + (s \to \bar{s} = \frac{5}{2}\mu^2 - s)$$

здесь m – масса нуклона. Очевидно, что в интегралах с нижним пределом $4m^2$ можно положить $\cos\theta = 1$ и пренебречь s, $\bar{s}$ по сравнению с s'.

4. Интегральное уравнение и его решение.

При малых энергиях в наблюдаемой области в разложении (6) достаточно учесть низшие парциальные волны. Пренебрегая F и старшими волнами имеем

$$\mathcal{F}(s, \cos\theta) = f_1(s) \equiv f(s), \tag{14}$$

где f – амплитуда P – волны. Обозначив $\nu = q^2/\mu^2$, из (13) получаем

$$f(\nu) = \Lambda + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} Jm\,f(\nu')\left(\frac{1}{\nu' - \nu - i\varepsilon} + \frac{1}{\nu' + \nu + 9/8}\right) d\nu'. \tag{15}$$

Здесь

$$\Lambda = \frac{2}{\pi}\int\limits_{4m^2}^{\infty} \frac{(Jm\,\mathcal{F}(s', \cos\theta = 1))_{N\bar{N}}}{s'}\, ds' \tag{16}$$

$$f(\nu) = |f(\nu)|\, e^{i\delta(\nu)}, \quad \delta \equiv \delta_1^1 \tag{17}$$

Уравнение (15) кроссинг-симметрично (при замене $\nu \to -\nu - 9/8$) и для него может быть написано точное решение (см. [7], [8]).

1) Пусть при $\nu \to \infty$

$$\delta(\nu) \to 0 \quad \left(\delta(\nu) \to c\,\nu^{-\alpha}\,,\ \alpha > 0\right). \tag{18}$$

Обозначим

$$\Delta(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \delta(\nu) \left(\frac{1}{\nu - z} + \frac{1}{\nu + z + 9/8} \right) d\nu\,. \tag{19}$$

Эта кроссинг-симметричная функция голоморфна во всей плоскости z с разрезом от $-\infty$ до $-9/8$ и от 0 до ∞. Её предельные значения на разрезе сверху (+) и снизу (–) равны

$$\Delta^{\pm}(\nu) = \rho(\nu) \pm i\,\delta(\nu), \tag{20}$$

где

$$\rho(\nu) = \frac{1}{\pi}\, P \int_0^\infty \delta(x) \left(\frac{1}{x - \nu} + \frac{1}{x + \nu + 9/8} \right) dx. \tag{21}$$

При $z \to \infty$

$$\Delta(z) \to 0. \tag{22}$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{\rho(\nu)} \sin\delta(\nu) \left(\frac{1}{\nu - z} + \frac{1}{\nu + z + 9/8} \right) d\nu\,. \tag{23}$$

Она имеет ту же симметрию, ту же область голоморфности и те же разрезы, что и $\Delta(z)$, а её скачок на разрезе равен

$$\Psi^+ - \Psi^- = 2i\,e^{\rho} \sin\delta = \left(e^{\Delta}\right)^+ - \left(e^{\Delta}\right)^-. \tag{24}$$

Поэтому функция $\Psi(z)$ должна совпадать с $e^{\Delta(z)}$ с точностью до полинома. Так как при $z \to \infty$ $\Psi \to 0$, а $e^{\Delta} \to 1$, то этот полином равен 1.

(25)

Из (23), (25) и (20) следует, что

$$f(\nu) = \Lambda\, e^{\rho(\nu) + i\delta(\nu)} \tag{26}$$

есть решение уравнения (15). Это решение единственно, так как общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $P e^{\rho + i\delta}$, где P – полином (кроссинг-симметричный); на бесконечности оно должно стремиться к 0, т.е. $P \equiv 0$.

2) Пусть теперь при $\nu \to \infty$

$$\delta(\nu) \to \pi \qquad (\delta(\nu) \to \pi - c\,\nu^{-\alpha}\,, \ \alpha > 0). \tag{27}$$

Обозначим

$$\Delta(z) = \frac{z + 9/16}{\pi} \int_0^\infty \frac{\delta(\nu)}{\nu + 9/16} \left(\frac{1}{\nu - z} - \frac{1}{\nu + z + 9/8} \right) d\nu. \tag{28}$$

Эта функция обладает теми же свойствами, что и функция /19/, но при $z \to \infty$

$$\Delta(z) \to const - 2\ln(z + 9/16) \tag{29}$$

$$e^{\Delta(z)} \to \frac{const}{(z + 9/16)^2}\,. \tag{30}$$

Как и в предыдущем случае, нетрудно показать, что

$$f^{(1)}(\nu) = \Lambda\, \frac{1}{A} (\nu + 9/16)^2 e^{\rho + i\delta}, \tag{31}$$

где

$$\rho(\nu) = \frac{\nu + 9/16}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\delta(x)}{x + 9/16} \left(\frac{1}{x - \nu} - \frac{1}{x + \nu + 9/8} \right) dx \tag{32}$$

$$A = \left[\nu^2 e^{\rho+i\delta}\right]_{\nu=\infty} \tag{33}$$

есть решение уравнения (15). Однако это решение не единственно, так как к нему можно прибавить общее решение однородного уравнения, которое в этом случае равно

$$C e^{\rho+i\delta}, \tag{34}$$

где C – произвольная константа (C не может быть полиномом первой степени ввиду требования кроссинг-симметрии).

Таким образом, все решения уравнения (15) в данном случае имеют вид

$$f^{(1)}(\nu) + C e^{\rho+i\delta}. \tag{35}$$

Все они на бесконечности стремятся к Λ как ν^{-2}, поскольку при $\nu \to \infty$

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\nu) &= \Lambda\left(1 + \frac{\alpha}{\nu^2}\left(1 - \frac{9}{8\nu}\right) + \frac{\beta}{\nu^4} + \cdots\right) \\ e^{\rho+i\delta} &= \frac{\alpha_0}{\nu^2}\left(1 - \frac{9}{8\nu}\right) + \frac{\beta_0}{\nu^4}. \end{aligned} \tag{36}$$

И лишь единственное решение, для которого

$$C\alpha_0 = -\Lambda\alpha \tag{37}$$

на бесконечности стремится к Λ как ν^{-4}.

Мы будем считать физическим то решение уравнения (15), которое на бесконечности стремится к неоднородному члену быстрее, чем стремится к нулю любое решение соответствующего однородного уравнения.

Из (31), (35) – (37) получаем выражение для этого решения

$$f(\nu) = \Lambda \frac{1}{A}\left[(\nu + 9/16)^2 - A_1\right] e^{\rho+i\delta}, \tag{38}$$

где A дается формулой (33) и

$$A_1 = \left\{\nu^2\left[\frac{1}{A}(\nu + 9/16)^2 e^{\rho+i\delta} - 1\right]\right\}_{\nu=\infty}. \tag{39}$$

При больших энергиях из этого решения быстро исчезает вклад дисперсионного интеграла, следовательно, среди всех решений (35) оно менее всего чувствительно к деталям поведения фазы δ на бесконечности. Только это решение дает физически верный результат при стягивании к нулю ширины пионного резонанса. В самом деле, при

$$\delta = \begin{cases} 0 & \nu < \nu_R \\ \pi & \nu > \nu_R \end{cases} \tag{40}$$

$$e^{\rho(\nu)} = \left| \frac{(\nu_R + 9/16)^2}{(\nu_R - \nu)(\nu_R + \nu + 9/8)} \right| \tag{41}$$

$$f^{(1)}(\nu) = \Lambda \frac{(\nu_R + 9/16)^2}{(\nu - \nu_R)(\nu + \nu_R + 9/8)}$$

в то время как в (36)

$$f(\nu) = \Lambda . \tag{42}$$

Приведем выражение для амплитуды фоторождения для двух моделей пионного резонанса:

1)
$$\delta = \begin{cases} 0 & \nu < \nu_R - b\,, \quad \nu > \nu_R + b \\ \pi/2b\,(\nu + b - \nu_R) & \nu_R - b < \nu < \nu_R \\ \pi/2b\,(\nu_R + b - \nu) & \nu_R < \nu < \nu_R + b\,. \end{cases} \tag{43}$$

Выражение (26) дает

$$f(\nu) = \Lambda e^{i\delta} \varphi(\nu)$$

$$\varphi(\nu) = \left\{ \left| \frac{(\nu - \nu_R)^2}{(\nu + b - \nu_R)(\nu_R + b - \nu)} \right|^{\frac{\nu - \nu_R}{2b}} \left| \frac{\nu_R + b - \nu}{\nu + b - \nu_R} \right|^{\frac{1}{2}} \right\} \left\{ \nu \to -\nu - \frac{9}{8} \right\} \tag{44}$$

2)

$$\delta = \begin{cases} 0 & \nu < \nu_R - b \\ \pi/2b\,(\nu + b - \nu_R) & \nu_R - b < \nu < \nu_R + b \\ \pi & \nu > \nu_R + b \end{cases} \tag{45}$$

Выражение (38) дает

$$f(\nu) = \Lambda e^{i\delta} \varphi(\nu)$$

$$\varphi(\nu) = \left[(\nu_R - \nu)(\nu_R + \nu + \frac{9}{8}) + \frac{b^2}{3}\right]\left[\left\{\frac{e}{|\nu_R + b - \nu|}\left|\frac{\nu_R + b - \nu}{\nu_R - b - \nu}\right|^{\frac{\nu + b - \nu_R}{2b}}\right\}\left\{\nu \to -\nu - \frac{9}{8}\right\}\right] \tag{46}$$

Эти фазы и решения изображены на рис. 2 и 3 для значений параметров резонанса, взятых из работы /9/: ν_R =1,5; b =0,4. В обоих случаях амплитуда фоторождения имеет резонансный характер, причем ее резонанс несколько сдвинут относительно пионного резонанса. В первой модели (43) резонанс фоторождения значительно резче. Во второй модели (45) амплитуда фоторождения обращается в нуль вблизи энергии пионного резонанса.

Автор искренне благодарен Г.Бялковскому, А.Юревичу, П.С.Исаеву и М.И.Широкову за полезные обсуждения.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 августа 1960 года.

Литература

1. L. Mandelstam, Phys. Rev. 112, 1344/1958/.

2. G. F. Chew and S. Mandelstam, Theory of Low Energy Pion–Pion Interaction Lawrence Rad. Lab. Reports UCRL – 8728

3. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1958 год.

4. A. Pais, Phys. Rev., 112, 624 /1958/

5. M. Gourdin and A. Martin, Nuovo Cim. 16, 78 /1969/

6. А.А.Логунов. Диссертация, ОИЯИ, 1959 г.

7. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.

8. K. Blankenbecler and S. Gartenhaus, Phys. Rev, 116, 1297 /1959/

9. W. R. Frazer and J. R. Fulco, Phys. Rev., 117, 1609 /1960/

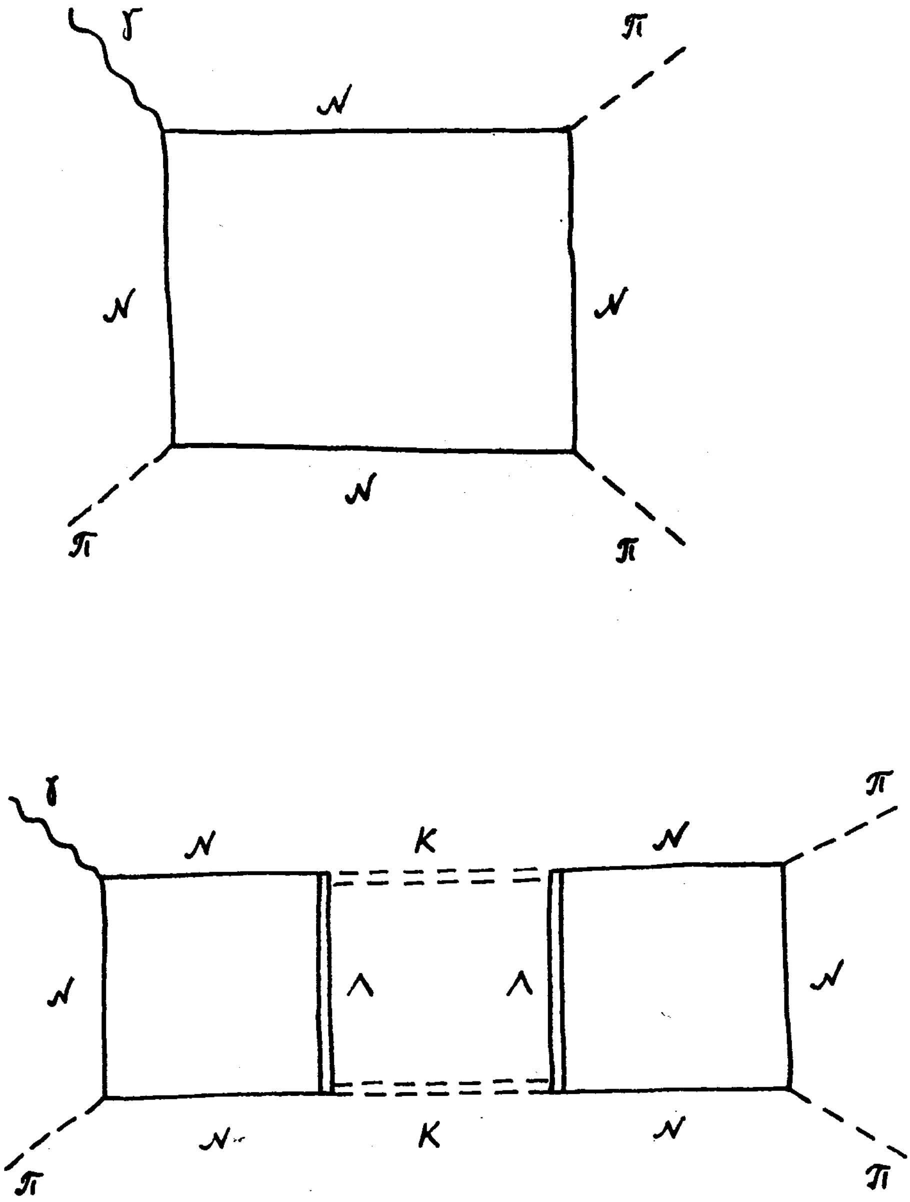
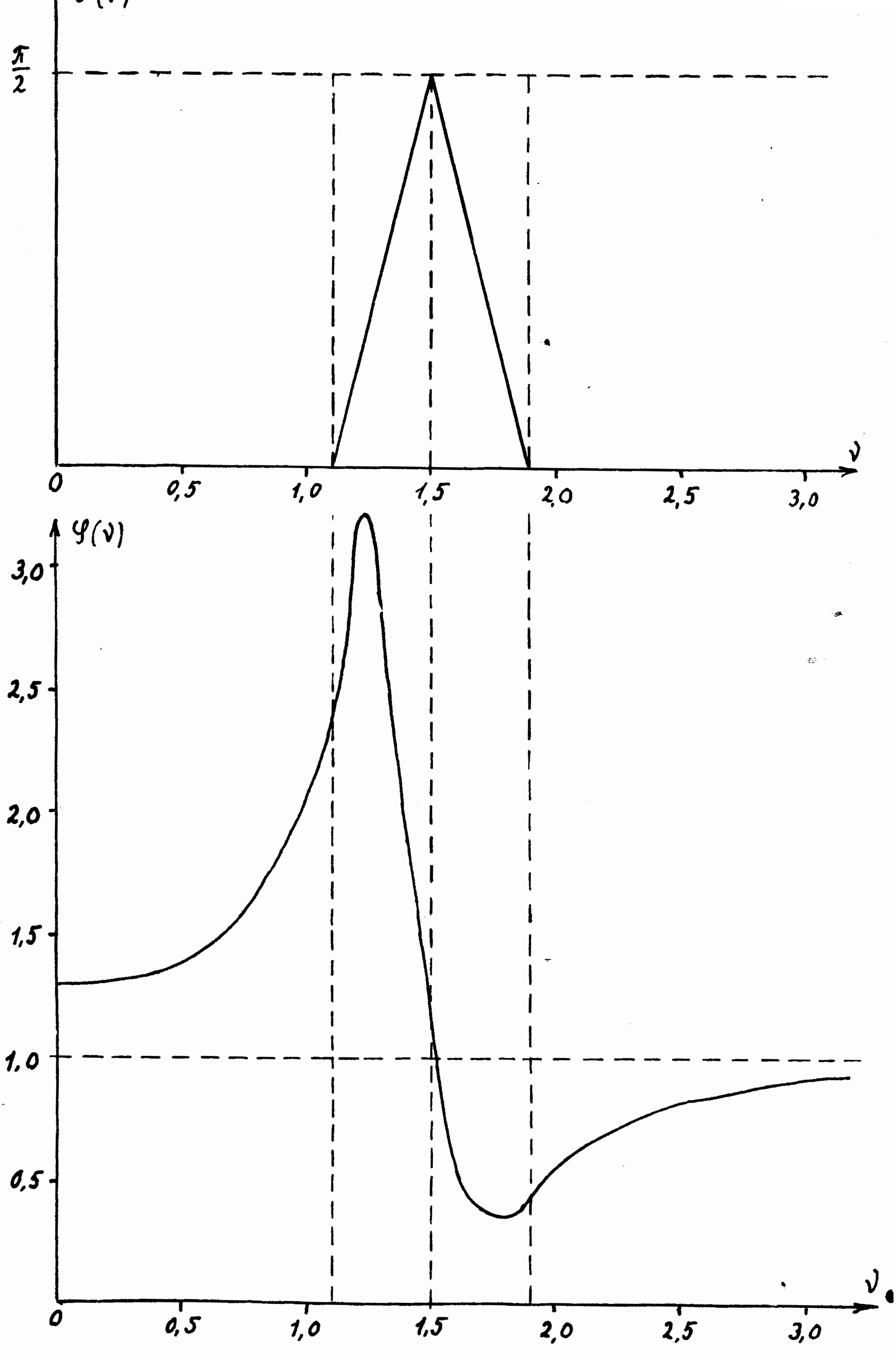
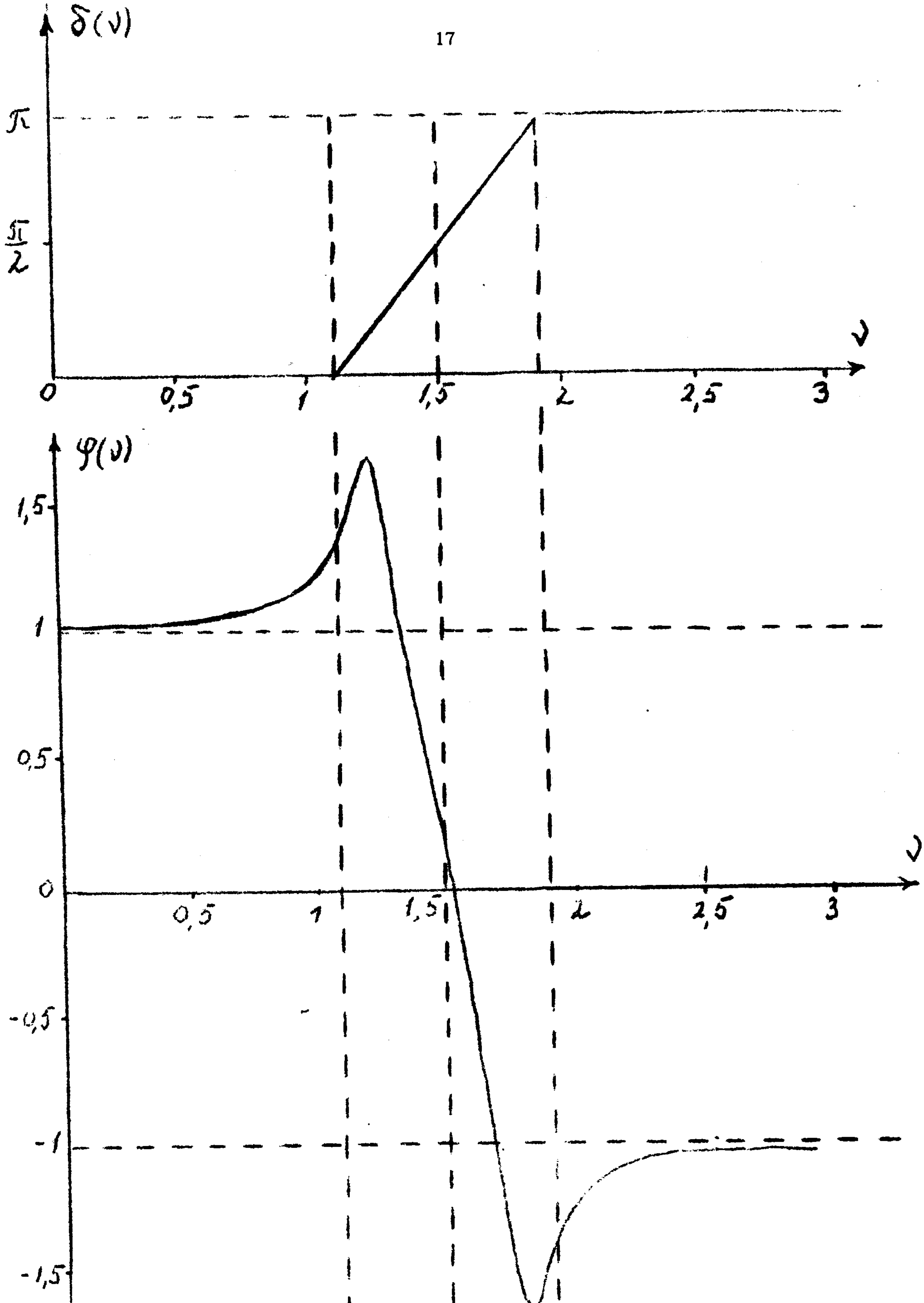


Рис. 1.



$\frac{\pi}{2}$
ν
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
$\varphi(\nu)$
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
ν
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0

Рис. 2.


δ(ν)
π
π/2
ν
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
φ(ν)
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5