

3
Л-69
0

Эна. чл. зала



А.А.Логунов, И.Т.Тодоров, Н.А.Черников

Д-578

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ
МАЖОРИРОВАНИЯ ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА

Дубна 1960 год

Д-578

А.А.Логунов, И.Т.Тодоров, Н.А.Черников

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ
МАЖОРИРОВАНИЯ ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА

ОБЪЕДИНЕННЫЕ ИНСТИТУТЫ
ТЕОРИИ И ЭКСПЕРИМЕНТА
ФИЗИКИ

В в е д е н и е

Исследование аналитических свойств вершинной части ^{/1/} и амплитуд рассеяния ^{/2,3/} нуклона на нуклоне, К-мезона на нуклоне и др. показало, что для этих процессов невозможно получить дисперсионные соотношения, исходя лишь из принципов ковариантности, причинности и спектральности. В связи с тем, что ряд теории возмущений отражает более детальное представление о взаимодействии частиц, в последнее время обращено большое внимание на изучение аналитических свойств членов этого ряда. На этом пути были достигнуты некоторые успехи ^{/4-12/}. Начало исследований в этом направлении положили работы Намбу ^{/4/} и Симанзика ^{/5/}. Для установления дисперсионных соотношений в этих работах был выдвинут интересный метод мажорирования диаграмм. Этот метод позволил Симанзику показать, что информация, содержащаяся в членах ряда теории возмущений для вершинной части и рассеяния нуклона на нуклоне, достаточна для получения соответствующих дисперсионных соотношений.

Настоящая работа ^{х)} посвящена развитию метода мажорирования диаграмм. В ней разработан способ нахождения так называемых примитивных диаграмм, таких, что любая диаграмма мажорируется одной из примитивных диаграмм. С помощью выражения квадратичной формы диаграммы через матрицу инцидентности дано обобщение теоремы Симанзика. Это позволило установить, что некоторые примитивные диаграммы мажорируют остальные. Развитый здесь метод применен к вершинной части и процессам рассеяния нуклонов скалярных мезонов.

Приложение полученных результатов к теории дисперсионных соотношений будет рассмотрено в последующей работе.

Часть 1. ПРИМИТИВНЫЕ ДИАГРАММЫ

В первой части будет введено понятие примитивных диаграмм. Примитивные диаграммы какого-либо процесса обладают тем свойством, что любая диаграмма этого процесса мажорируется одной из примитивных диаграмм. Здесь будет разра-

х) Часть результатов данной работы опубликована ^{/17/}.

ботан метод получения примитивных диаграмм, который будет проиллюстрирован на примерах вершинной части и некоторых процессах рассеяния. Для простоты предполагается, что в каждом узле диаграммы сходятся три и только три линии. Число примитивных диаграмм каждого из рассмотренных процессов конечно. По-видимому, этот факт является общим.

§ 1. Регуляризованное представление элемента S - матрицы в теории возмущений

1. Как известно, вклад в матрицу рассеяния от диаграммы Фейнмана \mathcal{D} может быть записан в α - представлении следующим образом:

$$T_{\mathcal{D}} = \tilde{c} \left(\sum_{i=1}^n P_i \right) Y_{\mathcal{D}}$$

$$Y_{\mathcal{D}}(P_1 \dots P_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} d\alpha_1 \dots d\alpha_e F(P_1 \dots P_n; \alpha_1 \dots \alpha_e). \quad (1.1)$$

$$\exp \left[i \sum_{a,b=1}^{n-1} A_{ab}(\alpha) P_a P_b - i \sum_{\nu=1}^e \alpha_{\nu} m_{\nu}^2 - \varepsilon \sum_{\nu=1}^e \alpha_{\nu} \right],$$

где P_a - внешний импульс, входящий в узел α , n - число узлов диаграммы, l - число внутренних линий; функция $F(p_1, \dots, p_n; \alpha_1, \dots, \alpha_e)$ является полиномом по p_1, p_2, \dots, p_n и рациональной функцией от $\alpha_1, \dots, \alpha_e$ с полюсами в точках $\alpha_i = 0$. Матрица $A_{ab}(\alpha)$ положительно определенная, если все α_i больше нуля.

Выражение (1.1) представляет собой, вообще говоря, расходящийся интеграл из-за особенностей функции $F(p; \alpha)$ при $\alpha_i = 0$ (ультрафиолетовая катастрофа). Боголюбовым и Парасюком^{/13/} найдено регуляризованное выражение интеграла (1.1), равное

$$J_{\mathcal{D}}^{\text{reg}}(P_1, \dots, P_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^1 \dots \int_0^1 d\tau_1 \dots d\tau_r \int_0^\infty \dots \int_0^\infty d\alpha_1 \dots d\alpha_\ell. \quad (1.2)$$

$$\sum_s \mathcal{F}_s(\rho; \alpha; \tau) \exp \left\{ i \lambda_s^2(\tau_1, \dots, \tau_r) \sum_{a, b=1}^{n-1} A_{ab}(\alpha) P_a P_b - i \sum_{\nu=1}^{\ell} \alpha_\nu m_\nu^2 - \varepsilon \sum_{\nu=1}^{\ell} \alpha_\nu \right\},$$

где

$$0 \leq \lambda_s^2(\tau_1, \dots, \tau_r) \leq 1, \quad |\mathcal{F}_s(\rho; \alpha; \tau)| \leq \frac{C(\rho; \alpha; \tau)}{\left[\prod_{\nu} d_{\nu} \right]^{\frac{2\ell-1}{2\ell}}},$$

$C(\rho; \alpha; \tau)$ — полиномиально ограниченное выражение относительно переменных ρ, α, τ .

2. Форма

$$Q_{\mathcal{D}}(\alpha, \rho) = A_{\mathcal{D}}(\alpha, \rho) - M_{\mathcal{D}}^2(\alpha), \quad (1.3)$$

где

$$A_{\mathcal{D}}(\alpha, \rho) = \sum_{a, b=1}^{n-1} A_{ab}(\alpha) P_a P_b, \quad M_{\mathcal{D}}^2(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\ell} \alpha_\nu m_\nu^2,$$

входящая в (1.1) может быть получена следующим образом.

Пусть 4-импульсы K_ν на внутренних линиях диаграммы \mathcal{D} заданы таким образом, что в каждом ее узле выполняется закон сохранения импульса. Это означает, что импульсы K_ν удовлетворяют системе $n-1$ неоднородных линейных уравнений. Для связной диаграммы число независимых "внутренних" импульсов t_1, \dots, t_f равно $f = \ell - n + 1$. Импульсы K_ν являются линейными

комбинациями "внешних" импульсов ρ и импульсов t . Составим функцию

$$K_D(d, \rho, t) = \sum_{\nu=1}^e d_{\nu} (k_{\nu}^2 - m_{\nu}^2) = \sum_{i,j=1}^f a_{ij} t_i t_j - 2 \sum_{i=1}^f b_i t_i + C. \quad (1.4)$$

Форма $Q_D(d, \rho)$ получается из (1.4), если вместо t подставить решение системы линейных уравнений

$$\frac{1}{2} \frac{\partial K_D}{\partial t_i} \equiv \sum_{j=1}^f a_{ij} t_j - b_i = 0, \quad i = 1, \dots, f. \quad (1.5)$$

Если матрица (a_{ij}) не особенная, то

$$Q_D(d, \rho) = C - \sum_{i,j=1}^f a'_{ij} b_i b_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{ij} & b_i \\ b_j & c \end{vmatrix}}{|a_{ij}|}, \quad (1.6)$$

где a'_{ij} - элементы матрицы $(a_{ij})^{-1}$.

3. Диаграмма называется связной, если любые две ее точки можно соединить непрерывным путем, проходящим по ее линиям и узлам. В противном случае диаграмма называется несвязной. Пусть несвязная диаграмма \mathcal{D} составлена из ρ связных диаграмм $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_{\rho}$ низших процессов. Тогда

$$T_{\mathcal{D}} = T_{\mathcal{D}_1} \cdot T_{\mathcal{D}_2} \dots T_{\mathcal{D}_{\rho}}. \quad (1.7)$$

Следовательно, изучение несвязных диаграмм тривиальным образом сводится к изучению связных диаграмм.

4. Связная диаграмма называется слабо связной, если существует такая внутренняя линия, после разрыва которой диаграмма распадается на две части. В противном случае связная диаграмма называется сильно связной.

По определению, в слабо связной диаграмме \mathcal{D} имеется внутренняя линия L , после разрыва которой диаграмма распадается на две части \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 . Импульс K_L , соответствующий этой линии, однозначно определяется внешними импульсами. Интеграл $T_{\mathcal{D}}$ такой диаграммы равен

$$T_D = \gamma_{D_1} \cdot \gamma_{D_2} \frac{P(K_L)}{K_L^2 - m_L^2} \delta \left(\sum_{i=1}^n P_i \right), \quad (1.8)$$

где $P(K_L)$ - известный полином относительно K_L . Таким образом, линия L дает особенность типа полюса. Остальные особенности диаграммы D определяются особенностями диаграмм D_1 и D_2 . Следовательно, для нахождения особенностей типа ветвления достаточно рассматривать сильно связанные диаграммы данного процесса, а также сильно связанные диаграммы соответствующих нижших процессов.

5. Решим следующую задачу. Пусть в диаграмме D имеются две такие линии L_1 и L_2 , что диаграмма не распадается на две части после разрыва любой одной из этих линий и распадается на две части после разрыва двух этих линий (рис. 1). Требуется найти $Q_D(d, p)$ при условии, что все d , за исключением d_1 и d_2 , соответствующих линиям L_1 и L_2 , равны нулю.

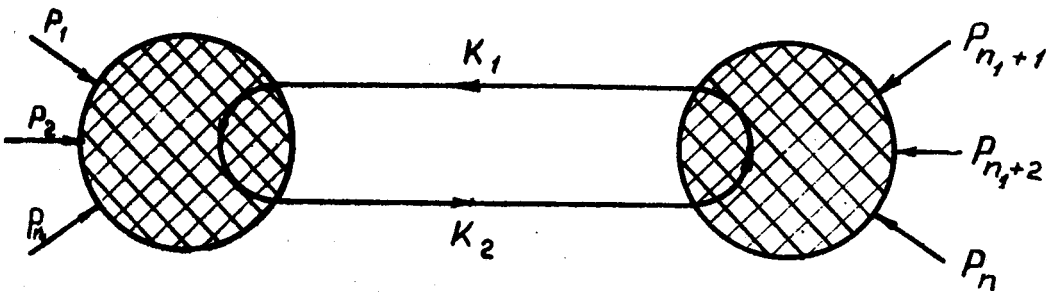


Рис. 1.

В этом случае на импульсы K_1 и K_2 , соответствующие линиям L_1 и L_2 , наложено условие

$$K_2 - K_1 = P_1 + P_2 + \dots + P_{n_1}. \quad (1.9)$$

В диаграмме D существует замкнутый контур, проходящий через линии L_1 и L_2 . Пусть $K_1^o, K_2^o, \dots, K_e^o$ - совокупность "внутренних" импульсов диаграммы D ,

удовлетворяющая закону сохранения импульса в каждом ее узле. При этом K_1^0 и K_2^0 удовлетворяют уравнению (1.9). Ориентируем указанный контур и к каждому импульсу, соответствующему линии из этого контура, добавим произвольный импульс t . Остальные импульсы диаграммы оставим без изменения. При этом закон сохранения импульса не нарушается ни в одном из узлов диаграммы. Таким образом t является независимым импульсом.

Форма K_D равна

$$K_D(d, \rho, t) = d_1 (K_1^2 - m_1^2) + d_2 (K_2^2 - m_2^2) =$$

$$= (d_1 + d_2) t^2 + 2t (d_1 K_1^0 + d_2 K_2^0) + \sum_{i=1}^2 d_i (K_i^{02} - m_i^2). \quad (1.10)$$

Из условия

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial K_D}{\partial t} = (d_1 + d_2) t + d_1 K_1^0 + d_2 K_2^0 = 0 \quad (1.11)$$

следует

$$t = - \frac{d_1 K_1^0 + d_2 K_2^0}{d_1 + d_2}. \quad (1.12)$$

Подставив (1.12) в (1.10), получим

$$Q_D(d, \rho) = \frac{(P_1 + \dots + P_{n_2})^2 d_1 d_2}{d_1 + d_2} - d_1 m_1^2 - d_2 m_2^2. \quad (1.13)$$

6. Если импульсы таковы, что их скалярные произведения вещественны и имеет место неравенство

$$Q_D(d, \rho) = \sum_{a, b=1}^{n-1} A_{ab}(d) P_a P_b - \sum_{\nu=1}^{\ell} d_{\nu} m_{\nu}^2 < -\hbar \sum_{\nu=1}^{\ell} d_{\nu}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.14)$$

то (1.42) можно привести к виду:

$$\int_{\mathcal{D}}^{zeq} (P_1 \dots P_n) = \int_0^1 \dots \int_0^1 d\tau_1 \dots d\tau_e \int_0^\infty \dots \int_0^\infty d\beta_1 \dots d\beta_e \times \quad (1.15)$$

$$\times \sum_s F_s (P, -i\beta) \exp \left[\lambda_s^2 (\tau) \sum_{a,b=1}^{n-1} A_{ab} (\beta) P_a P_b - \sum_{\nu=1}^e \beta_\nu m_\nu^2 \right].$$

Обозначим $G_n(\mathcal{D})$ область значений совокупности внешних импульсов с вещественными скалярными произведениями, определенную условием (1.14). Сумму областей $\bigcup_{h>0} G_h(\mathcal{D})$ обозначим $G(\mathcal{D})$. Интеграл (1.15) не имеет особенностей, если совокупность внешних импульсов принимает значения из области $G(\mathcal{D})$.

7. Для диаграммы \mathcal{D} , рассмотренной в 5, в области $G(\mathcal{D})$ выполняется неравенство

$$P^2 = (P_1 + \dots + P_{n_1})^2 < (m_1 + m_2)^2. \quad (1.16)$$

Действительно, в области $G(\mathcal{D})$ при любых неотрицательных значениях α таких, что $\sum \alpha > 0$ форма $Q_{\mathcal{D}} < 0$. Поэтому в этой области должно быть меньше нуля и выражение (1.13). Для того, чтобы выражение (1.13) было меньше нуля при всех неотрицательных α_1 и α_2 , необходимо выполнение неравенства (1.16).

§ 2. Мажорирование диаграмм Фейнмана

8. Для установления дисперсионных соотношений для амплитуды рассеяния не нужно знать область $G(\mathcal{D})$, а только пересечение областей $G_R = \bigcap_{\mathcal{D} \in R} G(\mathcal{D})$ диаграмм, образующих некоторое множество R . Это обстоятельство связано с тем, что по теории возмущений амплитуда любого процесса представляется суммой интегралов, соответствующих всевозможным диаграммам этого процесса. Вид диаграмм, входящих в эту сумму, зависит от типа взаимодействия.

Пусть R - некоторое множество связанных диаграмм определенного процесса. Если относительно двух диаграмм $\mathcal{D} \in R$ и $\mathcal{D}' \in R$ известно, что $G(\mathcal{D}) \subseteq G(\mathcal{D}')$, то при отыскании пересечения областей $G_R = \bigcap_{\mathcal{D} \in R} G(\mathcal{D})$ из двух диаграмм \mathcal{D} и \mathcal{D}' достаточно учитывать только диаграмму \mathcal{D} . В этом случае мы будем говорить, что диаграмма \mathcal{D} мажорирует диаграмму \mathcal{D}' или что диаграмма мажорируется диаграммой \mathcal{D}' .

Из (1.14) следует, что если

$$\max_d \frac{A_{\mathcal{D}}(\alpha, \rho)}{M_{\mathcal{D}}^2(\alpha)} \geq \max_{d'} \frac{A_{\mathcal{D}'}(\alpha', \rho)}{M_{\mathcal{D}'}^2(\alpha')}, \quad (2.0)$$

то $G(\mathcal{D}) \subseteq G(\mathcal{D}')$, т.е. диаграмма \mathcal{D} мажорирует диаграмму \mathcal{D}' .

9. Рассмотрим сильно связанные диаграммы с $l_N = 2\lambda$ внешними нуклонными и l_m внешними π -мезонными линиями, в каждом узле которых сходятся три и только три линии: четное число (2 или 0) барионных и нечетное число (1 или 3) мезонных линий. Множество всех таких диаграмм обозначим R .

В каждой диаграмме $\mathcal{D} \in R$ имеется λ незамкнутых ломаных (полигонов), образованных линиями, несущими барионный заряд. Так как π -мезонная масса наименьшая в \mathcal{D} , а нуклонная масса наименьшая среди масс барионов, то при замене всех линий указанных полигонов нуклонными, а остальных линий диаграммы - π -мезонными, $M_{\mathcal{D}}^2$ уменьшается, а следовательно, $A_{\mathcal{D}}$ увеличивается.

Таким образом, полученная в результате замены масс диаграмма \mathcal{D}^* мажорирует исходную диаграмму \mathcal{D} . Поэтому $G_{\mathcal{R}} = G_{\mathcal{R}^*}$, где \mathcal{R}^* - подмножество диаграмм $\mathcal{R}^* \subset \mathcal{R}$, в которых имеется λ нуклонных полигонов, а все остальные линии π - мезонные.

10. В дальнейшем мы не будем рассматривать общий случай вещественных скалярных произведений внешних импульсов P_a , а ограничимся частным случаем^{х)}, когда

$$\rho^2 = \left(\sum A_a P_a \right)^2 \geq 0 \quad (2.1)$$

при любых вещественных A_a . Пространство всех векторов вида $\rho = \sum_a A_a P_a$ обозначим P . В случае (2.1) из (1.4), (1.5) и (2.1) непосредственно следует^{/9/}

Лемма 1. Форма $Q_{\mathcal{D}}$ равна наименьшему значению формы $K_{\mathcal{D}}$ при условии, что векторы K_{ν} удовлетворяют закону сохранения импульса в каждом узле диаграммы и принимают значения из P .

Отметим, что из этой леммы непосредственно следует утверждение основной теоремы работы^{/7/}.

11. Рассмотрим для примера следующие диаграммы (см. рис. 2).

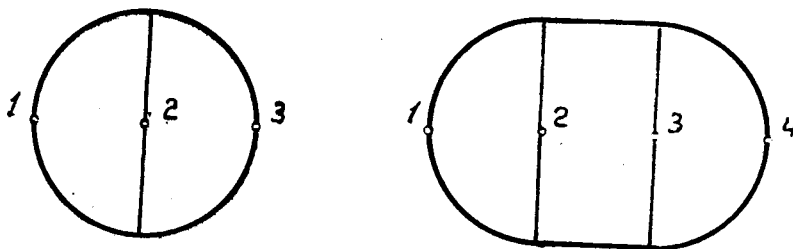


Рис. 2.

^{х)} В работах /4,5,7-11/ векторы, удовлетворяющие условию (2.1), называются эвклидовыми. Заметим, что это определение эвклидовости совпадает с общепринятым, если лишь нулевой вектор имеет длину нуль. Пространство векторов, удовлетворяющих лишь условию (2.1), обычно называется полувеклидовым.

Обозначим ρ_i — внешний импульс, выходящий из узла i , (сумма всех внешних импульсов равна нулю). Положим импульсы на внутренних линиях, подходящих к узлу i , равными $\frac{1}{2} \rho_i$. Тогда

$$4K_{\mathcal{D}_1} = (\alpha_1 + \alpha'_1)(\rho_1^2 - 4m^2) + (\alpha_2 + \alpha'_2)(\rho_2^2 - 4m^2) + (\alpha_3 + \alpha'_3)(\rho_3^2 - 4m^2) \quad (2.2a)$$

для первой диаграммы и

$$\begin{aligned} 4K_{\mathcal{D}_2} = & (\alpha_1 + \alpha'_1)(\rho_1^2 - 4m^2) + (\alpha_2 + \alpha'_2)(\rho_2^2 - 4m^2) + \\ & + (\alpha_3 + \alpha'_3)(\rho_3^2 - 4m^2) + (\alpha_4 + \alpha'_4)(\rho_4^2 - 4m^2) + \\ & + (\alpha_5 + \alpha'_5) \left[(\rho_1 + \rho_2)^2 - 4m^2 \right] \end{aligned} \quad (2.2b)$$

для второй диаграммы.

Если

$$\rho_i^2 < 4m^2, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.3a)$$

то выражение (2.2a) меньше нуля, а, следовательно, на основании леммы и соответствующее $Q_{\mathcal{D}_1}$ меньше нуля.

Аналогично, если

$$\begin{aligned} \rho_i^2 < 4m^2, \quad (\rho_1 + \rho_2)^2 < 4m^2, \\ i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (2.3b)$$

то выражение (2.2b) меньше нуля, а, следовательно, на основании леммы и соответствующее $Q_{\mathcal{D}_2}$ меньше нуля. В 7 было доказано, что в области $G(\mathcal{D}_1)$ выполняются условия (2.3a), а в области $G(\mathcal{D}_2)$ выполняются условия (2.3b). Таким образом при условии (2.1) область $G(\mathcal{D}_1)$ определяется неравенствами (2.3a), а область $G(\mathcal{D}_2)$ определяется неравенствами (2.3b).

12. Эта лемма позволяет доказать следующие две теоремы, играющие основную роль при мажорации диаграмм.

Чтобы сформулировать первую теорему, определим понятие поддиаграммы. Если в результате удаления из диаграммы $\mathcal{D} \in \mathcal{R}$ некоторых внутренних линий и внутренних узлов^{х)} получается диаграмма $\mathcal{D}' \in \mathcal{R}$, то диаграмму \mathcal{D}' будем называть поддиаграммой диаграммы \mathcal{D} (относительно \mathcal{R}). Это определение нуждается в следующем разъяснении.

Если в некотором узле a диаграммы сходятся ν_a линий, то при удалении всех ν_a линий следует удалять и сам узел a . Узел a может быть удален и в том случае, когда удаляется $\nu_a - 2$ линий, а оставшиеся две линии имеют одинаковые массы; при удалении узла эти две линии объединяются в одну. Ни в каком другом случае узел a не удаляется.

13. Приведем примеры поддиаграммы. Рассмотрим множество диаграмм \mathcal{R}^* .

а) Выберем в диаграмме $\mathcal{D}' \in \mathcal{R}^*$ какие-нибудь две линии ab и cd (см. рис. 3а).

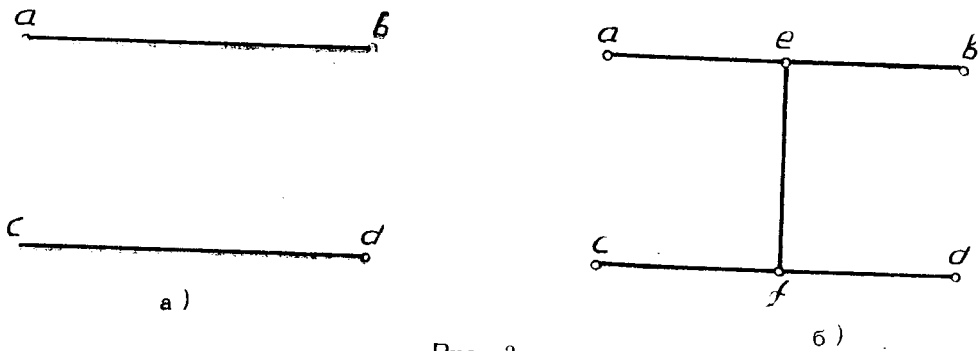


Рис. 3.

На этих линиях добавим узлы e и f и соединим эти узлы мезонной линией (см. рис. 3б). В результате получим новую диаграмму $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$. Исходная диаграмма \mathcal{D}' является поддиаграммой диаграммы \mathcal{D} .

^{х)} Узел называется внешним, если из него выходит внешняя линия. В противном случае он называется внутренним.

б) Пусть в диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ между узлами a и b имеется собственно-энергетическая часть - нуклонная или мезонная (рис. 4). В силу того, что в каждом узле диаграммы \mathcal{D} сходится четное число (0 или 2) нуклонных линий (сохранение нуклонного заряда), в нуклонной собственно-энергетической части существует непрерывный путь ab , соединяющий узлы a и b и проходящий только по нуклонным линиям. В мезонной собственно-энергетической части существует непрерывный путь ab , соединяющий узлы a и b , и проходящий только по мезонным линиям. Удалим все линии собственно-энергетической части, по которым не проходит путь ab , и все ее узлы за исключением узлов a и b . При этом путь ab превращается в одну линию ab - нуклонную или мезонную, в зависимости от типа собственно-энергетической части.

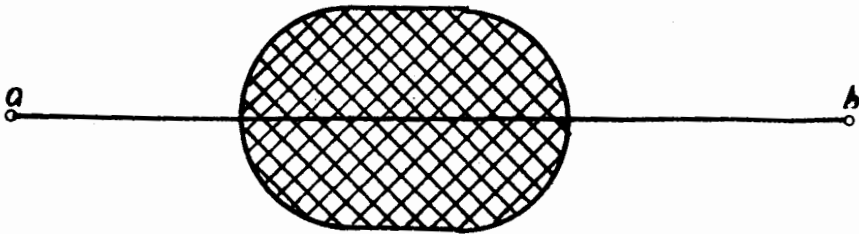


Рис. 4.

Диаграмма \mathcal{D}' , получающаяся из диаграммы \mathcal{D} при замене собственно-энергетической части соответствующей линией, сильно связна и является поддиаграммой диаграммы \mathcal{D} .

в) Всякую связную диаграмму, составленную только из мезонных линий и узлов, будем называть звездой, а ее внешние линии - лучами.

Пусть в диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ имеется некоторая звезда \mathcal{Z} , опирающаяся всеми своими лучами на какой-нибудь полигон в точках $S_1, S_2, \dots, S_{k-1}, S_k$, причем точки S_2, \dots, S_{k-1} лежат между точками S_1 и S_k . Ввиду связности в звезде \mathcal{Z} существует непрерывный путь L , соединяющий точки S_1 и S_k . Удалим все линии звезды, за исключением тех, по которым проходит путь L , и все ее узлы, а также узлы S_2, \dots, S_{k-1} . При этом путь L превращается в мезонную линию, соединяющую точки S_1 и S_k , и мы получаем новую диаграмму $\mathcal{D}' \in \mathcal{R}^*$. Диаграмма \mathcal{D}' является поддиаграммой диаграммы \mathcal{D} .

Применив к каждой такой звезде диаграммы $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ описанный выше процесс замены звезды мезонной линией, мы получим новую поддиаграмму диаграммы \mathcal{D} .

г) Рассмотрим диаграмму $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ вида (см.рис.5),

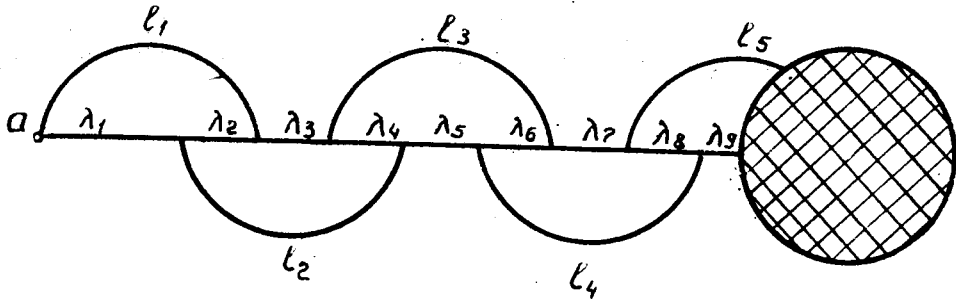


Рис. 5.

в которой линии $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2r+1}$ и l_1, l_2, \dots, l_{r+1} мезонные. Удалив линии $\lambda_2, \lambda_4, \dots, \lambda_{2r}$ вместе со стягиваемыми ими узлами, мы получим поддиаграмму (см. рис.6).

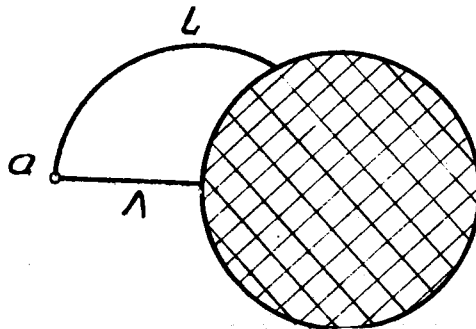


Рис. 6.

д) Рассмотрим диаграмму $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ вида (см.рис.7)

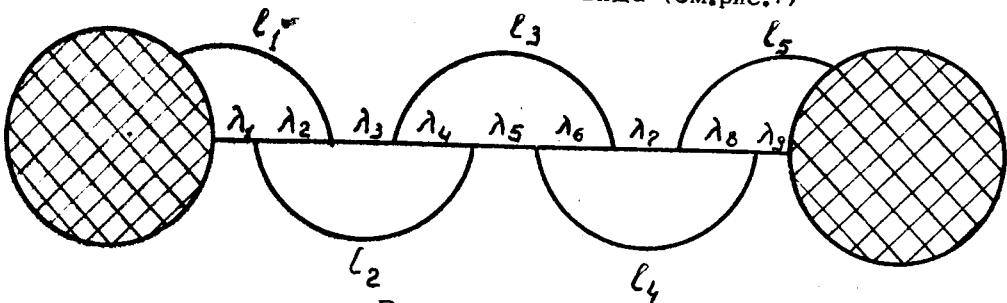


Рис. 7.

в которой линии $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2\nu+1}$ и $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{\nu+1}$ мезонные. Удалив линии $\lambda_2, \lambda_4, \dots, \lambda_{2\nu}$ вместе со стягиваемыми ими узлами, мы получим поддиаграмму (см. рис. 8)

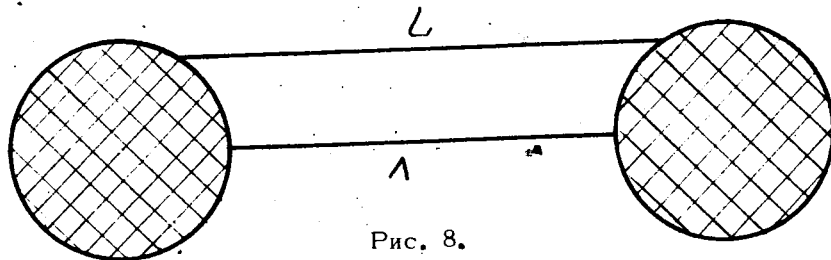


Рис. 8.

14. Теорема 1.

Всякая диаграмма мажорируется любой своей поддиаграммой.

Доказательство.

Пусть несколько линий $L_{z_s}, s = 1, \dots, 1 + n_z, n_z \geq 0$ диаграммы объединяются в одну линию L_z поддиаграммы. При этом $m_{z_s} = m_z, s = 1, \dots, 1 + n_z$. Пусть K_y — импульсы на внутренних линиях поддиаграммы, удовлетворяющие закону сохранения в каждом ее узле. Если на каждой внутренней линии диаграммы, подлежащей удалению, положить импульс равным нулю, а на каждой линии L_{z_s} импульс K_{z_s} положить равным импульсу K_z , соответствующему линии L_z , то закон сохранения импульса будет выполняться и в каждом узле диаграммы.

Обозначим α_{z_s} фейнмановский параметр линии L_{z_s} , а параметры удаляемых линий β_y . Тогда

$$K_D = - \sum_y \beta_y m_y^2 + \sum_z \alpha_z (K_z^2 - m_z^2), \quad (2.4)$$

где

$$\alpha_z = \sum_{s=1}^{1+n_z} \alpha_{z_s}$$

Поскольку

$$K_{\mathcal{D}'} = \sum_z \alpha_z (K_z^2 - m_z^2), \quad (2.5)$$

то $K_{\mathcal{D}} \leq K_{\mathcal{D}'}$, а, следовательно, в силу леммы, и $Q_{\mathcal{D}} \leq Q_{\mathcal{D}'}$. Таким образом, $G(\mathcal{D}) \supseteq G(\mathcal{D}')$ и теорема доказана.

15. Теорема 2.

Пусть диаграмма \mathcal{D} содержит замкнутый $(n+1)$ -угольник, n сторонам которого соответствует масса M , а одной стороне — масса $m \leq M$. Изменим массы на этих сторонах следующим образом: $M \rightarrow m$, $m \rightarrow M$. В результате получим новую диаграмму \mathcal{D}' , которая мажорирует диаграмму \mathcal{D} .

Доказательство.

Пусть $K_1, \dots, K_n, K_{n+1} \in \mathcal{P}$ — импульсы на сторонах $(n+1)$ -угольника, определенным образом ориентированного. Если к каждому из этих импульсов добавить произвольный импульс t , а остальные импульсы диаграммы оставить без изменения, то закон сохранения импульса в каждом узле диаграммы не нарушится. Форма $K_{\mathcal{D}'}$ диаграммы \mathcal{D}' равна

$$K_{\mathcal{D}'} = \alpha'_{n+1} \left[(K_{n+1} + t)^2 - M^2 \right] + \sum_{i=1}^n \alpha'_i \left[(K_i + t)^2 - m_i^2 \right] + \sum_{\nu} \beta_{\nu} (q_{\nu}^2 - m_{\nu}^2), \quad (2.6)$$

где α'_i — фейнмановские параметры сторон $(n+1)$ -угольника, β_{ν} — параметры остальных линий диаграммы. Наименьшее значение формы $K_{\mathcal{D}'}$ по $t \in \mathcal{P}$ равно

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\mathcal{D}'} = & \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{i-1} \alpha'_i \alpha'_j (K_i - K_j)^2}{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots + \alpha'_{n+1}} - m^2 (\alpha'_1 + \dots + \alpha'_n) - M^2 \alpha'_{n+1} + \\ & + \sum_{\nu} \beta_{\nu} (q_{\nu}^2 - m_{\nu}^2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если положить

$$d'_i = \frac{x d_i}{m^2}, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad d'_{n+1} = \frac{x d_{n+1}}{M^2}, \quad x = \frac{M^2(d_1 + \dots + d_n) + m^2 d_{n+1}}{d_1 + d_2 + \dots + d_{n+1}} \quad (2.8)$$

то

$$\bar{K}_{\mathcal{D}'} = \bar{K}_{\mathcal{D}} + \frac{(M^2 - m^2)}{m^2} \cdot \frac{\sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} d_i d_j (K_i - K_j)^2}{d_1 + \dots + d_{n+1}}, \quad (2.9)$$

откуда

$$\bar{K}_{\mathcal{D}} \leq \bar{K}_{\mathcal{D}'}$$

а, следовательно, в силу леммы,

$$Q_{\mathcal{D}} \leq Q_{\mathcal{D}'}$$

Таким образом,

$$G(\mathcal{D}') \subseteq G(\mathcal{D}).$$

Заметим, что если диаграмма \mathcal{D} принадлежит некоторому множеству R , то диаграмма \mathcal{D}' , вообще говоря, не принадлежит R , однако, ее поддиаграмма может принадлежать R . В этом случае такая поддиаграмма мажорирует диаграмму \mathcal{D} .

16. Рассмотрим применение теоремы 2 к диаграммам следующих двух видов.

а) Пусть диаграмма $\mathcal{D} \in R^*$ имеет вид (см. рис. 5), причем линии $\lambda_1, \dots, \lambda_2, \nu_1$ - нуклонные, а линии ν_1, \dots, ν_{n+1} - мезонные.

Применяя операцию теоремы 2 к треугольнику со сторонами $\nu_1, \lambda_1, \lambda_2$ и удаляя затем линию λ_2 вместе с соединяемыми ею узлами, получаем диаграмму того же вида, причем ν на единицу меньше. После ν таких операций мы

получим диаграмму (см.рис.6), в которой линия L - мезонная, а линия Λ - нуклонная. Эта диаграмма мажорирует исходную диаграмму \mathcal{D} .

б) Пусть диаграмма $\mathcal{D} \in \mathcal{K}^*$ имеет вид (см. рис.7), причем линии $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2\nu+1}$ - нуклонные, а линии $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{\nu+1}$ - мезонные.

Применяя операцию теоремы 2 к четырехугольнику со сторонами $\ell_2, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ и удаляя затем линии λ_2 и λ_4 вместе с соединяемыми ими узлами, получаем диаграмму того же вида, причем ν на две единицы меньше. Если $\nu = 2\mu - 1$ нечетное, то после μ таких операций мы получим диаграмму, изображенную на рис. 8, в которой линия L - мезонная, а линия Λ - нуклонная.

Если $\nu = 2\mu$ - четное, то после μ таких операций мы получим диаграмму, изображенную на рис. 9.

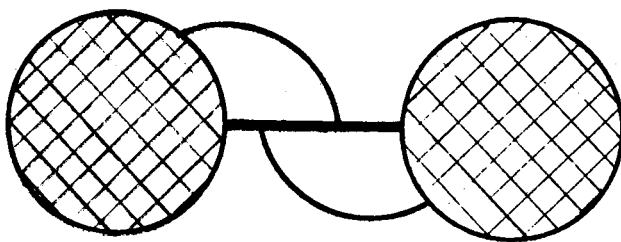


Рис. 9.

В зависимости от четности ν исходная диаграмма мажорируется диаграммой рис. 8 или рис. 9.

17. Систему линий $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2\nu}$ и $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{\nu+1}$ рис.5 будем изображать значком Γ рис. 10а, а также обозначенную систему линий рис.7 будем изображать значком Π рис. 10б. Если линии

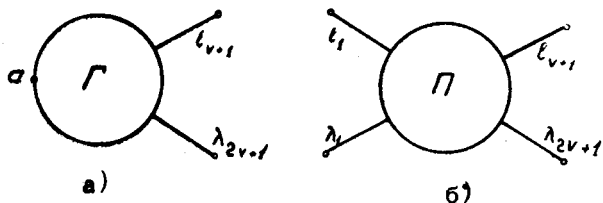


Рис. 10.

λ и ℓ - мезонные, то буквы Γ и Π будем снабжать индексом m , если же линии ℓ - мезонные, а линии λ - нуклонные, то эти буквы будем снабжать индексом n . В соответствии с доказанным выше, если диаграмма $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ имеет часть Γ или Π , то она мажорируется диаграммой \mathcal{D}' , которая получается из \mathcal{D} следующей заменой (см. рис. 11).

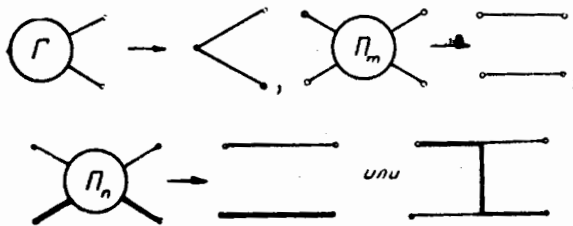


Рис. 11.

18. Назовем диаграмму из \mathcal{R}^* примитивной в \mathcal{R}^* , если с помощью теорем 1 и 2 невозможно найти в \mathcal{R}^* мажорирующую ее диаграмму. Например, примитивной диаграммой является многоугольник с $\ell_m + \ell_n$ сторонами, из вершин которого выходит ℓ_m внешних мезонных и ℓ_n внешних нуклонных линий. Единственным исключением является многоугольник с двумя внешними и $\ell_m + 1$ внутренними нуклонными линиями при $\ell_m > 0$.

Обозначим \mathcal{R}_0 совокупность всех примитивных в \mathcal{R}^* диаграмм. Ввиду того, что каждая диаграмма из \mathcal{R}^* имеет конечное число узлов и линий, она мажорируется хотя бы одной диаграммой из \mathcal{R}_0 . Следовательно,

$$G_{\mathcal{R}} = G_{\mathcal{R}^*} = G_{\mathcal{R}_0}.$$

В следующих параграфах будет найдена совокупность \mathcal{R}_0 при $\ell_m + \ell_n \leq 4$.

§ 3. Собственно-энергетическая часть

19. Нуклонная собственно-энергетическая часть ($\ell_m=0, \ell_n=2$). Любая диаграмма $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ нуклонной собственно-энергетической части в соответствии с 13 в) имеет поддиаграмму, которая состоит из нуклонного полигона \mathcal{P} и нескольких присоединенных к нему мезонных линий. Полигон \mathcal{P} соединяет внешние узлы a и b диаграммы \mathcal{D} .

Пусть мезонная линия, выходящая из узла a , подходит к полигону \mathcal{P} в точке a' . Если a' не совпадает с b , то среди мезонных линий, которые выходят из узлов, лежащих на участке aa' полигона \mathcal{P} , выберем ту, которая приходит на полигон \mathcal{P} в наиболее удаленную от a точку полигона. Обозначим эту точку a'_1 , другой конец этой линии обозначим a_1 . Если a'_1 не совпадает с b , то среди мезонных линий, которые выходят из узлов, лежащих на участке $a'a'_1$, выберем ту, которая приходит на полигон \mathcal{P} в наиболее удаленную от a точку полигона. Концы этой линии обозначим a_2, a'_2 . Повторяя этот процесс до тех пор, пока точка a'_v не совпадет с b , мы выделим систему линий, изображенную на рис. 12.

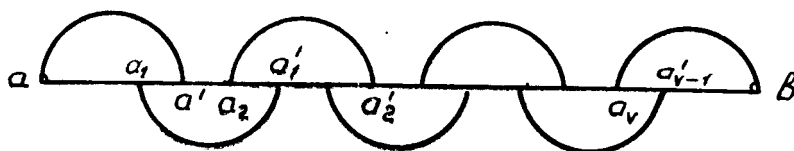


Рис. 12.

Остальные мезонные линии удалим вместе с соединяемыми ими узлами. В результате получим поддиаграмму диаграммы \mathcal{D} , изображенную на рис. 13а,

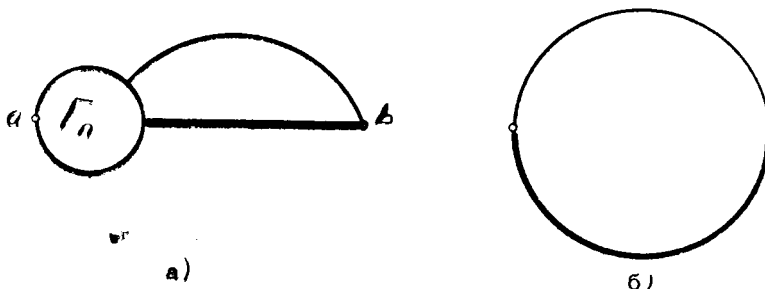


Рис. 13.

Согласно 17 эта поддиаграмма мажорируется диаграммой рис. 13б. Таким образом, любая диаграмма $\mathcal{D} \in R^*$ мажорируется примитивной диаграммой рис. 13б.

20. Мезонная собственно-энергетическая часть ($l_m=2, l_N=0$). Поскольку

$l_N = 0$, то все линии любой диаграммы $\mathcal{D} \in R^*$ мезонной собственно-энергетической части мезонные. В силу связности в диаграмме \mathcal{D} существует непрерывный путь L , соединяющий внешние узлы a и b . Все звезды, опирающиеся всеми своими лучами на путь L , заменим мезонными линиями, соединяющими их крайние узлы (см. пункт 13в). Повторяя далее рассуждения пункта 19, мы придем к поддиаграмме рис. 14а.

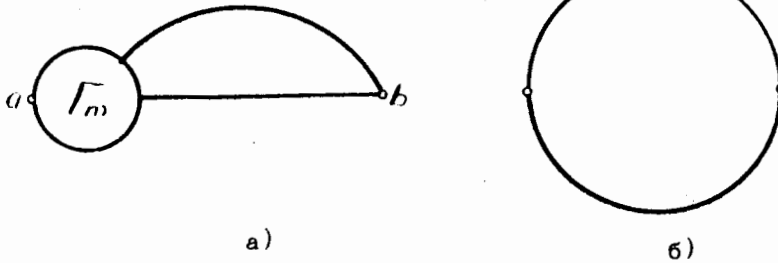


Рис. 14.

Согласно 17 эта поддиаграмма мажорируется примитивной диаграммой рис. 14б. Таким образом, любая диаграмма $\mathcal{D} \in R^*$ мажорируется диаграммой рис. 14б.

§ 4. Мезонно-нуклонная вершинная часть ($l_m=1, l_N=2$).

21. Любая диаграмма $\mathcal{D} \in R^*$ мезонно-нуклонной вершинной части имеет один внешний мезонный узел C и один нуклонный полигон, соединяющий внешние узлы a и b .

а) Пусть узел C лежит на нуклонном полигоне ab . Каждую мезонную звезду, опирающуюся всеми своими лучами на нуклонный полигон ab , заменим мезонной линией, соединяющей ее крайние узлы на этом полигоне. В результате получим поддиаграмму, в которой мезонные линии опираются обоими концами на нуклонный полигон. Аналогично предыдущему можно показать, что в такой диаграмме имеется хотя бы одна из следующих двух поддиаграмм (см. рис. 15).

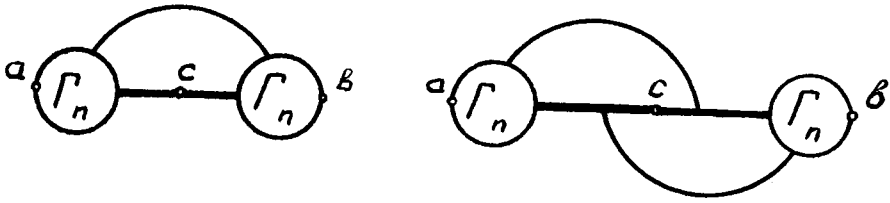


Рис. 15.

Согласно 17 эти поддиаграммы мажорируется диаграммами рис. 16.

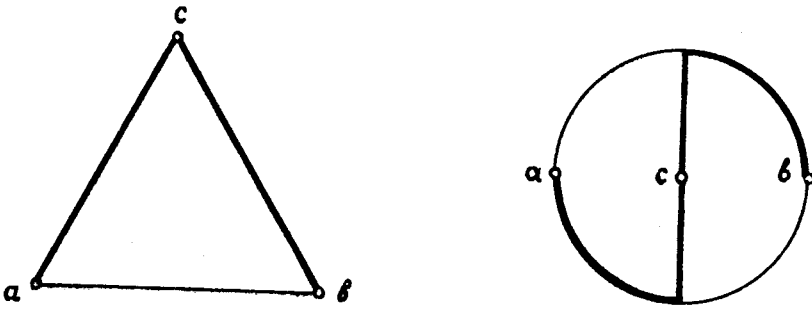


Рис. 16.

Применяя к диаграммам рис. 16 операцию теоремы 2, мы получим следующие примитивные диаграммы (см. рис. 17).

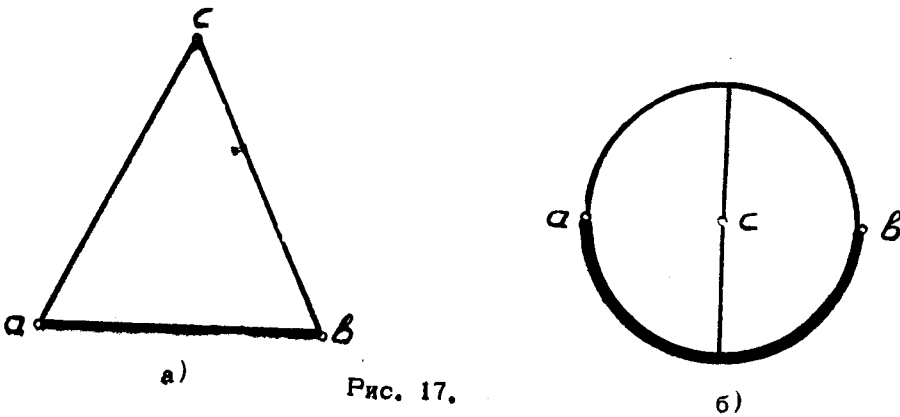


Рис. 17.

Таким образом, если в диаграмме $\mathcal{D} \in R^*$ узел c лежит на нуклонном полигоне, то диаграмма \mathcal{D} мажорируется одной из примитивных диаграмм рис. 17.

Докажем, что и любая диаграмма $\mathcal{D} \in R^*$ мажорируется одной из диаграмм рис. 17.

б) Пусть в диаграмме $\mathcal{D} \in R^*$ узел c лежит вне нуклонного полигона ab . В силу связности хотя бы из одной точки нуклонного полигона ab существует мезонный путь в точку c . Среди всех таких точек ближайшую к a назовем характеристической точкой \tilde{a} . Вследствие сильной связности \tilde{a} не совпадает с b . Каждую звезду, опирающуюся на нуклонный полигон всеми своими лучами, заменим мезонной линией, соединяющей ее крайние узлы на нуклонном полигоне. Таким образом, мы выделяем в диаграмме \mathcal{D} некоторую поддиаграмму \mathcal{D}' . В силу сильной связности диаграммы \mathcal{D}' среди всех мезонных линий, выходящих с участка $\tilde{a}b$ нуклонного полигона, найдется по крайней мере одна, которая приходит на участок $a\tilde{a}$ этого полигона. Среди таких линий выберем ту, которая приходит в ближайшую к a точку нуклонного полигона. Обозначим эту линию l_1 , а ее концы a_1 и a'_1 , причем $a_1 \in a\tilde{a}$, $a'_1 \in \tilde{a}b$. Пусть точка a_1 совпадает с точкой a (см. рис. 18а).

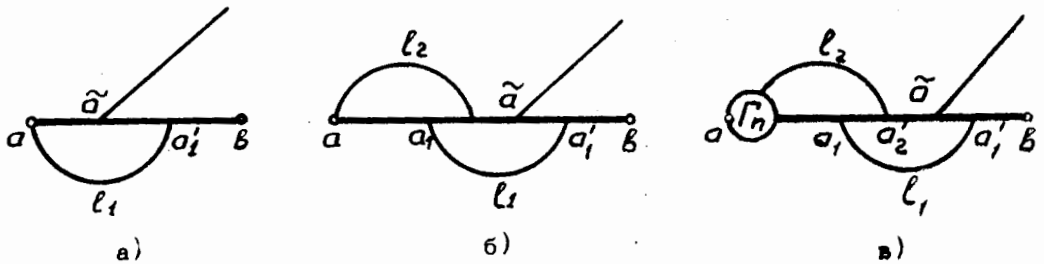


Рис. 18.

Заменив нуклонные линии участка aa'_1 мезонными, а мезонную линию l_1 - нуклонной, мы получим диаграмму с новым нуклонным полигоном $al_1a'_1b$, на котором точка a будет характеристической. По теореме 2 эта диаграмма мажорирует исходную диаграмму. Пусть точки a_1 и a не совпадают. В таком случае в силу сильной связности среди мезонных линий, выходящих с участка $a_1\tilde{a}$

полигона ab , существует по крайней мере одна, которая приходит на участок aa_1 этого полигона. Среди таких линий выберем ту, которая приходит в ближайшую к a точку. Обозначим эту линию l_2 , а ее концы a_2 и a'_2 , причем $a_2 \in aa_1$, $a'_2 \in a_1 \tilde{a}$. Пусть точка a_2 совпадает с точкой a (см. рис. 18б). Заменяя нуклонные линии участка $a_1 a'_1$ мезонными, а мезонную линию l_1 - нуклонной, мы получим диаграмму с новым нуклонным полигоном $aa_1 l_1 a'_1 b$, на котором точка a будет характеристической.

Если точка a_2 не совпадает с a , то продолжим этот процесс до тех пор, пока точка a_n не совпадет с a . Все мезонные линии кроме l_1, \dots, l_n , опирающиеся обоими концами на участок aa'_1 нуклонного полигона, удалим вместе с соединяемыми ими узлами. В результате получим поддиаграмму, изображенную на рис. 18в. Согласно 17 она мажорируется диаграммой рис. 18б. Следовательно, если в диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ точка c не лежит на нуклонном полигоне, то она мажорируется диаграммой, в которой существует мезонный путь из точки a в точку c . Таким образом остается рассмотреть диаграммы, в которых имеется непрерывный путь sab (полигон), участок sa которого - мезонный, а участок ab - нуклонный. Каждую звезду такой диаграммы, опирающуюся на полигон sab всеми своими лучами, заменим мезонной линией, соединяющей ее крайние узлы на этом полигоне. В результате мы получим поддиаграмму, в которой на путь sab опирается несколько мезонных линий. Теперь уже нетрудно доказать, что в такого рода диаграмме существует хотя бы одна из поддиаграмм, изображенных на рис. 19.



Рис. 19.

Согласно 17 эти диаграммы мажорируются примитивными диаграммами, изображенными на рис. 17. В итоге установлено, что любая диаграмма $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ мезонно-нуклонной вершинной части мажорируется хотя бы одной из двух примитивных диаграмм рис. 17.

22. Аналогичными рассуждениями можно доказать, что в любой диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ мезонной вершинной части ($\ell_M = 3, \ell_N = 0$) имеется хотя бы одна из двух поддиаграмм (см. рис. 20). Обе эти поддиаграммы являются примитивными диаграммами.

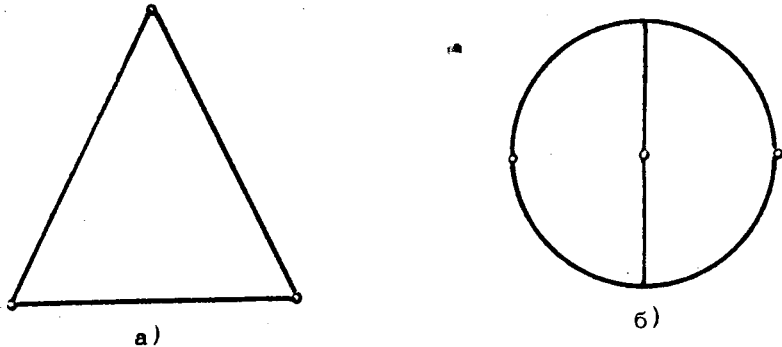


Рис. 20.

§ 5. Рассеяние нуклона на нуклоне ($\ell_M = 0, \ell_N = 4$)

23. Любая диаграмма из \mathcal{R}^* рассеяния нуклона на нуклоне мажорируется хотя бы одной из следующих примитивных диаграмм (см. рис. 21).

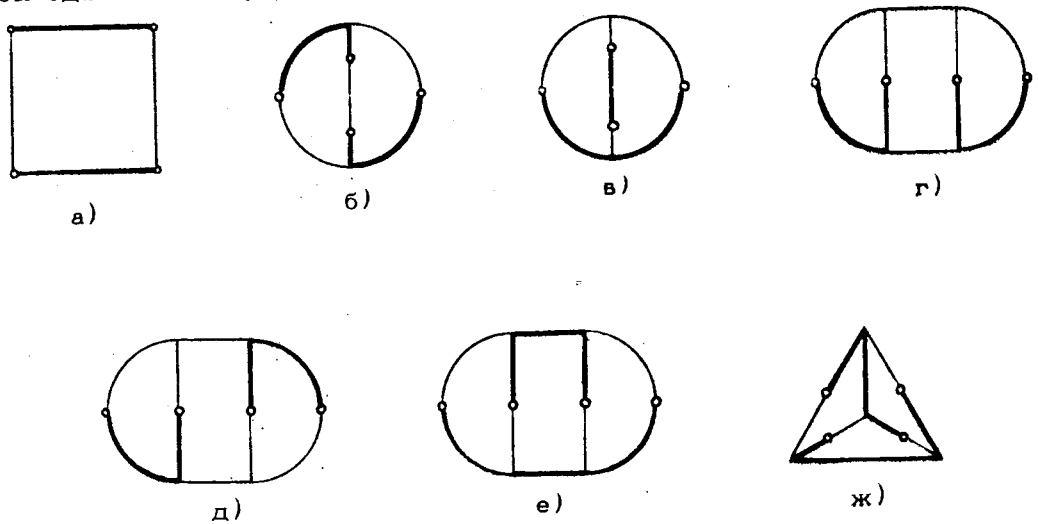


Рис. 21.

Доказательство.

Пусть внешние узлы a и b диаграммы $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ расположены на нуклонном полигоне ab , а в два других внешних узла c и d - на нуклонном полигоне cd . Достаточно рассмотреть диаграммы, в которых из точки a существует мезонный путь на полигон cd . Доказательство этого утверждения аналогично 21б. Этот мезонный путь может приходить как во внешний узел, скажем, в узел c , так и в какую-нибудь внутреннюю точку e полигона cd (см.рис. 22).

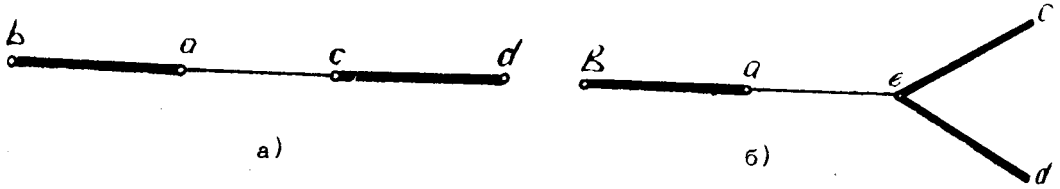


Рис. 22.

а) Рассмотрим первый случай. Каждую звезду, опирающуюся на полигон $abcd$ всеми своими лучами, заменим мезонной линией, соединяющей ее крайние узлы на этом полигоне. В результате мы получим поддиаграмму, в которой каждая мезонная линия, не входящая в состав пути ac , опирается на полигон $abcd$ обоими концами. Повторяя далее рассуждения пункта 19, нетрудно доказать, что диаграмма \mathcal{D} имеет хотя бы одну из поддиаграмм, изображенных на рис.23. Согласно 17 диаграммы A и E мажорируются диаграммой рис. 21а, B и F - диаграммой рис. 21в, D и G - диаграммой рис. 21г, наконец, диаграмма C мажорируется диаграммой рис. 21б.

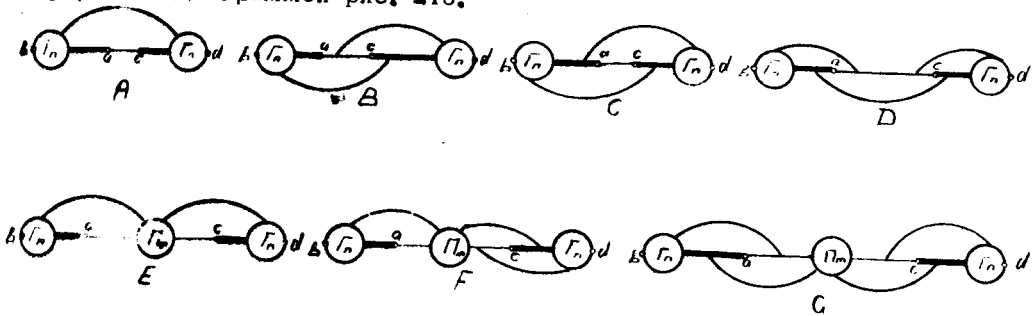


Рис. 23.

б) Условимся далее полигон, типа изображенного на рис. 22а, называть полигоном NMN . Остается рассмотреть такие диаграммы из \mathcal{R}^* , в которых не существует полигона NMN , но существует фигура рис. 22б, которую далее будем обозначать Y .

Пусть в диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ существует такая фигура Y . Ввиду сильной связности на полигоне vae существует по крайней мере одна точка, из которой существует путь на полигон ced , не имеющий с фигурой Y общих линейных участков. Среди таких точек ближайшую к b назовем характеристической точкой полигона vae и обозначим \bar{v} . Соответствующий путь из \bar{v} на полигон ced обозначим L . Каждую звезду, опирающуюся на полигон vac всеми своими лучами, заменим мезонной линией, соединяющей ее крайние узлы на этом полигоне. Повторив далее рассуждения, аналогичные 21б, мы докажем, что при $\bar{v} \in va$ диаграмма \mathcal{D} мажорируется одной из диаграмм рис. 24,

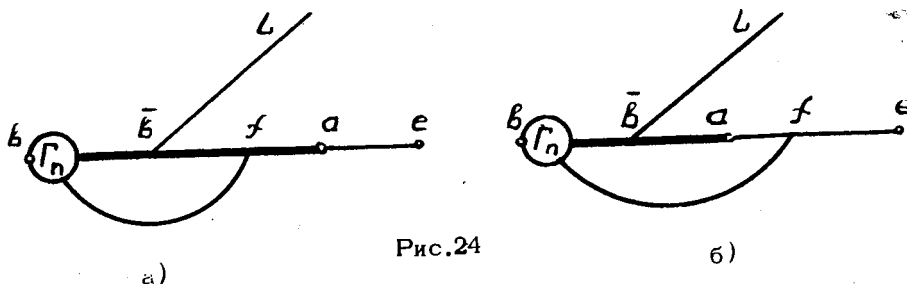


Рис.24

а при $\bar{v} \in ae$ - одной из диаграмм рис. 25.

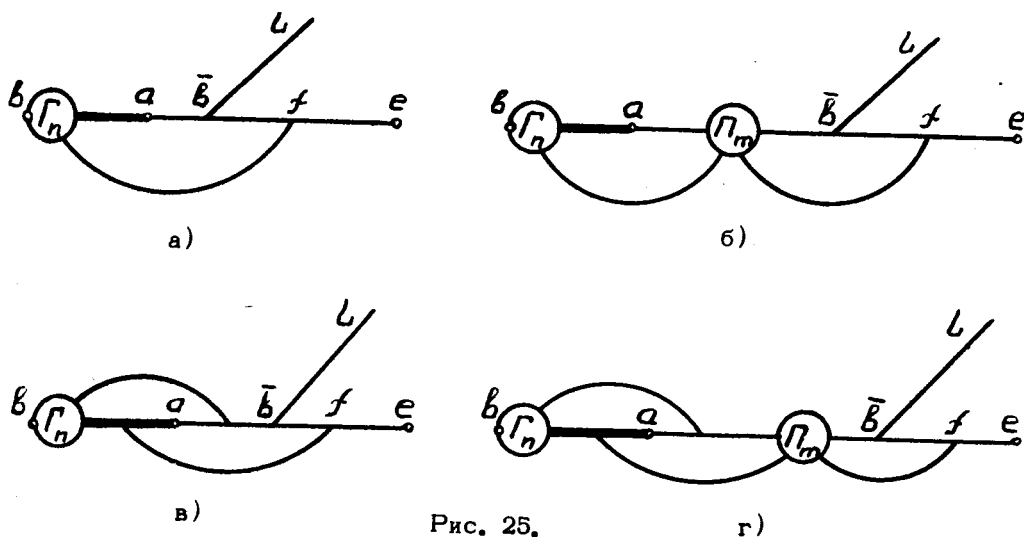


Рис. 25.

Согласно 17 диаграмма рис. 25 в) мажорируется диаграммой рис.25 а), а диаграмма рис. 25г) - диаграммой рис. 25 б) . В соответствии с тем же пунктом 17 в диаграммах а) и б) рис. 24 и 25 вершинную часть Γ заменим узлом \bar{b} . После этого в диаграмме 24 а) все нуклонные линии участка $\bar{b}f$ заменим мезонными, а мезонную линию $\bar{b}f$ - нуклонной. Согласно теореме 2, полученная таким путем новая диаграмма мажорирует диаграмму рис. 24 а) . В этой новой диаграмме точка \bar{b} является характеристической точкой полигона $\bar{b}fae$.

В результате, если в диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ имеется фигура Υ , то она мажорируется диаграммой, в которой существует хотя бы одна из четырех фигур рис. 26.

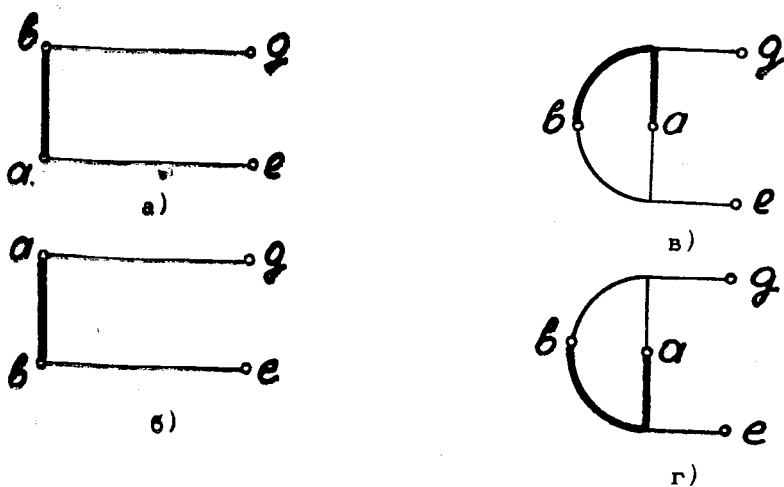


Рис. 26.

На этом рисунке точка g - конечная точка пути L . Эта точка может быть как внутренней точкой нуклонного полигона cd , так и его граничной точкой. В последнем случае достаточно рассмотреть лишь фигуру рис. 26б, так как если бы в диаграмме имелась фигура а), в) или г) рис. 26, то в ней существовал бы и полигон NMN . Фигура рис. 26б вместе с нуклонным полигоном cd в этом случае составляет следующую часть диаграммы (см.рис.27).

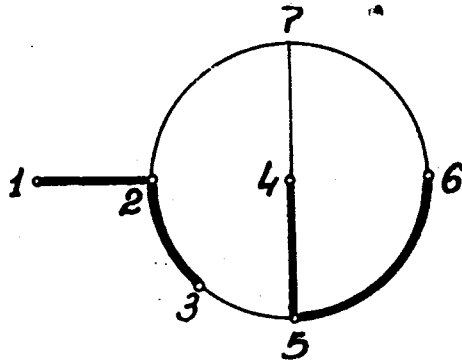
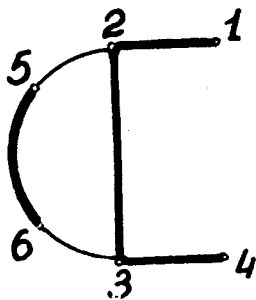
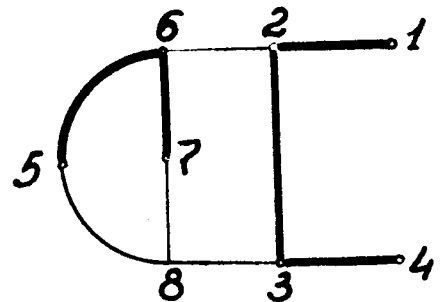


Рис. 27.

Если g - внутренняя точка нуклонного полигона cd , фигуры рис. 26 вместе с нуклонным полигоном cd составляют следующие две фигуры (см.рис.28).



а)



б)

Рис. 28.

Таким образом, установлено, что если в диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ существует фигура Y , но не существует полигона NMN , то она мажорируется диаграммой, в которой имеется хотя бы одна из трех фигур рис. 27 и 28. Именно такие диаграммы нам и осталось рассмотреть. Аналогично 21б можно доказать, что достаточно рассмотреть такие диаграммы, содержащие фигуру рис. 27, рис.28а

или рис. 28б, в которых имеется мезонный путь L из точки 1 на часть этой фигуры, дополнительную к отрезку (1,2).

в) Пусть в диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ не существует полигона NMN , но существует фигура рис. 27. В дальнейшем эту фигуру будем обозначать I . В такой диаграмме путь L вместе с фигурой I составляет одну из следующих трех фигур (см.рис. 29).

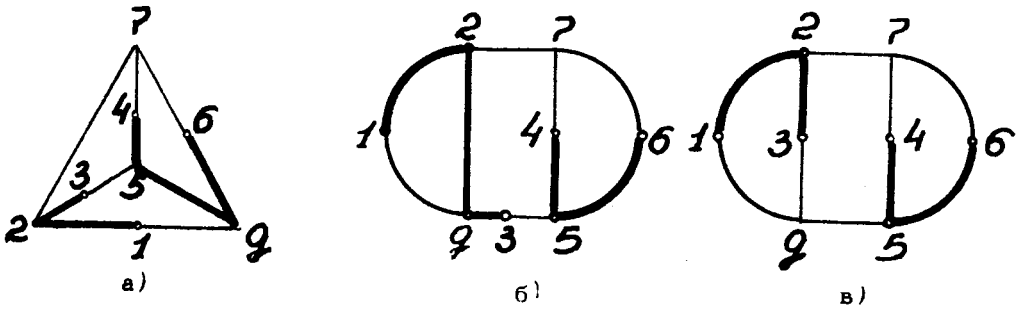


Рис. 29.

Следовательно, в диаграмме \mathcal{D} имеется хотя бы одна из трех поддиаграмм, изображенных на рис. 29. В диаграмме 29 а удалим линию (2,7) вместе с узлами 2 и 7. В результате получим поддиаграмму, изображенную на рис. 30. В этой поддиаграмме заменим нуклонные линии (4,5), (5, g) и (g, 6) мезонными, а мезонную линию (4,6) - нуклонной. После этого удалим линию (5, g) вместе с узлами 5 и g. В результате получим примитивную диаграмму рис. 21а. В диаграмме рис. 29б заменим нуклонные линии (1,2) и (2, g) мезонными, а мезонную линию (1, g) - нуклонной. После этого удалим линию (2, g) вместе с узлами 2 и g. В результате получим примитивную диаграмму рис. 21в.

Диаграмма рис. 29в - примитивная. Она изображена также на рис.21г.

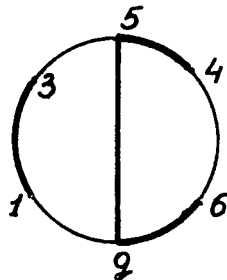


Рис. 30.

Таким образом, в рассматриваемом случае диаграмма \mathcal{D} мажорируется одной из примитивных диаграмм а), в), д) рис. 21.

г) Пусть в диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ не существует полигона NMN , но существует фигура рис. 28а. В дальнейшем эту фигуру будем обозначать Π . Если путь L из узла 1 приводит в узел 4, то диаграмма имеет поддиаграмму рис. 30, а, следовательно, она мажорируется примитивной диаграммой рис. 21а. На участки (2,5) и (3,6) путь L приводить не может, так как иначе существовал бы полигон NMN . Если путь L приводит на участок (5,6), (2,3) или (3,4), то фигура Π вместе с путем L образует, соответственно, одну из следующих трех фигур (см. рис. 31).

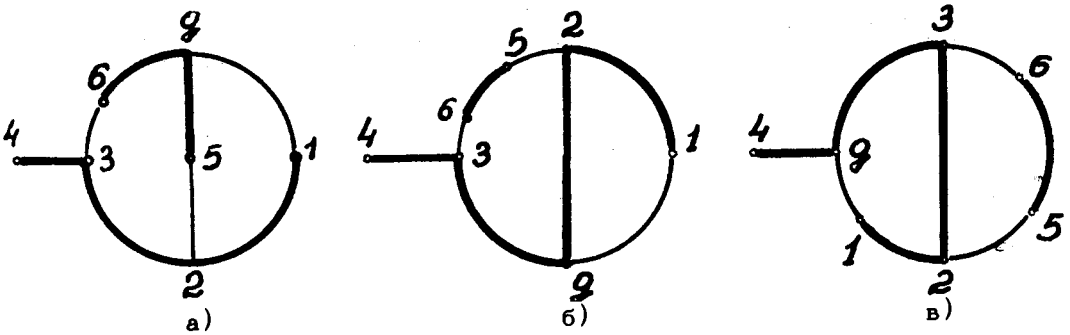


Рис. 31.

Эти фигуры будем обозначать Π_a , Π_b , Π_v .

д) Пусть в диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ не существует полигона NMN , но существует фигура рис. 28б. Эту фигуру будем обозначать Π . Путь L из точки 1 на участки (3,8), (5,8) или (7,8) приводить не может, так как иначе существовал бы полигон NMN . Если этот путь приводит на участок (2,8), (6,7) или (5,6), то диаграмма \mathcal{D} мажорируется хотя бы одной из примитивных диаграмм а), в), д) рис. 21, так как в этих случаях в ней имеется фигура I. Если путь L приводит в узел 4, то диаграмма \mathcal{D} имеет поддиаграмму, изображенную на рис. 32. Применим операцию теоремы 2 к четырехугольнику 1234 этой поддиаграммы и удалим затем линию (2,3) вместе с узлами 2 и 3. В результате получим примитивную диаграмму рис. 21в, мажорирующую в этом случае диаграмму \mathcal{D} .

Если путь L приводит на участок (2,3) или (3,4), то фигура III вместе с этим путем образует, соответственно, одну из следующих двух фигур (см. рис. 33). Эти фигуры будем обозначать III а и III б.

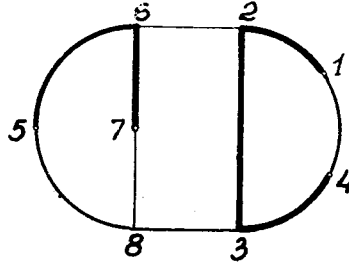


Рис. 32.

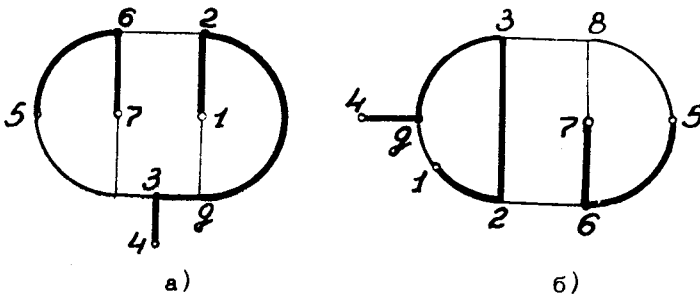


Рис. 33.

Итак, нам осталось рассмотреть диаграммы, не содержащие полигона NMN , но содержащие хотя бы одну из пяти фигур IIа, IIб, IIв, III а, III б. Как и ранее, можно доказать, что достаточно ограничиться диаграммами, в которых существует мезонный путь из точки 4 на фигуру, дополнительную к отрезку (4,3) (или (4g)).

е) Пусть в диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ не существует полигона NMN , но существует фигура IIа. Путь L из точки 4 на участки (3,6) и (2,5) привести не может, так как, иначе существовал бы полигон NMN . Если этот путь приводит на участок (g,1), то диаграмма \mathcal{D} имеет поддиаграмму рис. 30, а, следовательно, она мажорируется примитивной диаграммой рис. 21а. Если путь L приводит на участок (1,2) или (2,3), то в диаграмме имеется поддиаграмма рис. 34а или рис. 34б, соответственно. Применяв операцию теоремы 2 к четырехугольнику 432f диаграммы рис. 34а и к треугольнику 43f диаграммы рис. 34б, мы получим диаграммы, в каждой из которых имеется примитивная

поддиаграмма рис. 21б. Последняя в данном случае мажорирует диаграмму \mathcal{D} . Если путь L приходит на участок $(6, g)$ или $(5, g)$, то в диаграмме \mathcal{D} имеется, соответственно, примитивная поддиаграмма е) или ж) рис. 21.

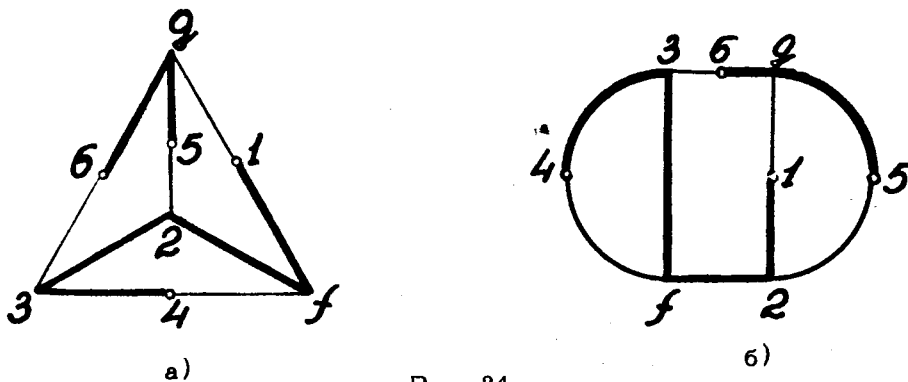


Рис. 34.

ж) Пусть в диаграмме $\mathcal{D} \in R^*$ не существует полигона NMN , но существует фигура II б). Путь L из точки 4 на участки $(3,6)$ и $(2,5)$ привести не может, так как иначе существовал бы полигон NMN . Если путь L из точки 4 приводит на участок $(5,6)$, $(3, g)$, $(2, g)$ или $(1,2)$, то диаграмма \mathcal{D} имеет поддиаграмму, в которой контур $(1,2, g, 1)$ удовлетворяет условию теоремы 2. После применения к этому контуру операции теоремы 2 поддиаграмма превратится в диаграмму, содержащую полигон NMN . Таким образом, в этом случае диаграмма \mathcal{D} мажорируется диаграммой, рассмотренной в 23а. Если путь L из точки 4 приводит на участок $(1, g)$, то диаграмма \mathcal{D} имеет поддиаграмму рис. 30, а, следовательно, мажорируется примитивной диаграммой рис. 21а.

з) Пусть в диаграмме $\mathcal{D} \in R^*$ не существует полигона NMN , но существует фигура II в). Если путь L из точки 4 приводит на любой участок этой фигуры, кроме $(1, g)$, то диаграмма \mathcal{D} имеет поддиаграмму, в которой контур $(123 g 1)$ удовлетворяет условию теоремы 2. После применения к этому контуру операции теоремы 2 поддиаграмма превратится в диаграмму, содержащую полигон NMN . Таким образом, в этом случае диаграмма \mathcal{D} мажорируется диаграммой, рассмотренной в 23а. Если путь L из точки 4 приводит на участок $(1, g)$, то диаграмма имеет поддиаграмму рис. 30 и мажорируется примитивной диаграммой рис. 21а.

и) Пусть в диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ не существует полигона NMN , но существует фигура III a. Если путь L из точки 4 приводит на любой участок этой фигуры, кроме участка $(1, g)$, то такая диаграмма имеет поддиаграмму, в которой контур $(1, 2, g, 1)$ удовлетворяет условию теоремы 2. После применения к этому контуру операции теоремы 2 эта поддиаграмма переходит в диаграмму, содержащую фиг. 1. Таким образом, в этом случае диаграмма \mathcal{D} мажорируется диаграммой, рассмотренной в 23в. Если путь L из точки 4 приводит на участок $(1, g)$, то диаграмма \mathcal{D} имеет поддиаграмму рис. 35. Применим к контуру (12341) этой поддиаграммы операцию теоремы 2 и удалим затем линию $(2,3)$ вместе с узлами 2 и 3. В результате получим примитивную диаграмму рис. 21в, которая в данном случае мажорирует диаграмму \mathcal{D} .

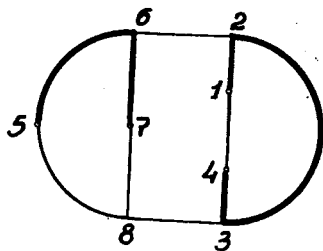


Рис. 35.

к) Пусть, наконец, в диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ не существует полигона NMN , но существует фигура III б. Если путь L из точки 4 приводит на любой участок этой фигуры, кроме участка $(1, g)$, то диаграмма имеет поддиаграмму, в которой контур $(123g1)$ удовлетворяет условию теоремы 2.

После применения к этому контуру операции теоремы 2 поддиаграмма превратится в диаграмму, в которой существует полигон NMN . Таким образом, в этом случае диаграмма \mathcal{D} мажорируется диаграммой, рассмотренной в 23а. Если же путь L из точки 4 приводит на участок $(1, g)$, то в диаграмме \mathcal{D} имеется поддиаграмма, изображенная на рис. 35, а, следовательно, она мажорируется примитивной диаграммой рис. 21в.

Итак, доказано, что любая диаграмма из \mathcal{R}^* рассеяния нуклона на нуклоне мажорируется хотя бы одной из примитивных диаграмм рис. 21.

§ 6. Рассеяние мезона на нуклоне ($l_m = 2, l_N = 2$)

24. Любая диаграмма из \mathcal{R}^* рассеяния мезона на нуклоне мажорируется хотя бы одной из следующих примитивных диаграмм (см. рис. 36).

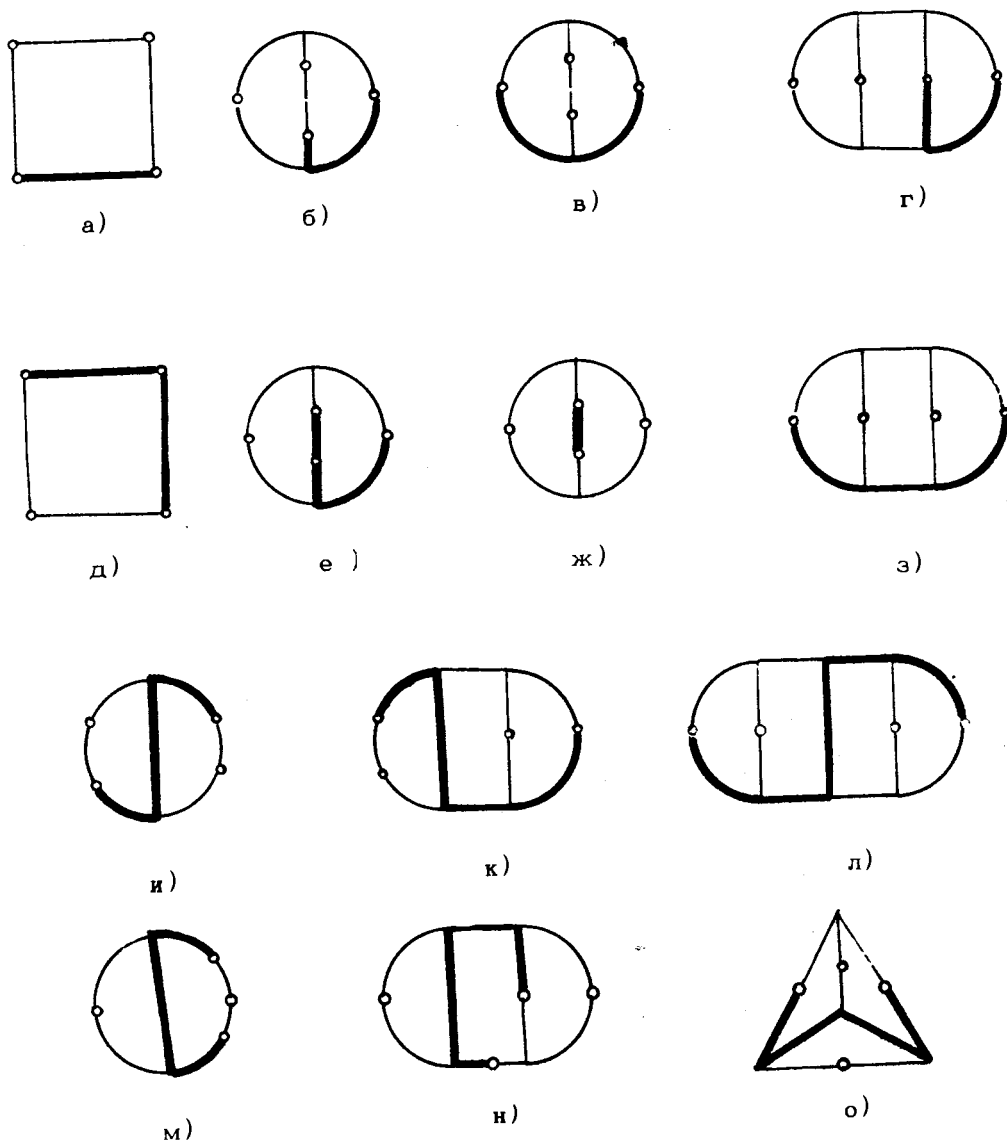


Рис 36.

Доказательство

В диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ рассеяния мезона на нуклоне нуклонные линии составляют единственный нуклонный полигон. Пусть a и b - внешние узлы, расположенные в концах этого полигона, а c и d - два других внешних узла.

а) Рассмотрим сначала диаграмму $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$, в которой узлы c и d расположены на нуклонном полигоне. Каждую звезду в такой диаграмме, опирающуюся на нуклонный полигон всеми своими лучами, заменим мезонной линией, соединяющей ее крайние узлы на этом полигоне. В результате мы получим поддиаграмму, в которой каждая мезонная линия опирается на нуклонный полигон обоими концами. Повторяя далее рассуждения пункта 19, нетрудно доказать, что диаграмма \mathcal{D} имеет хотя бы одну из поддиаграмм типа тех, которые изображены на рис. 23. Отсюда в силу 17 следует, что в рассматриваемом случае диаграмма \mathcal{D} мажорируется хотя бы одной из диаграмм, изображенных на рис. 37.

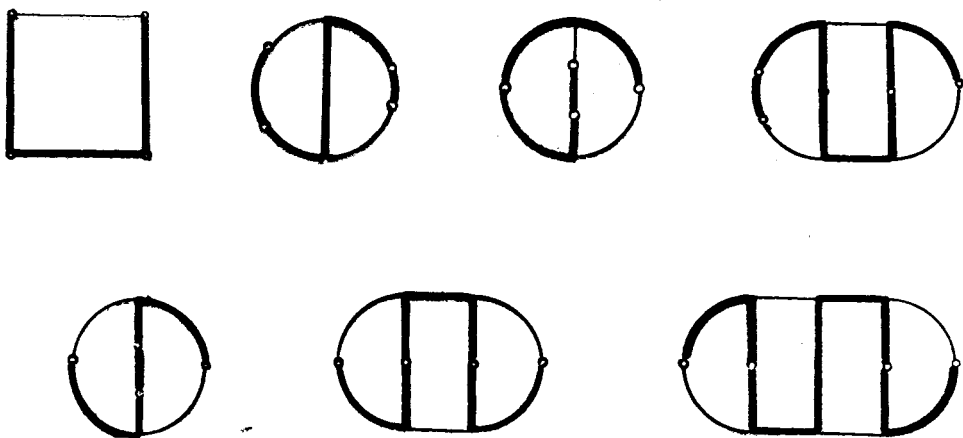


Рис. 37.

Применив к этим диаграммам операцию теоремы 2, а затем, если потребуется, и операцию теоремы 1, мы получим примитивные диаграммы а), б), в), д), е), з), л) рис. 36.

Во всех этих примитивных диаграммах существует один из двух полигонов, изображенных на рис. 38 (цифрами отмечены внешние узлы). Докажем, что всякая диаграмма из \mathcal{R}^* мажорируется диаграммой, в которой существует один из таких полигонов. Первый полигон будем называть $\mathcal{N}NM$, а второй NM .

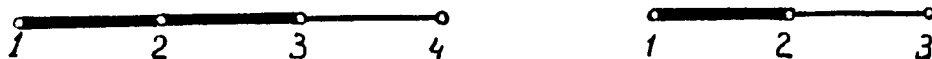


Рис. 38.

б) Для диаграмм, в которых все внешние узлы лежат на нуклонном полигоне, это уже доказано.

Рассмотрим случай, когда три внешних узла, скажем a , c и b лежат на нуклонном полигоне, а четвертый узел d — вне этого полигона. Ввиду связности в диаграмме существует мезонный путь из узла d на нуклонный полигон, например, на его участок ac . Повторяя далее рассуждения пункта 216, можно убедиться, что в данном случае диаграмма имеет хотя бы одну из поддиаграмм, изображенных на рис. 39.

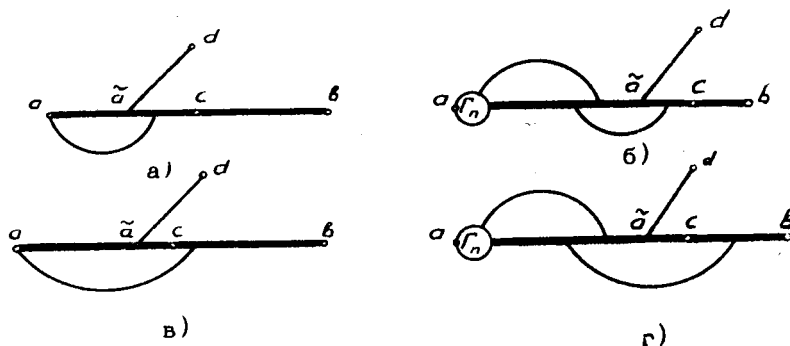


Рис. 39.

В поддиаграммах б) и г) вершинную часть Γ в соответствии с 17 заменим узлом a . Применяя далее операцию теоремы 2, мы установим, что поддиаграммы а) и б) мажорируются диаграммой, в которой существует полигон NNM , а поддиаграммы в) и г) - диаграммой, в которой существует полигон NM .

в) Пусть теперь два внешних узла лежат вне нуклонного полигона. В силу связности по меньшей мере из одной точки нуклонного полигона существует мезонный путь в один из внешних узлов c или d , не проходящий через другой из этих узлов. Ближайшую к a точку нуклонного полигона, из которой существует такой путь, назовем характеристической. Повторив далее рассуждения пункта 21б, мы докажем, что в рассматриваемом случае диаграмма мажорируется диаграммой, содержащей полигон NM .

г) Пусть в диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ существует полигон NNM . Повторяя рассуждения пункта 23а, можно доказать, что в этом случае диаграмма \mathcal{D} мажорируется хотя бы одной из диаграмм рис. 40. Применяя операцию теоремы 2, нетрудно убедиться, что эти диаграммы мажорируются примитивными диаграммами а), б), д), е), з), л) рис. 36.

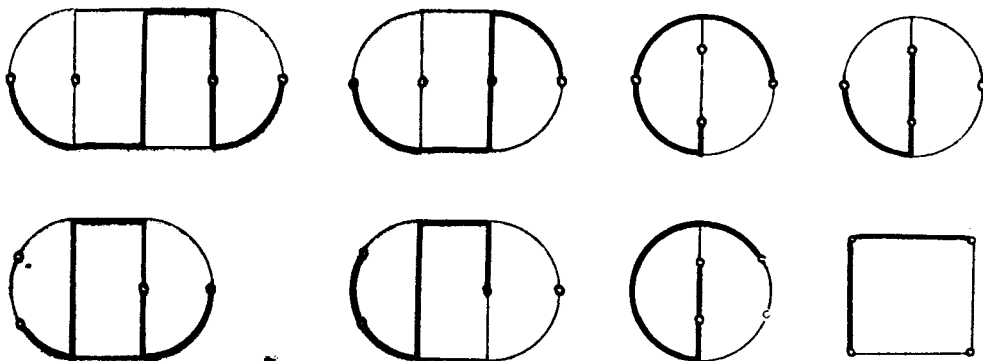


Рис. 40.

д) Пусть в диаграмме $\mathcal{D} \in \mathcal{R}^*$ существует полигон NM . В силу связности на полигоне NM найдется хотя бы одна точка, из которой существует мезонный путь в точку d , не имеющий общих точек с полигоном NM . Среди таких точек ближайшую к a назовем характеристической точкой и обозначим \bar{a} . Если точка \bar{a} расположена на участке ab , то диаграмма \mathcal{D} имеет хотя бы одну из четырех поддиаграмм рис. 41, если же она находится на участке bc , то хотя бы одну из четырех поддиаграмм рис. 42.

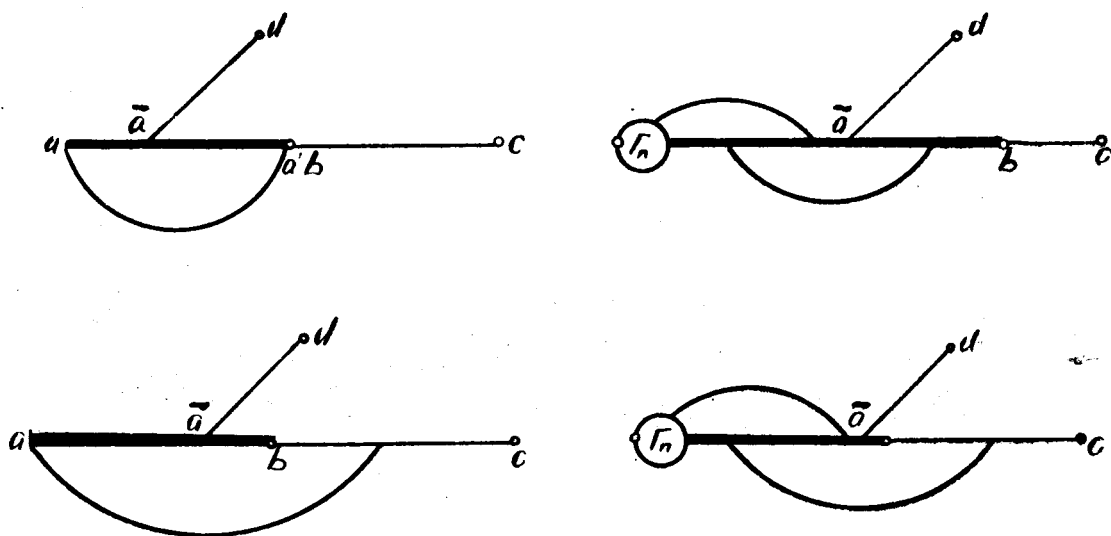


Рис. 41.

На основании пункта 17 и теоремы 2 теперь нетрудно убедиться, что любая диаграмма, в которой имеется полигон NM , мажорируется диаграммой, в которой имеется или полигон MNM , или фигура 1 (см. рис. 43).

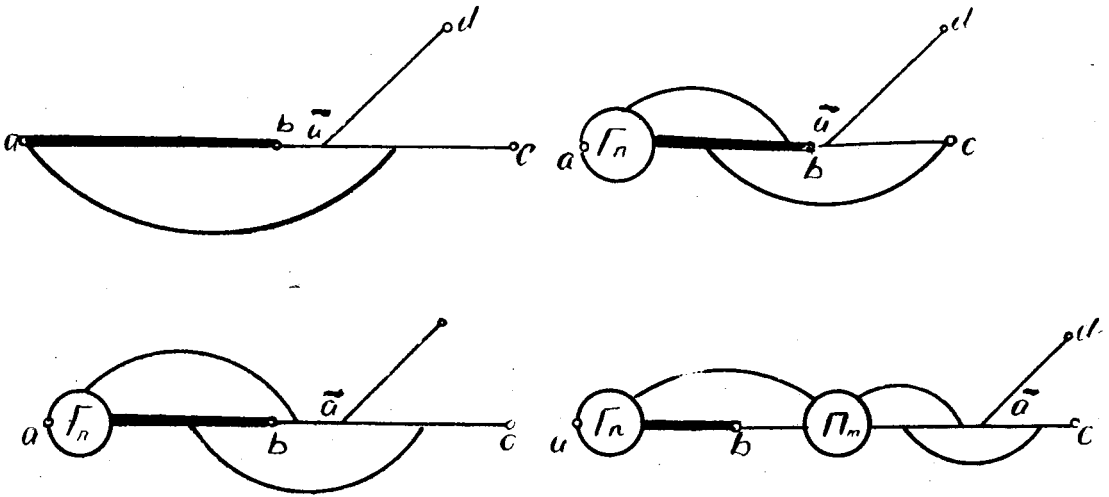


Рис. 42.

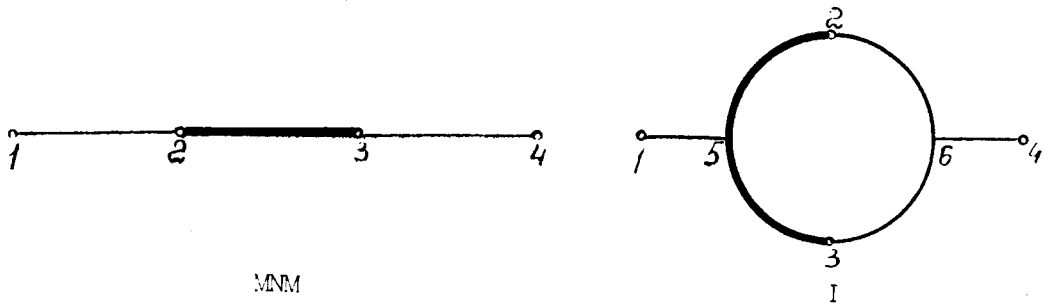


Рис. 43.

е) Пусть в диаграмме из \mathcal{R}^k существует полигон MNM . Повторяя рассуждения пункта 23а, можно доказать, что в этом случае диаграмма \mathcal{D} мажорируется хотя бы одной из примитивных диаграмм а), б), ж), з), и), к), л) рис. 36.

ж) Пусть теперь в диаграмме не существует полигона MNM , но существует фигура 1. Аналогично 21б можно доказать, что достаточно рассмотреть такие диаграммы, содержащие фигуру 1, в которых имеется мезонный путь L из точки 1 на часть этой фигуры, дополнительную к отрезку $(1,5)$. Путь из точки 1 на участки $(2,6)$ и $(3,6)$ приводить не может, так как иначе существовал бы полигон MNM . Если этот путь приводит в точку 4, то диаграмма имеет примитивную поддиаграмму рис. 36в. Если же путь L приходит на участок $(2,5)$, $(3,5)$ или $(4,6)$, то он вместе с фигурой 1 образует одну из следующих двух фигур (см.рис. 44)

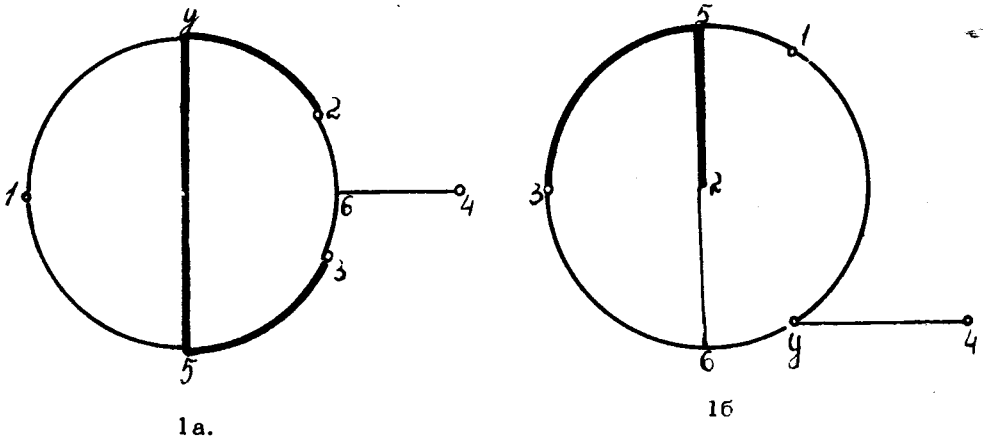


Рис. 44.

Эти фигуры будем обозначать 1а, 1б.

Повторив рассуждения пункта 21б, нетрудно убедиться, что достаточно рассмотреть лишь такие диаграммы, содержащие фигуры 1а или 1б, в которых имеется мезонный путь L из точки 4 на часть этой фигуры, дополнительную к отрезку $(4,6)$ или $(4,9)$, соответственно.

з) Пусть диаграмма из \mathcal{R}^* содержит фигуру 1а. Если путь L приводит на участок $(1,9)$, $(2,8)$, $(2,9)$ или $(5,9)$, то в диаграмме, соответственно имеется примитивная поддиаграмма в), м), н), о) рис. 36.

и) Пусть теперь диаграмма из \mathcal{R}^* содержит фигуру 1б. Если путь приводит на участок $(2,6)$, $(1,9)$ или $(1,5)$, то в диаграмме соответственно имеется примитивная поддиаграмма б), в), г) рис. 36.

Если путь L приводит на участок $(2,5)$, то диаграмма имеет поддиаграмму рис. 45, которая с помощью операции теоремы 2 приводится к примитивной диаграмме рис. 36а.

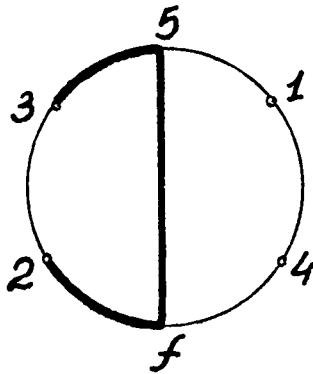


Рис. 45.

Остальные участки мы не рассматриваем ввиду симметрии фигуры.

Итак, доказано, что любая диаграмма из \mathcal{R}^* рассеяния мезона на нуклоне мажорируется хотя бы одной из примитивных диаграмм рис. 36.

25. Аналогичными рассуждениями можно доказать, что в любой диаграмме \mathcal{R}^* рассеяния мезона на мезоне ($l_\pi=1, l_N=0$) имеется хотя бы одна из примитивных диаграмм рис. 46.

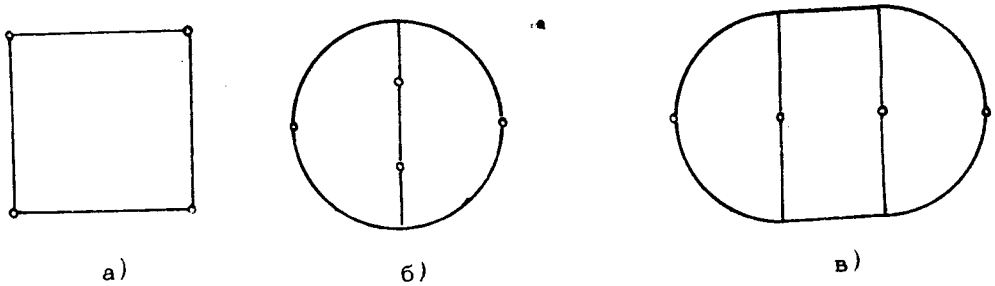


Рис. 46.

В данном случае доказательство особенно просто, ввиду того, что, как нетрудно показать, в любой диаграмме из \mathcal{R}^* рассеяния мезона на мезоне существует полигон, проходящий через все внешние узлы. Кроме того, эти примитивные диаграммы могут быть получены как поддиаграммы диаграмм рис.36, в которых нуклонные линии заменены мезонными.

Совершенно очевидно, что полученные примитивные диаграммы рис.36 и 46 могут быть использованы также при изучении амплитуд процессов с участием γ - квантов^{/14/}.

Часть II. МАЖОРИРОВАНИЕ ПРИМИТИВНЫХ ДИАГРАММ

1. Для определения области $G_{\mathcal{R}}$ теперь нам достаточно ограничиться конечным множеством примитивных диаграмм. Некоторые из примитивных диаграмм мажорируют другие. Например, примитивная диаграмма рис. 20б мажорируется примитивной диаграммой рис. 20а, а примитивная диаграмма рис.46в - примитивной диаграммой рис. 46а. Это следует из результатов, полученных в пункте 11. Для сравнения примитивных диаграмм требуются более детальные сведения о квадра-

тичных формах. Эффективным средством при сравнении примитивных диаграмм оказывается теорема Симанзика и некоторое ее обобщение.

§ 1. Выражение квадратичной формы диаграммы через ее матрицу инцидентности

2. Пусть задана произвольная диаграмма с n узлами и e внутренними линиями и пусть на каждой такой линии задано направление. Будем считать, что все внешние линии входят в соответствующие узлы. Занумеруем каким-нибудь образом узлы и линии в отдельности. Матрица инцидентности $E = (e_{i\nu})$, $i = 1, \dots, n$, $\nu = 1, \dots, e$ такой диаграммы определяется следующим образом:

$$e_{i\nu} = \begin{cases} 1, & \text{если линия } \nu \text{ выходит из узла } i, \\ -1, & \text{если линия } \nu \text{ входит в узел } i, \\ 0, & \text{если узел } i \text{ не принадлежит линии } \nu. \end{cases} \quad (1.1)$$

Закон сохранения импульса в каждом узле диаграммы записывается в виде:

$$\sum_{\nu=1}^e e_{i\nu} k_{\nu} = p_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

где k_1, \dots, k_e - импульсы на внутренних линиях, p_1, \dots, p_n - внешние импульсы.

Заметим, что в каждом столбце матрицы E два и только два элемента отличны от нуля, один из них равен 1, другой равен -1. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\nu=1}^e e_{i\nu} k_{\nu} = 0. \quad (1.3)$$

Таким образом, для совместности уравнений (1.2) необходимо выполнение условия

х) Матрица инцидентности хорошо известна в комбинаторной топологии (см., например, [15]).

$$\sum_{i=1}^n p_i = 0. \quad (1.4)$$

3. Если диаграмма связна, то число независимых уравнений среди уравнений (1.2) равно $n - 1$, а, следовательно, $f = \ell - n + 1$ импульсов κ_y можно задать произвольно. Импульсы κ_y можно задать произвольно на таких и только на таких линиях, перерезание которых не нарушает связности диаграммы. Изменяя, если нужно, нумерацию линий, можно добиться того, чтобы первые f линий обладали этим свойством. Рассмотрим сначала случай, когда все узлы диаграммы внешние. К системе уравнений (1.2) при $i = 1, \dots, n - 1$ добавим следующие уравнения:

$$\kappa_1 = t_1, \dots, \kappa_f = t_f. \quad (1.5)$$

В результате получим систему уравнений:

$$L \kappa = S, \quad (1.6)$$

где

$$S_1 = t_1, \dots, S_f = t_f, \\ S_{f+1} = p_1, \dots, S_e = p_{n-1},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1f} & l_{1f+1} & \dots & l_{1,e} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n-1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & l_{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Решение этой системы однозначно и может быть записано в виде:

$$K = L^{-1} \begin{pmatrix} t \\ p \end{pmatrix} = L^{-1} S. \quad (1.8)$$

4. Определим в 4ℓ - мерном пространстве векторов K скалярное произведение

$$(K, q) = \sum_{\nu=1}^{\ell} k_{\nu} q_{\nu} \quad (1.9)$$

и введем диагональную матрицу $a_{\lambda\nu} = a_{\lambda} \delta_{\lambda\nu}$, $a_{\nu} > 0$. Тогда

$$(K, aK) = \sum_{\nu=1}^{\ell} a_{\nu} k_{\nu}^2. \quad (1.10)$$

Подставляя (1.8) в (1.10), получим

$$A_0(d; t, p) = (L^{-1} S, a L^{-1} S) = (S, \tilde{L}^{-1} a L^{-1} S). \quad (1.11)$$

Матрица, обратная к матрице $\tilde{L}^{-1} a L^{-1}$, равна $L a^{-1} \tilde{L}$. Если переменным t и p сопоставить переменные y и z , то квадратичная форма, обратная (1.11), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{A}_0(d; y, z) &= (x, L a^{-1} \tilde{L} x) = \\ &= \sum_{s=1}^f \frac{1}{d_s} \left(y_s + \sum_{i=1}^{n-1} e_{is} z_i \right)^2 + \sum_{s=f+1}^{\ell} \frac{1}{d_s} \left(\sum_{i=1}^{n-1} e_{is} z_i \right)^2 \quad (1.12) \end{aligned}$$

5. Квадратичная форма $A_{\alpha}(\alpha; \rho)$, получаемая после интегрирования по внутренним импульсам, равна (см. п. 2 часть 1)

$$A_{\alpha}(\alpha, \rho) = \text{ext}_t A_{\alpha}(\alpha; t, \rho). \quad (1.13)$$

Следующая лемма (см., например, ^{15/}) позволяет весьма просто найти квадратичную форму $\bar{A}_{\alpha}(\alpha, \xi)$, обратную форме $A_{\alpha}(\alpha, \rho)$.

Лемма 2.

Пусть квадратичная форма $F(x, y)$ имеет вид:

$$F(x, y) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{e=1}^m b_{ie} x_i y_e + \sum_{e, \kappa=1}^m c_{e\kappa} y_e y_{\kappa} \equiv$$

$$\equiv (x, ax) + 2(x, by) + (y, cy).$$

Обратную ей квадратичную форму обозначим $\bar{F}(\xi, \zeta)$. Квадратичная форма $F(x) = \text{ext}_y F(x, y)$ имеет обратную квадратичную форму $\bar{F}(\xi)$, равную значению формы $\bar{F}(\xi, \zeta)$ при $\zeta = 0$. Согласно этой лемме

$$\bar{A}_{\alpha}(\alpha, \xi) = \bar{A}_{\alpha}(\alpha, 0, \xi) = \sum_{s=1}^e \frac{1}{d_s} \left(\sum_{i=1}^{n-1} e_{is} \xi_i \right)^2. \quad (1.14)$$

Отсюда следует, что

$$A_{\alpha}(\alpha, \rho) = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & \rho \\ \rho & d \end{vmatrix}}{|d|},$$

где

$$d_{ij} = \sum_{s=1}^e \frac{e_{is} e_{js}}{d_s}. \quad (1.15)$$

Пусть теперь некоторые из узлов диаграммы внутренние. Будем считать, что узел n - внешний. Тогда $A_D(\alpha, \rho)$ оказывается квадратичной формой от импульсов, заданных лишь во внешних узлах диаграммы. Согласно (1.14) и лемме 2 квадратичная форма $\bar{A}_D(\alpha, \xi)$, обратная $A_D(\alpha, \rho)$, равна:

$$\bar{A}_D(\alpha, \xi) = \text{ext}_{\xi_{int}} \sum_{s=1}^c \frac{1}{d_s} \left(\sum_{i=1}^{n-1} l_{is} \xi_i \right)^2 \quad (1.16)$$

где ξ_{int} - переменные, соответствующие внутренним узлам диаграммы.

Отметим, что при выводе этих формул мы не использовали предположения об эвклидовости импульсов.

В частном случае, когда векторы ξ_i эвклидовы, экстремум в (1.16) превращается в минимум.

§ 2. Теорема Симанзика и ее обобщение

Для формулировки и доказательства теоремы Симанзика полезно привести некоторые элементарные сведения о нормах^{х)}.

6. Пусть \mathcal{X} вещественное N -мерное эвклидово пространство. Пространство \mathcal{P} линейных функций (ρ, ξ) , заданных в \mathcal{X} , называется пространством, сопряженным с \mathcal{X} , если скалярный квадрат в \mathcal{P} определяется формулой

$$\rho^2 = (\rho, \rho) = \max_{\xi^2=1} (\rho, \xi)^2 \quad (2.1)$$

Пространства \mathcal{P} и \mathcal{X} изоморфны и взаимно сопряжены.

7. Вещественную функцию $f(\xi)$, $\xi \in \mathcal{X}$ будем называть нормой, если она обладает следующими свойствами:

х) В дальнейшем мы опускаем некоторые элементарные доказательства, которые можно найти в курсах по функциональному анализу (см., например, гл. XI).

а) Для каждого $x \in X$ и любого вещественного числа λ

$$f(\lambda x) = |\lambda| f(x).$$

б) Неравенство треугольника

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y),$$

где x и $y \in X$.

в) Если $f(x) = 0$, то $x = 0$.

Из свойств а) и б) следует $f(x) \geq 0$.

8. Пусть A — положительно определенная симметричная матрица. Тогда функция

$$f(x) = \sqrt{(x, Ax)} \quad (2.2)$$

удовлетворяет условиям а), б) и в) и представляет пример нормы. В частности, $|x| = \sqrt{(x, x)}$ является нормой.

Существуют нормы, непредставимые в виде (2.2). Например, если $\alpha_s > 0$, то функции

$$f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{s=1}^N \alpha_s |x_s|,$$

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_N) = \max_{s=1, \dots, N} \frac{|x_s|}{\alpha_s}$$

являются нормами.

9. Пусть $f(x)$ является нормой в X ; тогда функция

$$\bar{f}(\rho) = \max_{f(x) \leq 1} |(x, \rho)| \quad (2.3)$$

является нормой в \mathcal{P} . Эта норма называется сопряженной с $f(x)$.

Норма сопряженная с $\bar{f}(\rho)$ равна $f(x)$.

Приведем некоторые свойства взаимно сопряженных норм.

а) Норма сопряженная к норме (2.2) имеет вид

$$\bar{f}(\rho) = \sqrt{(\rho, A^{-1} \rho)}. \quad (2.4)$$

Доказательство.

Так как A положительно определенная симметричная матрица, то на основании неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$(\bar{x}, \rho)^2 = (A^{1/2} \bar{x}, A^{-1/2} \rho)^2 \leq (\bar{x}, A \bar{x})(\rho, A^{-1} \rho).$$

Так как в области $(\bar{x}, A \bar{x}) \leq 1$ для любого ρ существует ненулевой вектор, параллельный $A^{-1} \rho$, то

$$\bar{f}(\rho) = \max_{(\bar{x}, A \bar{x}) \leq 1} |(\bar{x}, \rho)| = \sqrt{(\rho, A^{-1} \rho)}.$$

б) Пусть $\bar{f}_1(\rho)$ и $\bar{f}_2(\rho)$ — две нормы в \mathcal{P} , а $f_1(\bar{x})$ и $f_2(\bar{x})$ — сопряженные с ними нормы в \mathcal{X} . Для того, чтобы имело место неравенство

$$\bar{f}_1(\rho) \geq \bar{f}_2(\rho), \quad \rho \in \mathcal{P}, \quad (2.5)$$

необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$f_1(\bar{x}) \leq f_2(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathcal{X}. \quad (2.6)$$

Доказательство

Пусть G_1 и G_2 — множества точек \bar{x} , где, соответственно, $f_1(\bar{x}) \leq 1$ и $f_2(\bar{x}) \leq 1$. В силу (2.6) $G_2 \subseteq G_1$, а, следовательно,

$$\max_{\bar{x} \in G_1} |(\bar{x}, \rho)| \geq \max_{\bar{x} \in G_2} |(\bar{x}, \rho)|.$$

в) Если $f(\bar{x})$ и $\bar{f}(\rho)$ — взаимно сопряженные нормы и $\lambda > 0$, то норма $\lambda f(\bar{x})$ сопряжена с нормой $\frac{1}{\lambda} \bar{f}(\rho)$.

10. Лемма 3.

Пусть имеется семейство норм $\bar{f}_\alpha(\rho)$, ограниченных при каждом ρ , когда α пробегает произвольное множество \mathcal{J} , и пусть $f_\alpha(\bar{x})$ семейство сопряженных к ним норм.

Тогда функция

$$\bar{f}(\rho) = \max_{\alpha \in \mathcal{J}} \bar{f}_\alpha(\rho) \quad (2.7)$$

также является нормой, причем сопряженная к ней норма $f(x)$ является максимальной нормой, удовлетворяющей неравенству

$$f(x) \leq \min_{\alpha \in J} f_{\alpha}(x). \quad (2.8)$$

Отсюда следует, что если $\min_{\alpha \in J} f_{\alpha}(x)$ является нормой, то она будет сопряженной с $\bar{f}(p)$, т.е.

$$f(x) = \min_{\alpha \in J} f_{\alpha}(x). \quad (2.9)$$

Доказательство

Легко убедиться, что функция (2.7) удовлетворяет свойствам а), б) и в) пункта 7. Например, свойству б):

$$\bar{f}(p+q) = \max_{\alpha} \bar{f}_{\alpha}(p+q) \leq \max_{\alpha} \bar{f}_{\alpha}(p) + \max_{\alpha} \bar{f}_{\alpha}(q) = \bar{f}(p) + \bar{f}(q).$$

Итак, $\bar{f}(p)$ является нормой.

Область значений p , удовлетворяющих условиям

$$\bar{f}(p) \leq 1, \quad \bar{f}_{\alpha}(p) \leq 1$$

обозначим, соответственно, через \bar{G} и \bar{G}_{α} . Из (2.7) следует, что

$$\bar{G}_{\alpha} \supseteq \bar{G}. \quad (2.10)$$

Так как

$$f_{\alpha}(x) = \max_{p \in \bar{G}_{\alpha}} |(p, x)|,$$

то в силу (2.10)

$$\text{т.е. } f(x) = \max_{p \in \bar{G}} |(p, x)| \leq \max_{p \in \bar{G}_{\alpha}} |(p, x)| = f_{\alpha}(x), \quad (2.11)$$

$$f(x) \leq f_{\alpha}(x) \text{ для любого } \alpha \in J.$$

В силу доказанного выше существует максимальная норма $\varphi(x)$, удовлетворяющая неравенству (2.11)

$$f(x) \leq \varphi(x) \leq f_{\alpha}(x) \text{ для любого } \alpha \in J. \quad (2.12)$$

Но так как $\varphi(z) \leq f_\alpha(z)$, то на основании пункта 9б имеем

$$\bar{\varphi}(\rho) \geq \bar{f}_\alpha(\rho) \text{ для любого } \alpha \in J,$$

откуда

$$\bar{\varphi}(\rho) \geq \max_{\alpha} \bar{f}_\alpha(\rho) = \bar{f}(\rho).$$

Применяя опять свойство 9б, получим

$$\varphi(z) \leq f(z). \quad (2.13)$$

Сравнивая (2.12) и (2.13), получим

$$f(z) = \varphi(z). \quad (2.14)$$

Таким образом, из (2.11) и (2.14) следует, что $f(z)$ является максимальной нормой, удовлетворяющей неравенству

$$f(z) \leq \min_{\alpha} f_\alpha(z).$$

11. Пусть пространство \tilde{X} является прямой суммой подпространств X и Y , $z = (x, y) \in \tilde{X}$; $x \in X$, $y \in Y$. Тогда, если $f(z) \equiv f(x, y)$ - норма в \tilde{X} , то

$$f(x) = \min_y f(x, y) \quad (2.15)$$

является нормой в X .

Сопряженное с \tilde{X} пространство \mathcal{P} разлагается соответственно на сумму подпространств Q и S . Имеет место следующий аналог леммы 2: норма, сопряженная с $f(x)$, равна

$$\bar{f}(q) = \bar{f}(q, s) \quad \text{при } s = 0; q \in Q, s \in S.$$

12. На основании пункта 8 функция

$$\bar{f}_\alpha(\alpha, \rho) = \sqrt{\frac{A_\alpha(\alpha, \rho)}{M_\alpha^2(\alpha)}}, \quad (2.16)$$

где A_α и M_α^2 заданы формулами (1.15) и (1.3 ч.1), является нормой в \mathcal{P} . Согласно 9а), в) функция

$$f_{\mathcal{D}}(d, \bar{z}) = \sqrt{M_{\mathcal{D}}^2(d) \bar{A}_{\mathcal{D}}(d, \bar{z})}, \quad (2.17)$$

где $\bar{A}_{\mathcal{D}}$ задана формулой (1.16), является сопряженной с $f_{\mathcal{D}}(d, \rho)$ нормой.

13. Вычислим минимум по d от функции

$$y_{\mathcal{D}}(d, \bar{z}) = \sum_{s=1}^e d_s m_s^2 \cdot \sum_{\nu=1}^e \frac{1}{d_{\nu}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} l_{i\nu} \bar{z}_i \right)^2. \quad (2.18)$$

Так как

$$\lim_{d_s \rightarrow 0} y_{\mathcal{D}}(d, \bar{z}) = \lim_{d_s \rightarrow \infty} y_{\mathcal{D}}(d, \bar{z}) = \infty,$$

то минимум достигается во внутренней точке области изменения d , в которой

$$\frac{\partial y_{\mathcal{D}}}{\partial d_s} = m_s^2 \sum_{\nu=1}^e \frac{1}{d_{\nu}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} l_{i\nu} \bar{z}_i \right)^2 - \frac{\sum_{\nu=1}^e d_{\nu} m_{\nu}^2}{d_s^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} l_{is} \bar{z}_i \right)^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$d_s = \frac{\left| \sum_{i=1}^{n-1} l_{is} \bar{z}_i \right|}{m_s} \cdot \left\{ \frac{\sum_{\nu=1}^e d_{\nu} m_{\nu}^2}{\sum_{\nu=1}^e \frac{1}{d_{\nu}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} l_{i\nu} \bar{z}_i \right)^2} \right\}^{1/2}. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.18), получим

$$\sqrt{\min_d y_{\mathcal{D}}(d, \bar{z})} = \sum_{\nu=1}^e m_{\nu} \left| \sum_{i=1}^{n-1} l_{i\nu} \bar{z}_i \right|. \quad (2.20)$$

Легко убедиться, что (2.20) является нормой.

14. Теперь нетрудно найти минимум по d от функции $f_{\mathcal{D}}(d, \bar{z})$. Действительно, пользуясь (2.20), получим

$$f_D(\bar{x}) = \min_d f_D(d, \bar{x}) = \min_{\bar{x}_{int}} \sqrt{\min_d J_D(d, \bar{x})} = \min_{\bar{x}_{int}} \sum_{\nu=1}^l m_\nu / \left| \sum_{i=1}^{n-1} e_{i\nu} \bar{x}_i \right| \quad (2.21)$$

В силу пунктов 13 и 11 $f_D(\bar{x})$ является нормой.

Согласно лемме 3, норма $f_D(\bar{x})$ сопряжена с нормой

$$\bar{f}_D(\rho) = \max_d \sqrt{\frac{A_D(d, \rho)}{M_D^2(d)}} \quad (2.22)$$

15. Из пунктов 9 б) и 14 непосредственно следует теорема Симанзика,

Пусть имеются две диаграммы \mathcal{D} и \mathcal{D}' одного и того же процесса.

Для того, чтобы неравенство

$$\max_d \frac{A_D(d, \rho)}{M_D^2(d)} \geq \max_{d'} \frac{A_{D'}(d', \rho)}{M_{D'}^2(d')} \quad (2.23)$$

имело место при всех $\rho \in \mathcal{P}$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $\bar{x} \in \bar{\mathcal{X}}$ выполнялось неравенство

$$\min_{\bar{x}_{int}} \sum_{\nu=1}^l m_\nu / \left| \sum_{i=1}^{n-1} e_{i\nu} \bar{x}_i \right| \leq \min_{\bar{x}'_{int}} \sum_{\nu=1}^{l'} m'_\nu / \left| \sum_{i=1}^{n'-1} e'_{i\nu} \bar{x}'_i \right| \quad (2.24)$$

Здесь $e_{i\nu}$ и $e'_{i\nu}$ -матрицы инцидентности диаграмм \mathcal{D} и \mathcal{D}' . Переменные \bar{x} и \bar{x}' , соответствующие внешним узлам, совпадают.

16. В пункте 9 (часть 1) было дано определение области $G(\mathcal{D})$ диаграммы \mathcal{D} с заданной нумерацией внешних узлов.

Если такая диаграмма принадлежит множеству \mathcal{R} (см. 9 часть 1), то наряду с этой диаграммой, множество \mathcal{R} содержит все диаграммы, получающиеся на данной нумерацией внешних нуклонных и мезонных узлов в отдельности,

Каждую такую диаграмму будем обозначать \mathcal{D}_x^π , где

$$\pi = \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, e_m \\ i_1 \dots i_m \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad x = \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, e_n \\ j_1 j_2 \dots j_{e_n} \end{pmatrix}$$

произвольные подстановки.

Определим область $M(\mathcal{D})$ как пересечение областей

$$M(\mathcal{D}) = \bigcap_{x, \pi} G(\mathcal{D}_x^\pi)$$

по всевозможным x и π .

Область $M(\mathcal{D})$ характеризует диаграмму \mathcal{D} безотносительно к нумерации ее внешних узлов. Область $G_{\mathcal{D}}$ совпадает с пересечением всех областей $M(\mathcal{D})$.

17. Из пунктов 9 б) и 14 непосредственно следует также обобщение теоремы Симанзика. Пусть заданы $K+1$ диаграмма \mathcal{D}_σ ($\sigma = 0, 1, \dots, K$) одного и того же процесса с определенными нумерациями внешних узлов. Пусть $\bar{f}_{\mathcal{D}_\sigma}(\rho)$ нормы, соответствующие диаграммам \mathcal{D}_σ (2.22). Для того, чтобы при всех $\rho \in \mathcal{P}$ имело место неравенство

$$\bar{f}_{\mathcal{D}_0}(\rho) \leq \max_{\sigma=1, \dots, K} \bar{f}_{\mathcal{D}_\sigma}(\rho) = \bar{f}_{1, \dots, K}(\rho), \quad (2.25)$$

необходимо и достаточно, чтобы при всех $z \in \mathcal{Z}$ сопряженные нормы удовлетворяли неравенству

$$f_{1, \dots, K}(z) \leq f_{\mathcal{D}_0}(z). \quad (2.26)$$

Согласно лемме 3 $f_{1, \dots, K}(z)$ является максимальной нормой, удовлетворяющей условию

$$f_{1, \dots, K}(z) \leq \min_{\sigma=1, \dots, K} f_{\mathcal{D}_\sigma}(z). \quad (2.27)$$

Установленная теорема дает необходимое и достаточное условие, чтобы область $G_{\mathcal{D}_0}$ содержала пересечение областей $G_{\mathcal{D}_\sigma}$, т.е. чтобы

$$G_{\mathcal{D}_0} \supseteq \bigcap_{\sigma=1}^K G_{\mathcal{D}_\sigma}.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться этой теоремой лишь в частном случае, когда \mathcal{D}_σ ($\sigma=1, \dots, K$) — представители одной и той же диаграммы \mathcal{D} , с разными нумерациями внешних мезонных и нуклонных узлов. В этом случае теорема дает критерий включения области $H_{\mathcal{D}}$ (см. пункт 16) в область $G_{\mathcal{D}_0}$.

В настоящей работе мы будем пользоваться лишь следующим простым следствием из (2.27):

Следствие. Для выполнения неравенства (2.25) достаточно, чтобы при всех $z \in \mathcal{Z}$

$$\min_{\sigma=1, \dots, K} f_{\mathcal{D}_\sigma}(z) \leq f_{\mathcal{D}_0}(z). \quad (2.28)$$

Замечание. Пусть $\bar{G}(\mathcal{D}_\sigma)$ есть множество точек \mathcal{Z} , в котором $f_{\mathcal{D}_\sigma}(z) \leq 1$. Множество точек \mathcal{Z} , удовлетворяющих неравенству

$$f_{1, \dots, K}(z) \leq 1,$$

является выпуклой оболочкой суммы множеств $\bar{G}(\mathcal{D}_\sigma)$, $\sigma=1, \dots, K$.

§ 3. Мажорирование примитивных диаграмм

18. Вершинная часть. Согласно § 4 части 1, класс R_0 примитивных диаграмм мезонно-нуклонной вершинной части состоит из двух диаграмм рис. 17. С помощью теоремы Симанзика покажем, что диаграмма рис. 17а) мажорирует диаграмму рис. 17б). Действительно, норма $f_{\mathcal{D}}(z)$ диаграммы рис. 47 в силу неравенства треугольника

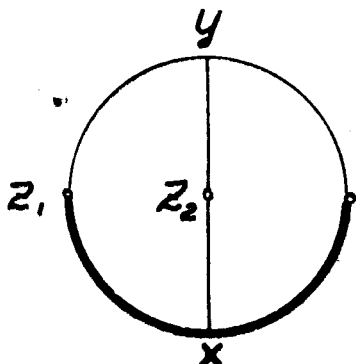
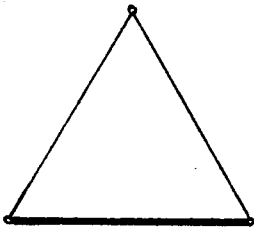


Рис. 47.

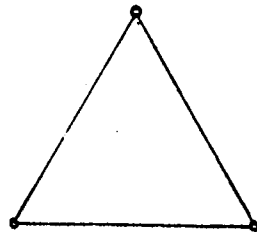
больше нормы $f_{\Delta}(\bar{x})$ диаграммы рис. 17 а):

$$\begin{aligned}
 f_{\Phi}(\bar{x}) &= \min_{x,y} \left\{ M \left[|z_1 - x| + |x| \right] + m \left[|z_1 - y| + |y - z_2| + |z_2 - x| + |y| \right] \right\} = \\
 &= \min_{x,y} \left\{ (M-m) \left[|z_1 - x| + |x| \right] + \frac{m}{2} \left[(|z_1 - x| + |x - z_2|) + (|x| + |z_2 - x|) + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. (|z_1 - x| + |x|) + (|z_1 - y| + |y - z_2|) + (|z_2 - y| + |y|) + (|z_1 - y| + |y|) \right] \right\} \geq \\
 &\geq M |z_1| + m \left[|z_1 - z_2| + |z_2| \right] = f_{\Delta}(\bar{x}).
 \end{aligned}$$

Итак, любая диаграмма мезонно-нуклонной вершинной части из \mathcal{R} (пункт 9 часть 1) мажорируется диаграммой рис. 48 а).



а)



б)

Рис. 48.

Отсюда же следует, что любая диаграмма мезонно-мезонной вершинной части из \mathcal{R} мажорируется диаграммой рис. 48б). Этот результат был уже получен ранее (см. пункт 1 часть II).

14. Рассеяние мезона на мезоне.

Согласно пункту 25 части 1 класс R_0 примитивных диаграмм рассеяния мезона на мезоне состоит из трех диаграмм рис. 46. Примитивная диаграмма рис. 46в) мажорируется диаграммой рис. 46 а) (см. пункт 1 часть II). Этот же результат следует и из теоремы Симанзика. В самом деле, $f_{\mathcal{R}_0}(z)$ норма этой диаграммы (см. рис. 49в)

$$\begin{aligned}
 f_{\mathcal{R}_0}(z) &= m \cdot \min_{x, y} \left\{ |z_1 - x_1| + |x_1 - z_2| + |x_1 - x_2| + |z_1 - y_1| + |y_1 - z_2| + \right. \\
 &\quad \left. + |y_1 - y_2| + |x_2 - z_3| + |z_3 - y_2| + |x_2| + |y_2| \right\} = \\
 &= m \cdot \min_{x, y} \left\{ \frac{1}{2} \left[|z_1 - x_1| + |x_1 - z_2| \right] + \frac{1}{2} \left[|z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - z_3| + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + |z_1 - y_1| + |y_1 - y_2| + |y_2 - z_3| \right] + \frac{1}{2} \left[|z_1 - y_1| + |y_1 - z_2| \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\left(|z_3 - x_2| + |x_2| \right) + \left(|z_3 - y_2| + |y_2| \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\left(|z_2 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2| \right) + \left(|z_2 - y_1| + |y_1 - y_2| + |y_2| \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

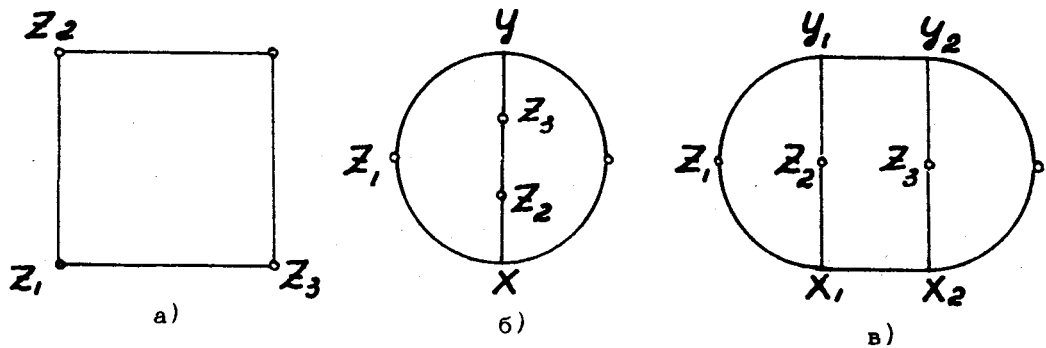


Рис. 49 .

в силу неравенства треугольника больше нормы $f_{\mathcal{D}_a}(z_1, z_2, z_3)$ диаграммы рис. 49а), равной

$$f_{\mathcal{D}_a}(z_1, z_2, z_3) = m \left[|z_1 - z_2| + |z_1 - z_3| + |z_2| + |z_3| \right]. \quad (3.1)$$

Покажем теперь, что на основании обобщенной теоремы Симанзика (пункт 12), диаграмма рис. 49 б) мажорируется парой диаграмм рис. 46 а) с двумя различными нумерациями внешних узлов, т.е. что

$$G(\mathcal{D}_b) \supseteq M(\mathcal{D}_a).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{D}_b}(z) &= m \cdot \min_{x, y} \left\{ |z_1 - x| + |x - z_2| + |x| + |z_2 - z_3| + |z_3 - y| + \right. \\ &\quad \left. + |y - z_1| + |y| \right\} = \\ &= m |z_2 - z_3| + \frac{1}{2} m \cdot \min_{x, y} \left\{ (|z - x| + |x|) + (|z_3 - y| + |y|) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (|x_1 - x| + |x - x_2|) + (|x_2 - x| + |x|) + (|x_1 - y| + |y|) + (|x_3 - y| + |y - x_2|) \Big\} \geq \\
& \geq m |x_2 - x_3| + m |x_1| + \frac{1}{2} m \left\{ |x_2| + |x_3| + |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| \right\} \geq \\
& \geq m |x_2 - x_3| + m |x_1| + m \cdot \min \left\{ |x_1 - x_2| + |x_3|, |x_1 - x_3| + |x_2| \right\} = \\
& = \min \left\{ f_{\mathcal{D}_a} (x_2, x_1, x_3), f_{\mathcal{D}_a} (x_3, x_1, x_2) \right\},
\end{aligned}$$

где $f_{\mathcal{D}_a} (x_1, x_2, x_3)$ определяется формулой (3.1).

Итак, любая диаграмма рассеяния мезона на мезоне из \mathcal{R} мажорируется диаграммой \square рис. 50,

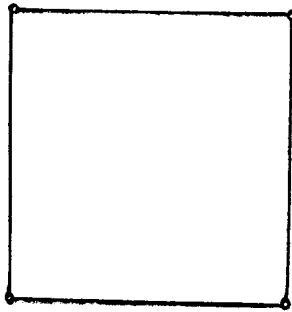


Рис. 50.

т.е. область $G_{\mathcal{R}} = G_{\mathcal{R}_0} = H(\square)$.

Заметим, что на основании теоремы Симанзика можно показать, что диаграмма \mathcal{D}_δ не мажорируется ни одной диаграммой \mathcal{D}_a с определенной нумерацией внешних узлов, т.е. что область $G(\mathcal{D}_\delta)$ не содержит ни одной из областей $G(\mathcal{D}_a)$.

20. Рассеяние нуклона на нуклоне.

Согласно § 5 части 1 класс R_0 примитивных диаграмм рассеяния нуклона на нуклоне состоит из семи диаграмм рис. 21. На основании теоремы Симанзика и ее обобщения можно показать, что примитивные диаграммы в), г), д), е), ж) этого рисунка мажорируются диаграммой а). Следовательно, любая диаграмма рассеяния нуклона на нуклоне из R_0 мажорируется хотя бы одной из двух диаграмм рис. 51,

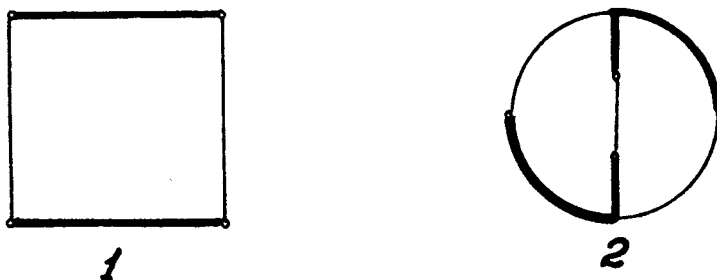


Рис. 51.

т.е. $G_R = G_{R_0} = M(\mathcal{D}_1) \cap M(\mathcal{D}_2)$.

Переходим к доказательству этого утверждения. Рассмотрим сначала диаграммы г), д), е) рис. 21.

Диаграмма г) (см. рис. 52) имеет норму $f_{\mathcal{D}_2}$, равную

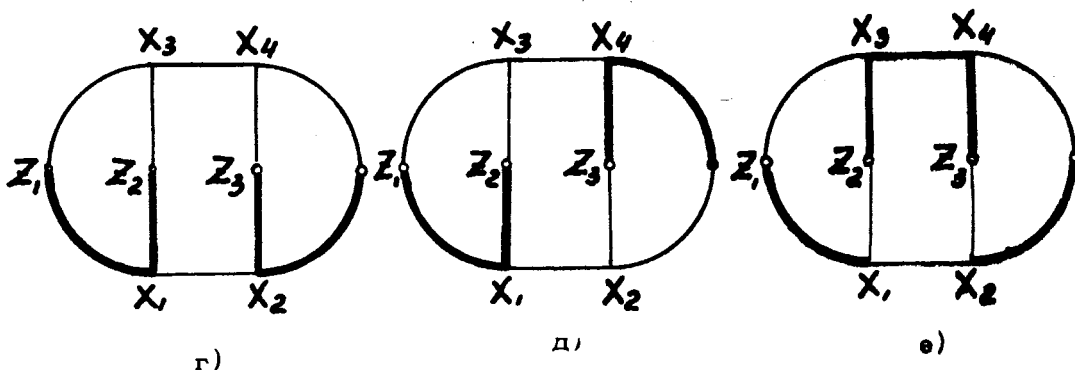


Рис. 52.

$$\begin{aligned}
f_{D_2}(\bar{x}) &= \min_x \left\{ M \left[|\bar{x}_1 - x_1| + |x_1 - \bar{x}_2| + |\bar{x}_3 - x_2| + |x_2| \right] + \right. \\
&+ m \left[|x_1 - x_2| + |\bar{x}_1 - x_3| + |x_3 - \bar{x}_2| + |x_3 - x_4| + |x_4| + |x_4 - \bar{x}_3| \right] \left. \right\} \geq \\
&\geq \min_{x_1, x_2} (M - m) \left[|\bar{x}_1 - x_1| + |x_1 - \bar{x}_2| + |\bar{x}_3 - x_2| + |x_2| \right] + \\
&+ m \cdot \min_{x_1, x_2} \left\{ \left[|\bar{x}_1 - x_1| + |x_1 - \bar{x}_2| \right] + \left[|\bar{x}_3 - x_2| + |x_2| \right] + \right. \\
&+ \left. \left[|\bar{x}_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2| \right] + \left[|\bar{x}_2 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - \bar{x}_3| \right] \right\} \geq \\
&\geq f_{D_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3),
\end{aligned}$$

где

$$f_{D_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = M \left[|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + |\bar{x}_3| \right] + m \left[|\bar{x}_1| + |\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \right]. \quad (3.2)$$

Диаграмма д) (см. рис. 52) имеет норму f_{D_3} , равную

$$\begin{aligned}
f_{D_3}(\bar{x}) &= \min_x \left\{ M \left[|\bar{x}_1 - x_1| + |x_1 - \bar{x}_2| + |\bar{x}_3 - x_4| + |x_4| \right] + \right. \\
&+ m \left[|x_1 - x_2| + |x_2| + |\bar{x}_1 - x_3| + |x_3 - \bar{x}_2| + |x_2 - \bar{x}_3| + |x_3 - x_4| \right] \left. \right\} \geq \\
&\geq \min_{x_1, x_2} (M - m) \left[|\bar{x}_1 - x_1| + |x_1 - \bar{x}_2| + |\bar{x}_3 - x_4| + |x_4| \right] +
\end{aligned}$$

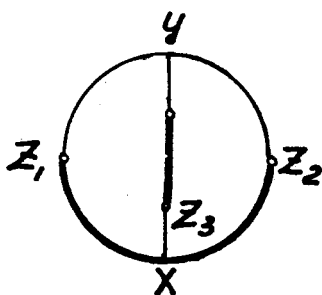
$$\begin{aligned}
& + m \cdot \min_{x_1, x_2} \left\{ \left[|z_2 - x_1| + |x_1 - z_3| \right] + \left[|x_2| + |x_2 - z_3| \right] + \right. \\
& \quad \left. + \left[|z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2| \right] + \right. \\
& \quad \left. + \left[|z_2 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - z_3| \right] \right\} \geq f_{\partial a}^m(z_1, z_2, z_3),
\end{aligned}$$

где $f_{\partial a}(z_1, z_2, z_3)$ определяется формулой (3.2). Диаграмма e) (см. рис. 52) имеет норму $f_{\partial e}$ равную

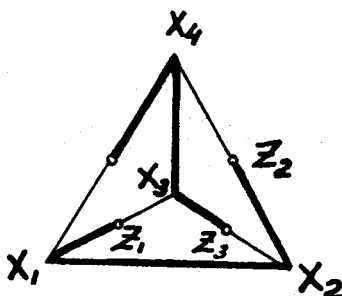
$$\begin{aligned}
f_{\partial e}(z) &= \min_x \left\{ M \left[|z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2| + |z_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + |x_4 - z_3| \right] + \right. \\
& \quad \left. + m \left[|z_1 - x_3| + |x_1 - z_2| + |x_2 - z_3| + |x_4| \right] \right\} = \\
&= \min_x \left\{ (M - m) \left[|z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2| + |z_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + |x_4 - z_3| \right] + \right. \\
& \quad \left. + m \left[|z_1 - x_2| + |x_1 - z_2| + |z_3 - x_2| + |x_2| + |x_1 - x_2| \right] + \right. \\
& \quad \left. + m \left[|z_1 - x_3| + |x_3 - z_2| + |z_3 - x_4| + |x_4| + |x_3 - x_4| \right] \right\} \geq \\
& \geq \min_x (M - m) \left[|z_2 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2| + |z_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + |x_4 - z_3| \right] + \\
& + m \cdot \min_{x_1, x_2} \left\{ |z_1 - x_1| + |x_1 - z_2| + |z_3 - x_2| + |x_2| + |z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2| + \right. \\
& \quad \left. + |z_2 - x_1| + |x_2 - x_2| + |x_2 - z_3| \right\} \geq f_{\partial a}^m(z_3, z_2, z_1),
\end{aligned}$$

где $f_{D_a}(z_1, z_2, z_3)$ определяется формулой (3.2).

Перейдем теперь к рассмотрению диаграмм в) и ж) рис. 21. Диаграмма в) (см. рис. 53) имеет норму f_{D_b} равную



в)



ж)

Рис. 53.

$$\begin{aligned}
 f_{D_b}(z_1) &= \min_{x,y} \left\{ M \left[|z_1 - x| + |x - z_2| + |z_3| \right] + \right. \\
 &\quad \left. + m \left[|y| + |y - z_1| + |z_2 - y| + |x - z_3| \right] \right\} \geq \\
 &\geq \min_{x,y} (M - m) \left[|z_1 - x| + |x - z_2| + |z_3| \right] + \\
 &+ \frac{m}{2} \min_{x,y} \left\{ \left[|z_1 - x| + |x - z_2| \right] + \left[|z_2 - y| + |y - z_1| \right] + \right. \\
 &+ \left[|z_1 - x| + |x - z_3| \right] + \left[|z_2 - x| + |x - z_3| \right] + \\
 &\left. + \left[|z_1 - y| + |y| \right] + \left[|z_2 - y| + |y| \right] \right\} + m |z_3| \geq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq M \left[|z_1 - z_2| + |z_3| \right] + \frac{m}{2} \left[|z_1 - z_3| + |z_2 - z_3| + |z_1| + |z_2| \right] \geq \\
&\geq M \left[|z_1 - z_2| + |z_3| \right] + m \cdot \min \left[|z_1 - z_3| + |z_2|, |z_1| + |z_2 - z_3| \right] = \\
&= \min \left[f_{D_a} (z_2, z_1, z_3), f_{D_a} (z_1, z_2, z_3) \right],
\end{aligned}$$

откуда, в силу обобщенной теоремы Симанзика, диаграмма D_6 мажорируется диаграммой D_a .

Диаграмма ж) (см. рис. 53) имеет норму $f_{D_{ж}}(z)$, равную

$$\begin{aligned}
f_{D_{ж}}(z) &= \min_x \left\{ M \left[|z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - z_2| + |z_3 - x_3| + |x_3 - x_4| + |x_4| \right] + \right. \\
&+ m \left. \left[|z_1 - x_3| + |x_1| + |x_2 - z_3| + |z_2 - x_4| \right] \right\} = \\
&= \min_x \left\{ (M - m) \left[|z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - z_2| + |z_3 - x_3| + |x_3 - x_4| + |x_4| \right] + \right. \\
&+ \frac{m}{2} \left. \left[\left(|z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - z_2| \right) + \left(|z_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + |x_4 - z_2| \right) \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (|x_1 - x_2| + |x_1| + |x_2 - x_3|) + (|x_3 - x_4| + |x_3 - x_4| + |x_4|) + \\
& + (|z_1 - x_1| + |x_1|) + (|z_2 - x_4| + |x_4|) + (|z_2 - x_2| + |x_2 - z_3|) + \\
& + (|z_1 - x_3| + |x_3 - z_3|) \Big\} \geq M \left[|z_1 - z_2| + |z_3| \right] + \\
& + \frac{m}{2} \left[|z_1| + |z_2| + |z_2 - z_3| + |z_1 - z_2| \right] \geq \\
& \geq \min \left[f_{\mathcal{A}_1} (z_1, z_2, z_3), f_{\mathcal{A}_2} (z_2, z_1, z_3) \right],
\end{aligned}$$

откуда, в силу обобщенной теоремы Симанзика, диаграмма \mathcal{A}_2 мажорируется диаграммой \mathcal{A}_1 .

21. Рассеяние мезона на нуклоне.

Согласно в 6 части I класс \mathcal{R}_0 примитивных диаграмм рассеяния мезона на нуклоне состоит из 14 диаграмм рис. 36. На основании теоремы Симанзика и ее обобщения в пункте 16а будет показано, что примитивные диаграммы в), г), ж), з), к), л) и о) этого рисунка мажорируются диаграммой а).

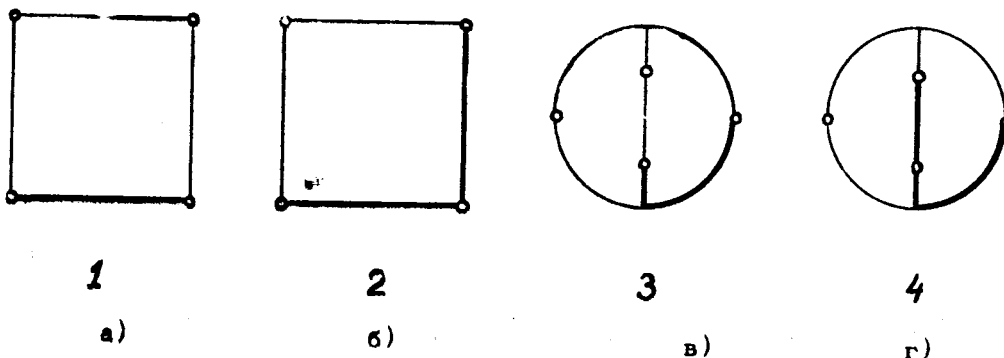


Рис. 54.

$$\text{т.е. } G_{\mathcal{R}} = G_{\mathcal{R}_0} = \prod_{\alpha=1}^4 M(\mathcal{A}_\alpha).$$

В пунктах 21б и 21в будет установлено, что диаграммы м) и и) мажорируются диаграммой д), а диаграмма н) мажорируется диаграммой е).

Таким образом, любая диаграмма рассеяния мезона на нуклоне из \mathcal{D} мажорируется хотя бы одной из следующих четырех диаграмм (см. рис. 54).

21а. Рассмотрим сначала диаграммы г), з), к), л) рис. 36. Диаграмма г) (см. рис. 55) имеет норму $f_{\mathcal{D}_2}$, равную

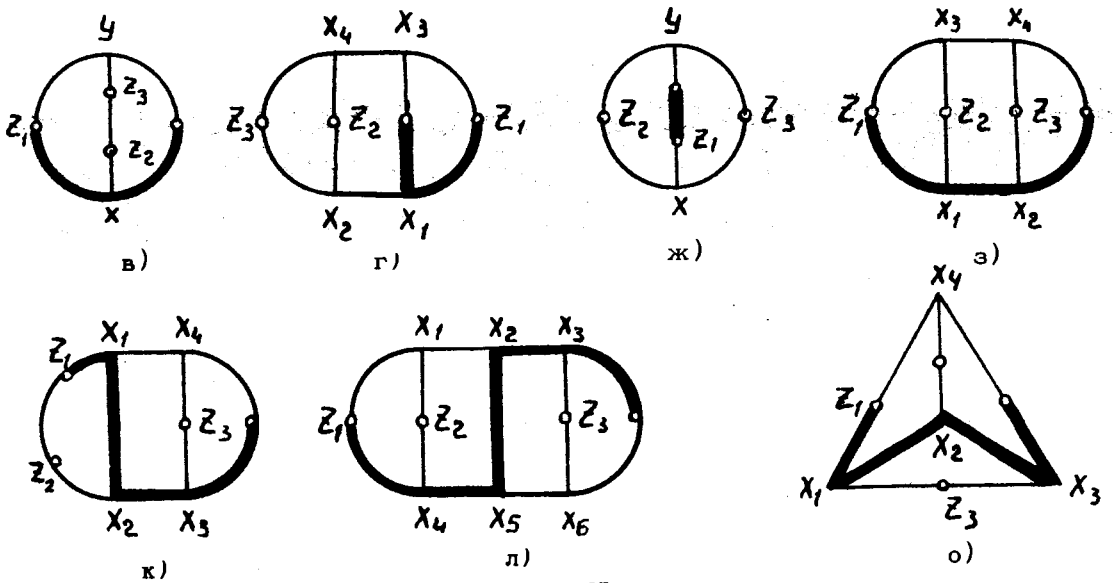


Рис. 55.

$$\begin{aligned}
 f_{\mathcal{D}_2}(\xi) &= \min_x \left\{ M \left[|\xi_1 - x_1| + |x_1| \right] + m \left[|\xi_1 - x_3| + |x_3| + |x_3 - x_4| + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. |x_1 - x_2| + |x_2 - \xi_2| + |\xi_2 - x_4| + |\xi_3 - x_2| + |x_4 - \xi_3| \right] \right\} = \\
 &= \min_x \left\{ (M - m) \left[|\xi_1 - x_1| + |x_1| \right] + m \left[\frac{1}{2} \left(|\xi_1 - x_1| + |x_1| + |\xi_1 - x_3| + |x_3| \right) + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{1}{2} \left(|\xi_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - \xi_2| + |\xi_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + |x_4 - \xi_2| \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left(|z_2 - x_2| + |x_2 - z_3| + |z_2 - x_4| + |x_4 - z_3| \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left(|z_3 - x_4| + |x_4 - x_3| + |x_3| + |z_3 - x_2| + |x_1 - x_2| + |x_2| \right) \Bigg\} \geq \\
& \geq f_{D_a} (z_1, z_2, z_3),
\end{aligned}$$

где

$$f_{D_a} (z_1, z_2, z_3) = M |z_1| + m \left[|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3| \right]; \quad (3.3)$$

отсюда следует, что диаграмма D_2 мажорируется диаграммой D_a . Диаграмма ε (см. рис. 55) имеет норму f_{D_3} , равную

$$\begin{aligned}
f_{D_3} (z) &= \min_x \left\{ M \left[|z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2| \right] + \right. \\
& + m \left[|z_1 - x_3| + |x_3 - z_2| + |z_2 - x_1| + |z_3 - x_2| + |z_3 - x_4| + |x_3 - x_4| + |x_4| \right] \Bigg\} \geq \\
& \geq \min_{x_1, x_2} (M - m) \left[|z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2| \right] + \\
& + m \cdot \min_{x_1, x_2} \left[\left(|z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2| \right) + \left(|z_1 - x_2| + |x_1 - z_2| \right) + \right. \\
& + \left. \left(|z_2 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - z_3| \right) + \left(|z_3 - x_2| + |x_2| \right) \right] \geq \\
& \geq f_{D_a} (z_1, z_2, z_3),
\end{aligned}$$

где $f_{\mathcal{D}_k}(\bar{z})$ определяется формулой (3.3).

Диаграмма k) (см. рис. 55) имеет норму $f_{\mathcal{D}_k}$, равную

$$\begin{aligned}
 f_{\mathcal{D}_k}(\bar{z}) &= \min_x \left\{ M \left[|z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3| \right] + \right. \\
 &+ m \left[|z_1 - z_2| + |z_2 - x_2| + |x_1 - x_4| + |z_3 - x_3| + |x_4 - z_3| + |x_4| \right] \left. \right\} \geq \\
 &\geq \min_x \left\{ (M - m) \left[|z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3| \right] + \right. \\
 &+ m \left[\frac{1}{2} \left(|z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3| + |z_1 - x_3| + |x_1 - x_4| + |x_4| \right) + \right. \\
 &+ \frac{1}{2} \left(|z_2 - x_2| + |x_1 - x_2| + |x_1 - x_4| + |x_4 - z_3| + |z_2 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - z_3| \right) + \\
 &\left. \left. + \frac{1}{2} \left(|z_3 - x_4| + |x_4| + |z_3 - x_3| + |x_3| \right) \right] \right\} \geq \\
 &\geq f_{\mathcal{D}_k}(z_1, z_2, z_3);
 \end{aligned}$$

отсюда следует, что диаграмма \mathcal{A}_k мажорируется диаграммой \mathcal{A}_a . Диаграмма л) (см. рис. 55) имеет норму $f_{\mathcal{A}_a}$, равную

$$\begin{aligned}
 f_{\mathcal{A}_a}(z) = \min_x \left\{ M \left[|z_1 - x_4| + |x_4 - x_5| + |x_5 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3| \right] + \right. \\
 + m \left[|z_1 - x_1| + |x_1 - z_2| + |x_4 - z_2| + |x_1 - x_2| + |x_5 - x_6| + |x_3 - z_3| + \right. \\
 \left. \left. + |x_6 - z_3| + |x_6| \right] \right\} \geq (M - m) \min_x \left[|z_1 - x_4| + |x_4 - x_5| + \right. \\
 \left. - |x_5 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3| \right] + m \cdot \min_x \left\{ \frac{1}{2} \left[|z_1 - x_4| + |x_4 - x_5| + \right. \right. \\
 \left. \left. + |x_5 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3| + |z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - x_5| + \right. \right. \\
 \left. \left. + |x_5 - x_6| + |x_6| \right] + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} \left[|z_1 - x_4| + |x_4 - z_2| + |z_1 - x_1| + |x_1 - z_2| \right] + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} \left[|z_2 - x_4| + |x_4 - x_5| + |x_5 - x_6| + |x_6 - z_3| + \right. \right. \\
 \left. \left. + |z_2 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - z_3| \right] + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} \left[|z_3 - x_6| + |x_6| + |z_3 - x_3| + |x_3| \right] \right\} \geq \\
 \geq f_{\mathcal{A}_a}(z_1, z_2, z_3);
 \end{aligned}$$

отсюда следует, что диаграмма \mathcal{D}_A мажорируется диаграммой \mathcal{D}_a . Рассмотрим теперь диаграммы в), ж) и о). Диаграмма в) (см. рис. 55) имеет норму $f_{\mathcal{D}_B}$, равную

$$\begin{aligned}
 f_{\mathcal{D}_B}(\bar{x}) &= \min_{x, y} \left\{ M \left[|\bar{x}_1 - x| + |x| \right] + m \left[|\bar{x}_2 - x| + |\bar{x}_2 - \bar{x}_3| + |\bar{x}_1 - y| + |y - \bar{x}_3| + |y| \right] \right\} \geq \\
 &\geq (M - m) \min_x \left[|\bar{x}_1 - x| + |x| \right] + m \cdot \min_{x, y} \left\{ \frac{1}{2} \left[|\bar{x}_1 - x| + |x| + |\bar{x}_1 - y| + |y| \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[|\bar{x}_1 - x| + |\bar{x}_2 - x| + |\bar{x}_1 - y| + |y - \bar{x}_3| \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[|\bar{x}_2 - x| + |x| + |\bar{x}_3 - y| + |y| \right] \right\} + m |\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \geq \\
 &\geq M |\bar{x}_1| + \frac{m}{2} \left[|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + |\bar{x}_1 - \bar{x}_3| + |\bar{x}_2| + |\bar{x}_3| \right] + m |\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \geq \\
 &\geq \min \left(f_{\mathcal{D}_a}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3), f_{\mathcal{D}_a}(\bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_2) \right);
 \end{aligned}$$

отсюда следует, в силу обобщенной теоремы Симанзика, что диаграмма \mathcal{D}_b мажорируется диаграммой \mathcal{D}_a .

Диаграмма ж) (см.рис. 55) имеет норму $f_{\mathcal{D}_{ж}}$, равную

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{D}_{ж}}(z) &= \min_{x,y} \left\{ M |z_1| + m \left[|z_1-x| + |x-z_2| + |x-z_3| + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |z_2-y| + |y| + |y-z_3| \right] \right\} \geq \\ &\geq M |z_1| + \frac{m}{2} \cdot \min_{x,y} \left[(|x-z_2| + |x-z_3|) + (|z_1-x| + |x-z_2|) + \right. \\ &\quad \left. (|z_1-x| + |x-z_3|) + (|z_2-y| + |y|) + (|y-z_3| + |y|) + \right. \\ &\quad \left. + (|z_2-y| + |y-z_3|) \right] \geq \min \left[f_{\mathcal{D}_a}(z_1, z_2, z_3), f_{\mathcal{D}_a}(z_1, z_3, z_2) \right], \end{aligned}$$

откуда следует, что диаграмма $\mathcal{D}_{ж}$ мажорируется диаграммой \mathcal{D}_a .

Диаграмма о) (см.рис. 55) имеет норму, $f_{\mathcal{D}_o}$, равную

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{D}_o}(z) &= \min_x \left\{ M \left[|z_1-x_1| + |x_1-x_2| + |x_2-x_3| + |x_3| \right] + \right. \\ &\quad \left. + m \left[|z_3-x_1| + |x_3-z_3| + |z_1-x_1| + |z_2-x_2| + |z_2-x_1| + |x_1| \right] \right\} \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \min_x (M-m) \left[|z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3| \right] + \\
&+ m \cdot \min_x \left\{ \frac{1}{2} \left[|z_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3| + |z_1 - x_4| + |x_4| \right] + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left[|z_2 - x_2| + |x_2 - x_1| + |x_1 - z_3| + |z_2 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - z_3| \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \left[|z_1 - x_4| + |x_4 - z_2| \right] + \frac{1}{2} \left[|z_2 - x_4| + |x_4| \right] + \\
&+ \left. \frac{1}{2} \left[|x_3| + |z_3 - x_3| \right] + \frac{1}{2} \left[|z_1 - x_1| + |x_1 - z_3| \right] \right\} \geq \\
&\geq M |z_1| + m |z_2 - z_3| + \frac{m}{2} \left[|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_2| + |z_3| \right] \geq \\
&\geq \min \left[f_{\mathcal{D}_a} (z_1, z_2, z_3), f_{\mathcal{D}_a} (z_1, z_3, z_2) \right],
\end{aligned}$$

откуда следует, что диаграмма \mathcal{D}_0 мажорируется диаграммой \mathcal{D}_a .

216. Рассмотрим теперь диаграммы м) и н) рис. 36. Заметим, что в этих диаграммах имеется часть, изображенная на рис. 56а). Докажем следующую лемму

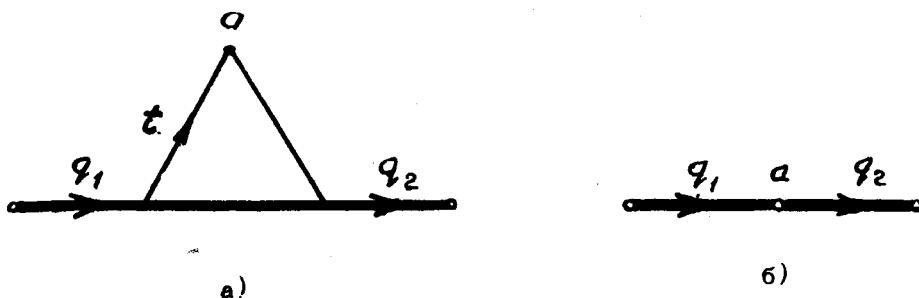


Рис. 56.

Лемма 4. Если в диаграмме \mathcal{D}' имеется часть, изображенная на рис. 56а), то область $G(\mathcal{D}')$ этой диаграммы содержит пересечение областей $\rho^2 < 4m^2$ и $G(\mathcal{D})$, где ρ - внешний импульс в узле a , \mathcal{D} - диаграмма, получающаяся из \mathcal{D}' заменой части, изображенной на рис. 56а), частью, изображенной на рис. 56б).

Доказательство. Форма $K_{\mathcal{D}'}$ (см. часть I (1.4)) может быть записана в виде

$$K_{\mathcal{D}'} = \alpha_1' (q_1^2 - M^2) + \alpha_2' (q_2^2 - M^2) + \alpha [(t + q_1)^2 - M^2] + \beta_1 (t^2 - m^2) + \beta_2 [(t - \rho)^2 - m^2] + \sum \gamma_r' (k_r^2 - m_r^2). \quad (3.4)$$

Полагая $t = \frac{\rho}{2}$, при $\rho^2 < 4m^2$ имеем

$$K_{\mathcal{D}'} \leq \alpha_1' (q_1^2 - M^2) + \alpha_2' (q_2^2 - M^2) + \alpha \left[\left(q_1 + \frac{\rho}{2} \right)^2 - M^2 \right] + \sum \gamma_r' (k_r^2 - m_r^2).$$

Так как

$$\left(q_1 + \frac{\rho}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} (q_2 + \rho)^2 + \frac{1}{2} q_1^2 - \frac{1}{4} \rho^2, \quad q_1 + \rho = q_2,$$

то

$$\left(q_1 + \frac{P}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2)$$

и

$$K_{\mathcal{D}'} \leq \alpha_1 (q_1^2 - M^2) + \alpha_2 (q_2^2 - M^2) + \sum' \beta_r (k_r^2 - m_r^2) = K_{\mathcal{D}}, \quad (3.5)$$

где

$$\alpha_1 = \alpha_1' + \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha_2 = \alpha_2' + \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда в силу леммы 1) (см. часть I, пункт 10) следует, что при $\rho^2 < 4m^2$

$$Q_{\mathcal{D}'} \leq Q_{\mathcal{D}}, \quad (3.6)$$

что и требовалось доказать.

Применяя доказанную лемму к диаграммам м) и н) рис. 36 находим, что диаграмма м) мажорируется диаграммой д), а диаграмма н)-диаграммой е), а именно,

$$G(\mathcal{D}_m) \geq H(\mathcal{D}_d), \quad G(\mathcal{D}_n) \geq H(\mathcal{D}_e). \quad (3.7)$$

Условие $\rho^2 < 4m^2$ автоматически учитывается, в силу пункта 7 части I, при изменении нумерации мезонных узлов в диаграммах д) и е).

21в. Рассмотрим, наконец, диаграмму и) рис. 36. В этой диаграмме имеется часть, изображенная на рис. 57 а)

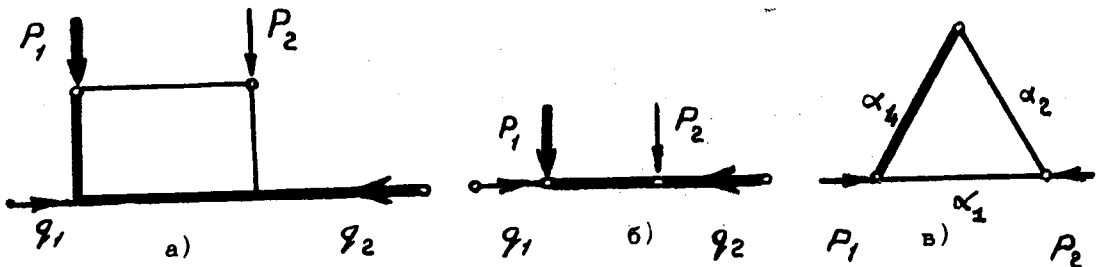


Рис. 57

Докажем следующую лемму.

Лемма 5. Если в диаграмме \mathcal{D}' имеется часть, изображенная на рис. 57а), то область $G(\mathcal{D}')$ этой диаграммы содержит пересечение области $G(\mathcal{D})$ диаграммы \mathcal{D} , полученной из \mathcal{D}' заменой части а) частью б) рис. 57, и области $G(\Delta)$ треугольной диаграммы, изображенной на рис. 57 в).

Доказательство. Форма $K_{\mathcal{D}'}$ диаграммы \mathcal{D}' после взятия минимума относительно независимого внутреннего импульса на контуре части а) рис. 57 равна

$$\bar{K}_{\mathcal{D}'} = \frac{d_1 d_2 p_2^2 + d_1 d_3 (p_1 + q_1)^2 + d_1 d_4 p_1^2 + d_2 d_3 q_2^2 + d_2 d_4 (p_1 + p_2)^2 + d_3 d_4 q_1^2}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}$$

$$- (d_1 + d_2) m^2 - (d_3 + d_4) M^2 + \beta'_1 (q_1^2 - m^2) + \beta'_2 (q_2^2 - M^2) + \sum' \gamma'_r (k_r^2 - m_r^2).$$

Положив

$$\beta_1 = \beta'_1 + \frac{d_3 d_4}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}, \quad \beta_2 = \beta'_2 + \frac{d_2 d_3}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}, \quad \beta = \frac{d_1 d_3}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4},$$

запишем $\bar{K}_{\mathcal{D}'}$ в виде

$$\bar{K}_{\mathcal{D}'} = K_{\mathcal{D}} + \beta \frac{d_1 + d_2 + d_4}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} - \frac{d_3 \left\{ (d_1 + d_2) m^2 + d_3 M^2 + d_4 (2M^2 - m^2) \right\}}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}, \quad (3.8)$$

где $K_{\mathcal{D}}$ - форма диаграммы \mathcal{D} , полученной из \mathcal{D}' заменой части а) частью б) рис. 57:

$$K_{\mathcal{D}} = \beta_1 (q_1^2 - m^2) + \beta \left[(p_1 + q_1)^2 - M^2 \right] + \beta_2 (q_2^2 - M^2) + \sum' \gamma_r (k_r^2 - m_r^2);$$

Q_{Δ} - квадратичная форма диаграммы, изображенной на рис. 57 в):

$$Q_{\Delta} = \frac{d_1 d_2 p_2^2 + d_1 d_4 p_1^2 + d_2 d_4 (p_1 + p_2)^2}{d_1 + d_2 + d_4} - (d_1 + d_2) m^2 - d_4 M^2.$$

Из леммы 1 и формулы (3.8) следует, что при $Q_\Delta < 0$

$$Q_{D'} \leq Q_D,$$

что и требовалось доказать.

Применяя доказанную лемму к диаграмме и) рис. 36, находим, что она мажорируется диаграммой д) этого рисунка, а именно

$$G(D_u) \geq H(D_g). \quad (3.9)$$

В самом деле, в данном случае после замены в диаграмме D_u части а) частью б) рис. 57 мы получаем диаграмму D_g (см.рис. 58 а)). Изменение нумерации мезонных импульсов

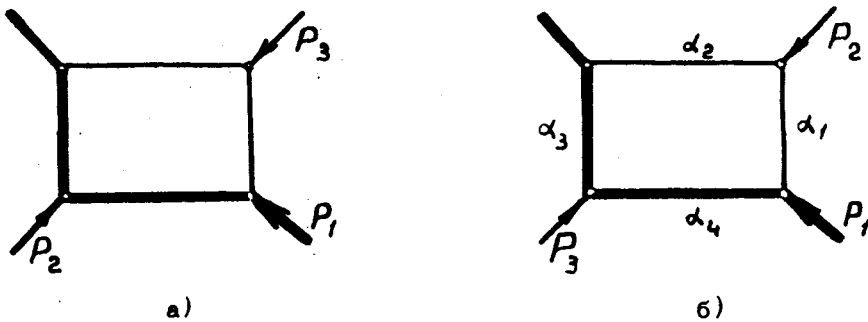


Рис. 58.

в диаграмме рис. 58 а) приводит к диаграмме рис. 58 б). Полагая $\alpha_3 = 0$ в форме G диаграммы рис. 58 б), мы получаем форму треугольной диаграммы рис. 57 в).

Таким образом, область $\tilde{G}(\Delta)$ этой треугольной диаграммы содержит область G диаграммы рис. 58 б), а, следовательно, справедливо (3.9).

В заключение выражаем глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову за интерес к работе и ценные замечания. Мы глубоко благодарны А.Н.Тавхелидзе, в сотрудничестве с которым получен ряд результатов работы.

Л и т е р а т у р а

1. R.Jost, Helvetica Phys.Acta, 31 (1958) 263.
2. H.J.Bremermann, R.Oehme and J.G.Taylor, Phys.Rev. 109 (1958) 2178.
R.Oehme and J.G.Taylor, Phys.Rev.113, (1959) 371.
3. И.Тодоров Препринт ОИЯИ, Р-464 (1959); Nuclear Physics, 18 (1960) 521.
4. Y.Nambu, Nuovo Cimento, 6 (1957) 1064; 9 (1958) 610.
5. K.Symanzik, Prog.Theor.Phys. 20 (1958) 690.
6. R.Karplus, Ch.Sommerfield and E.Wichman, Phys.Rev.111 (1958) 1187; 114 (1959) 376.
7. N.Nakanishi, Prog.Theor.Phys. 21 (1959) 135.
8. N.Nakanishi, Prog.Theor.Phys. 22 (1959) 128.
9. J.Mathews, Phys.Rev. 113 (1959) 381.
10. Л.Д.Ландау, ЖЭТФ, 37, (1959) 62.
11. J.C.Taylor, Phys.Rev. 117 (1960) 261.
12. R.Oehme, Nuovo Cimento, 13 (1959) 778.
13. N.N.Bogolubov and O.S.Parasiuk, "Über die Multiplikation der Kausal- funktionen in der Quantetheorie der Felder", Acta mathematica, B.97 (1957) 227-266.
О.С.Парасюк, Известия АН СССР (серия математическая) (в печати).
14. В.С.Владимиров и А.А.Логунов, Изв.АН СССР, серия математическая, 23, (1959) 661.
15. П.С.Александров . "Комбинаторная топология". М.-Л. 195 1947.
16. А.В.Канторович и Г.П.Акилов, "Функциональный анализ в нормированных пространствах", Москва, 1958 .
17. А.А. Логунов, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодоров и Н.А.Черников, ДАН (в печати).