

367

4-52

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



Чжу Хун-юань

Д - 584

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ
ДЛЯ ПИОН-НУКЛОННОГО РАССЕЯНИЯ
ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

ЖЭТФ, 1961, т.40, в.1, с.227-236.

Дубна 1980 год

Д - 564

Чжу Хун-юань

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ
ДЛЯ ПИОН-НУКЛОННОГО РАССЕЯНИЯ
ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

920/9 48

А н н о т а ц и я

Исходя из дисперсионных соотношений для рассеяния вперед и назад и условия унитарности, получена система связанных интегральных уравнений для амплитуд S и P волн пион-нуклонного рассеяния при низких энергиях. Учитывается вклад от разреза в нефизической области без использования аналитического продолжения разложения Лежандра. В интегральных уравнениях появляются амплитуды реакций $N-\bar{N}$ аннигиляции, они явно связаны с эффектом $\pi-\pi$ -взаимодействия.

В в е д е н и е

Недавно Чу и др.¹⁻³ сделали новую попытку решить проблемы сильного взаимодействия при низких энергиях, основываясь на двухмерном дисперсионном соотношении, предложенном Мандельштамом⁴⁻⁶. Интегральное уравнение, впервые данное Мандельштамом, включает две непрерывные независимые переменные, с которыми трудно оперировать математически. Теория Мандельштама основана на предположении, что только двухчастичные промежуточные состояния дают значительные вклады в условия унитарности. Это предположение законно только для явлений, происходящих при низких энергиях. Поэтому удобно подвергнуть интегральное уравнение некоторому преобразованию, которое переводит обе непрерывные независимые переменные, а именно, энергию и передачу импульса, соответственно, в одну непрерывную и одну дискретную переменные, такие как энергия и момент количества движения. Так как только состояния с небольшим моментом количества движения существенны в явлениях при низкой энергии, то можно пренебречь всеми амплитудами, с большим моментом количества движения в соответствии с приближением, уже сделанным относительно условий унитарности. Интегральное уравнение Мандельштама с двумя независимыми переменными, таким образом, преобразуется в конечную систему зацепляющихся интегральных уравнений с одной независимой переменной, с которой удобнее оперировать математически.

В работах, названных выше¹⁻³, дисперсионные соотношения для парциальных волновых амплитуд легко вписаны. Однако, условия унитарности в нефизической области получены путем аналитического продолжения разложения Лежандра, которое теряет свою силу на границе спектральных функций. Как раз вблизи границы спектральных функций имеется большая область, которая одинаково удалена от физической области и от границы спектральных функций. Вопрос о том, можно ли пренебречь в этой области более высокими парциальными волнами в разложении Лежандра, находится под сомнением. Вклад в интегральное уравнение от разреза в нефизической области представлен поэтому не так точно, как вклад от разреза в физической области.

В особенно неблагоприятном положении находится проблема $\pi-N$ -р рассеяния, когда граница спектральных функций находится совсем недалеко от физи-

ческой области. С помощью двухмерного дисперсионного соотношения и граничных спектральных функций, данных Мандельштамом^{/6/}, можно показать, что разложение Лежандра теряет силу при $k^2 = 14,5$ k - импульс π - мезона в системе центра масс. Масса π - мезона принимается за единицу. Пренебрежение более высокими парциальными волнами может быть оправдано только при еще более низком пределе. С другой стороны, в физической области обрезание нужно провести при больших значениях импульса, чтобы найти правильное положение /3.3/ резонансной энергии. В то время как поведение /3.3/ амплитуды зависит в основном от вклада от разреза в физической области, влияние вклада от разреза в нефизической области на другие амплитуды существенно. Поэтому интересно получить интегральные уравнения так, чтобы ошибки, вызванные приближениями, были бы уменьшены и более равномерно распределены между физической и нефизической областями и чтобы вклад от разреза в нефизической области был бы учтен более точно.

В данной работе, используя дисперсионные соотношения для рассеяния вперед и назад и условия унитарности, мы получили систему связанных интегральных уравнений для амплитуд S и P волн пион-нуклонного рассеяния при низких энергиях. Дисперсионные соотношения для рассеяния вперед и назад имеют то преимущество, что амплитуды рассеяния в нефизической области могут быть выражены прямо через $\pi-N$ амплитуды кроссинг реакций без использования аналитического продолжения. При этом не возникает проблемы нарушения разложения Лежандра. Очень возможно, что интегральные уравнения учтут вклад от разреза в нефизической области более точно. Дисперсионное соотношение для рассеяния назад вводит амплитуды реакции аннигиляции $N + \bar{N} \rightarrow \pi + \pi$ в интегральные уравнения и учитывает этим самым влияние $\pi-\pi$ - взаимодействия. С другой стороны полученные интегральные уравнения должны быть решены одновременно с интегральными уравнениями для $N-\bar{N}$ аннигиляции. Этот метод может быть легко распространен на другие проблемы сильного взаимодействия. Совсем недавно Ефремов, Мещеряков и Ширков^{7/} получили интересную совокупность интегральных уравнений для $\pi-N$ рассеяния в предположении, что $N-\bar{N}$ аннигиляция протекает в области низких энергий преимущественно через S и P состояния. Они также использовали преимущество дисперсионного соотношения для рассеяния назад /8/. Их совокупность инте-

гральных уравнений имеет интересную особенность: она может быть решена без знания амплитуд $N - \tilde{V}$ аннигиляции, если даны сдвиги $\pi - \pi$ -рассеяния. Интегральное уравнение, полученное в настоящей работе, пригодно для случая, когда реальной частью состояний с более высоким моментом количества движения не пренебрегается по сравнению с S и P состояниями $N - \tilde{N}$ аннигиляции.

Во втором разделе настоящей работы обсуждаются особенности парциальных амплитуд и область справедливости разложения Лежандра. В третьем разделе выписаны дисперсионные соотношения для рассеяния вперед и назад. Приводится связь между амплитудами S и P волн с одной стороны и амплитудами рассеяния вперед и назад - с другой стороны. В четвертом разделе выводятся интегральные уравнения для амплитуд S и P - волн. Полученные результаты сравниваются с результатами Чу, Гольдбергера, Лоу и Намбу^{9/}.

2. Область справедливости разложения Лежандра

Положение особенностей и разрывов парциальных амплитуд изучалось М. Дауэлом^{10/}. Для изучения области справедливости разложения Лежандра более целесообразно дать местонахождение особенностей двухмерного представления так, чтобы их относительные положения относительно границ спектральных функций легко наблюдались. Обозначения, использованные в данной работе, являются стандартными. Однако, для удобства они рассматриваются в следующем параграфе.

Как известно, три следующих процесса

$$I. \quad \pi(p_1, \alpha) + N(p_3) \rightarrow \pi(-p_2, \beta) + N(-p_4)$$

$$II. \quad \pi(p_2, \beta) + N(p_3) \rightarrow \pi(-p_1, \alpha) + N(-p_4)$$

$$III. \quad N(p_3) + \tilde{N}(p_4) \rightarrow \pi(-p_1, \alpha) + \pi(-p_2, \beta)$$

описываются одной функцией Грина. Здесь π π -мезон, тогда как N и \tilde{N} нуклон и антинуклон соответственно. p внутри скобок обозначают соответствующие 4-векторы импульса; α и β индексы изотопического спина. В импульсном представлении функция Грина

$$T = \delta_{\beta\alpha} \left\{ -A^+(s, \bar{s}, t) + \frac{i}{2} (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) B^+(s, \bar{s}, t) \right\} + \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha] \left\{ -A^-(s, \bar{s}, t) + \frac{i}{2} (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) B^-(s, \bar{s}, t) \right\}, \quad /2/$$

где

$$\begin{aligned} s &= -(p_1 + p_3)^2 = -(p_2 + p_4)^2 \\ \bar{s} &= -(p_1 + p_4)^2 = -(p_2 + p_3)^2 \\ t &= -(p_1 + p_2)^2 = -(p_3 + p_4)^2 \end{aligned} \quad /3/$$

$$s + \bar{s} + t = 2m^2 + 2.$$

Только две из трех переменных s , \bar{s} , t независимы. m обозначает здесь массу нуклона. Инвариантные функции A^\pm и B^\pm удовлетворяют следующим кроссинг соотношениям

$$\begin{aligned} A^\pm(s, \bar{s}, t) &= \pm A^\pm(\bar{s}, s, t) \\ B^\pm(s, \bar{s}, t) &= \mp B^\pm(\bar{s}, s, t). \end{aligned} \quad /4/$$

По Мандельштаму ^{4/} они также удовлетворяют следующим двумерным дисперсионным соотношениям:

$$A^{\pm}(s, \bar{s}, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \int_{(m+1)^2}^{\infty} d\bar{s}' \frac{a_{12}^{\pm}(s', \bar{s}')}{(s'-s)(\bar{s}'-\bar{s})} +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \int_4^{\infty} dt' \frac{a_{13}^{\pm}(s', t')}{(s'-s)(t'-t)} + \frac{1}{\pi^2} \int_{(m+1)^2}^{\infty} d\bar{s}' \int_4^{\infty} dt' \frac{a_{23}^{\pm}(\bar{s}', t')}{(\bar{s}'-\bar{s})(t'-t)}$$

$$B^{\pm}(s, \bar{s}, t) = \frac{g^2}{m^2-s} \mp \frac{g^2}{m^2-\bar{s}} + \frac{1}{\pi^2} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \int_{(m+1)^2}^{\infty} d\bar{s}' \frac{b_{12}^{\pm}(s', \bar{s}')}{(s'-s)(\bar{s}'-\bar{s})} /5/$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \int_4^{\infty} dt' \frac{b_{13}^{\pm}(s', t')}{(s'-s)(t'-t)} + \frac{1}{\pi^2} \int_{(m+1)^2}^{\infty} d\bar{s}' \int_4^{\infty} dt' \frac{b_{23}^{\pm}(\bar{s}', t')}{(\bar{s}'-\bar{s})(t'-t)}$$

a^{\pm} и b^{\pm} - спектральные функции. g - ренормализованная рационализованная константа π - N связи. Для удобства рассмотрения мы вводим следующие переменные в с.ц.м. k и ϕ импульс и угол рассеяния реакции 1 , \bar{k} и $\bar{\phi}$ импульс и угол рассеяния реакции 11 . p , q и θ импульс нуклона и антинуклона, импульс π -мезона и угол рассеяния реакции $\bar{1}11$ соответственно. Тогда для реакции $\bar{1}$ имеют место следующие соотношения:

$$s = m^2 + 1 + 2k^2 + 2\sqrt{(m^2+k^2)(1+k^2)}$$

$$\bar{s} = m^2 + 1 - 2k^2 - 2\sqrt{(m^2+k^2)(1+k^2)}$$

$$t = -2k^2(1-x), \quad x \equiv \cos \phi.$$

Соответствующие соотношения для реакции $\overline{11}$ имеют вид:

$$s = m^2 + 1 - 2\bar{k}^2 \bar{x} - 2\sqrt{(m^2 + \bar{k}^2)(1 + \bar{k}^2)}$$

$$\bar{s} = m^2 + 1 + 2\bar{k}^2 + 2\sqrt{(m^2 + \bar{k}^2)(1 + \bar{k}^2)} \quad /7/$$

$$t = -2\bar{k}^2(1 - \bar{x}), \quad \bar{x} \equiv \cos \bar{\phi}$$

Соответствующие соотношения для реакции $\overline{111}$ имеют вид:

$$s = -p^2 - q^2 + 2pqz$$

$$\bar{s} = -p^2 - q^2 - 2pqz \quad /8/$$

$$t = 4(m^2 + p^2) = 4(1 + q^2)$$

$$z \equiv \cos \theta$$

Физическая область реакции $\overline{1}$ представлена областью $\overline{1}$ на рис. 1 а. Она ограничена условиями $s \geq (m+1)^2$, $-1 \leq x \leq 1$. Она поэтому находится справа от прямой $s = (m+1)^2$ и лежит между границами.

$$t = 0, \quad \bar{s}s = (m^2 - 1)^2 \quad /9/$$

Физическая область реакции $\overline{11}$ обозначена как $\overline{11}$ на рис. 1а. Она ограничена условиями $\bar{s} \geq (m+1)^2$, $-1 \leq \bar{x} \leq 1$. Она также лежит между границами /9/, но находится слева от прямой $\bar{s} = (m+1)^2$. Физическая область реакции $\overline{111}$ обозначена как $\overline{111}$ на рис. 1а. Она ограничена условиями $t \geq 4m^2$ и $-1 \leq z \leq 1$. Ее нижней границей поэтому является та часть кривой

$$\bar{s}s = (m^2 - 1)^2, \quad /10/$$

которая лежит над прямой $t = 4m^2$.

Прямая $t = 0$ связывает рассеяние вперед реакции 1 с рассеянием вперед реакции 11, кривая $\bar{s}s = (m^2 - 1)^2$, соединяя рассеяние назад реакции 1 с рассеянием назад реакции 11, соединяет также рассеяние назад реакции 1 с рассеянием вперед и назад реакции 111. При $t \geq 4m^2$ и $t \leq 4$ уравнение $\bar{s}s = (m^2 - 1)^2$ описывает две ветви одной гиперболы, приведенной на рис. 1а. При $4 \leq t \leq 4m^2$, s и \bar{s} становятся комплексными, уравнение описывает эллипс, касающийся гиперболы на обоих концах. Этот эллипс представлен на рис. 1 с.

Граница спектральных функций представлена схематически пунктиром на рис. 1а. Область, в которой a_{12}^{\pm} , b_{12}^{\pm} не равны нулю, отмечена 12, а области, соответствующие a_{13}^{\pm} , b_{13}^{\pm} и a_{23}^{\pm} , b_{23}^{\pm} , отмечены 13 и 23 соответственно.

Особенности парциальных волновых амплитуд реакции 1 возникают из 2-х источников. Первый источник - функциональная зависимость \bar{s} , t от s , x . Из /6/ следует

$$k^2 = \frac{1}{4s} \{s - (m+1)^2\} \{s - (m-1)^2\}. \quad /11/$$

Она дает особенность при $s = 0$, которая является одной из асимптот гиперболы $\bar{s}s = (m^2 - 1)^2$. Из рис. 1а видно, что один конец этой асимптоты приближается к границе рассеяния назад реакции 11, в то время как другой приближается к границе рассеяния вперед реакции 111.

Второй источник особенностей - обращение в нуль различных знаменателей в дисперсионных соотношениях /5/. Обращение в нуль знаменателя $\frac{1}{s' - s}$ приводит в области особенностей, лежащих справа от прямой $s = (m+1)^2$. Она обозначена через a на рис. 1б и тождественна со всей физической областью реакции 1. Особенность, возникающая от первого полюсного члена $g^2/(m^2 - s)$ обозначена b на рис. 1б. Она представляет собой небольшой отрезок линии $s = m^2$. Область особенностей, возникающая от обращения в нуль знаменателя $\frac{1}{\bar{s}' - \bar{s}}$, расположена слева от прямой $\bar{s} = (m+1)^2$. Она состоит из 2-х частей, обозначенных через c и d соответственно на рис. 1б. c - часть физической области реакции 11, но d лежит полностью в нефизической области. Ее большая часть покрыта площадью, где спектральные функции

a_{23}^{\pm} и b_{23}^{\pm} не обращаются в нуль, а разложение Лежандра теряет силу. Особенности, возникающие от второго полюсного члена $\bar{f} g^2 / (m^2 - \bar{s})$, также состоят из 2-х частей, обозначенных через e и f на рис. 1б. Область особенностей, возникающих от обращения в нуль знаменателя $\frac{1}{t'-t}$ представлена на рис. 1с. Она состоит из 2-х частей g и h . g - часть поверхности цилиндра

$$S^* S = (m^2 - 1)^2,$$

/12/

один конец которой ограничен $t = 4$, тогда как другой ограничен вышеуказанным эллипсом $\bar{S} S = (m^2 - 1)^2$. Имеется большая часть поверхности цилиндра, где разложение Лежандра теряет силу в результате ограничения со стороны спектральных функций a_{23}^{\pm} и b_{23}^{\pm} . Область h ограничена границей $t = 4$, $S = 0$ и верхней ветвью гиперболы $\bar{S} S = (m^2 - 1)^2$. Большая часть области h покрыта площадью, где a_{23}^{\pm} и b_{23}^{\pm} не обращаются в нуль, а разложение Лежандра теряет силу.

Особенности и разрезы парциальных волновых амплитуд реакции 1 б комплексной S -плоскости могут быть получены путем проектирования рис. 1в и 1с на комплексную S -плоскость. Они представлены на рис. 2. Соответствие между рис. 2 и рис. 1б, 1с очевидно и не нуждается в объяснении.

Наиболее жесткое ограничение на справедливость разложения Лежандра имеет место на разрезе g рис. 2, который соответствует поверхности цилиндра g на рис. 1с. Мнимые части инвариантных амплитуд рассеяния на g должны быть получены путем аналитического продолжения разложения Лежандра амплитуд реакции 111. По теореме Хайне^{11/} областью справедливости разложения при фиксированном t является внутренняя часть эллипса, который в дальнейшем будем называть эллипсом Леманна, чтобы не спутать его с эллипсом $\bar{S} S = (m^2 - 1)^2$. Эллипс Лемана проходит через границу спектральных функций и имеет фокусы при $z \equiv \cos \theta = \pm 1$, которые лежат на кривой $\bar{S} S = (m^2 - 1)^2$, как показано выше. Простые расчеты дают уравнение для эллипса Леманна в области $4 \leq t \leq 4m^2$

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\eta^2} = 1,$$

/13/

где

$$x = \operatorname{Im} S, \quad y = m^2 + 1 - \frac{t}{2} - \operatorname{Re} S$$

$$\xi^2 = \eta^2 - 4p^2q^2, \quad \eta = \bar{S}_0(t) + \frac{t}{2} - m^2 - 1. \quad /14/$$

Здесь $\bar{S}_0(t)$ — граница спектральных функций a_{23}^{\pm} и b_{23}^{\pm} . Уравнение /13/ для поверхности цилиндра может быть переписано следующим образом:

$$x^2 + \left(y + \frac{t}{2} - m^2 - 1\right)^2 = (m^2 - 1)^2. \quad /15/$$

Граница области справедливости разложения Лежандра мнимых частей инвариантных амплитуд рассеяния определяется пересечением эллипса Леманна с поверхностью цилиндра, который может быть получен путем решения уравнений /13/, /15/ с использованием границы спектральных функций Мандельстама.

Наибольшие ограничения вносит точка $\phi = 54^\circ$, $t = 12$, $k^2 = -14,5$, которая является ближайшей к физической области точкой границы.

Несомненно, область справедливости разложения Лежандра для действительной части инвариантных функций рассеяния много уже, как отмечено Леманном^{12/}. Она не определяется границей спектральных функций, а определяется нижним пределом интегрирования по $d\bar{S}'$ в /5/. По переменной k^2 граница начинается от $k^2 = -2,36$. Отметим, что она подходит к физической области значительно ближе, чем граница разложения мнимых частей инвариантных функций.

111. Дисперсионные соотношения для рассеяния вперед и назад

Дисперсионные соотношения для парциальных амплитуд пион-нуклонного рассеяния были выписаны М.Дауэлом^{10/}. Вместе с условием унитарности они могут быть использованы как интегральные уравнения для $\pi-N$ -рассеяния после свершения соответствующего аналитического продолжения. Рассмотрение предыдущего раздела показывает, однако, что интегральные уравнения, полученные таким образом, некорректны в результате того, что разложение Лежандра рано теряет силу. С другой стороны, можно ожидать, что парциальные волны, отличные от волны в /3.3/, определяются вкладом нефизической области. Поэтому интересно исследовать возможность избежания этой трудности.

Предыдущие рассуждения также показывают, что граница области справедливости разложения Лежандра изменяется для различных углов рассеяния. Для рассеяния вперед дисперсионный интеграл берется по линии $t = 0$. Амплитуды рассеяния реакции 1 в нефизической области непосредственно связаны с амплитудами реакции 11 в физической области $\bar{x} \equiv \cos \bar{\phi} = 1$. Таким образом, не требуется аналитического продолжения. Для рассеяния назад дисперсионный интеграл берется по кривой $\bar{s} s = (m^2 - 1)^2$. Кроме того, будучи связанными с рассеянием назад реакции 11 в физической области, амплитуды рассеяния реакции 1 в нефизической области также непосредственно связаны с амплитудами реакции 111 при $x \equiv \cos \theta = \pm 1$. Если условие унитарности для реакции 111 аналитически продолжено в область $4 \leq t \leq 4m^2$, как это показано Мандельштамом^{13/}, то также не требуется дальнейшего аналитического продолжения в этом случае. Наиболее неблагоприятный случай имеет место при $\phi = 54^\circ$, так как разложение Лежандра теряет силу при $k^2 = -14,5$. Для π -N рассеяния при низких энергиях из эксперимента известно, что только небольшое количество состояний момента количества движения существенно, тогда как все другие состояния малы. Для определения этого небольшого количества амплитуд рассеяния необходимы только дисперсионные соотношения для небольшого количества углов. Эти углы могут быть выбраны таким образом, что разложение Лежандра будет терять силу только в удаленных областях. В самом деле, в области энергий, где волны, отличные от волн S и P, несущественны, необходимы только дисперсионные соотношения для двух различных углов. Очевидный выбор падает тогда на $\phi = 180^\circ$ и $\phi = 0^\circ$. Полученные интегральные уравнения, вероятно, будут учитывать вклад от нефизической области более точно.

Используя больше дисперсионных соотношений при других углах мы можем учесть больше волн. Для случая π -N рассеяния полезно выбрать углы, близкие к 180° , так как худший угол для разложения Лежандра $\phi = 54^\circ$, который близок нулю. Недавно Ефремов, Мещеряков и Ширков^{7/} получили интересную совокупность интегральных уравнений для π -N рассеяния, которые учитывают эффект π - π взаимодействия, но в которой не появляются амплитуды реакции 111. Кроме того, предположив, что реакция в области низких энергий протекает преимущественно через S и P волны, они также использовали преимущество дисперсионного соотношения для угла рассеяния близкого к 180° ^{18/}.

Дисперсионные соотношения для рассеяния вперед хорошо известны. Они имеют вид:

$$A^{\pm}(s, \cos \phi = 1) = \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \left\{ \frac{1}{s'-s} \pm \frac{1}{s'-\bar{s}_+} \right\} A_1^{\pm}(s'; 1) \quad /16/$$

$$B^{\pm}(s, 1) = \frac{g^2}{m^2-s} \mp \frac{g^2}{m^2-\bar{s}_+} + \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \left\{ \frac{1}{s'-s} \mp \frac{1}{s'-\bar{s}_+} \right\} B_1^{\pm}(s'; 1).$$

A_1^{\pm} и B_1^{\pm} определены в работе Мандельштама^{4/}, которые совпадают с мнимыми частями A^{\pm} и B^{\pm} в физической области реакции $1. \bar{s}_+$ определяется как

$$\bar{s}_+ \equiv 2m^2 + 2 - s. \quad /17/$$

Мы можем также прямо выписать дисперсионные соотношения для рассеяния назад. Положение особенностей и разрезов дано на рис. 1 и 2. Прежде всего выделяются полюсные члены. Контур интегрирования выбран как, показано на рис. 3. Дисперсионные соотношения для рассеяния назад имеют вид:

$$A^{\pm}(s, \cos \phi = -1) = \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \frac{A_1^{\pm}(s'; -1)}{s'-s} - \frac{1}{\pi} \int_0^{(m-1)^2} ds' \frac{A_2^{\pm}(s'; -1)}{s'-s} \quad /18/$$

$$- \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{g_+} + \int_{g_-} - \int_{-m^2+1}^0 + \int_{-\infty}^{-m^2+1} \right\} ds' \frac{A_3^{\pm}(s'; -1)}{s'-s}$$

$$B^{\pm}(s, -1) = \frac{g^2}{m^2 - s} \mp \frac{g^2}{m^2 - \bar{s}_-} + \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \frac{B_1^{\pm}(s', -1)}{s' - s}$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{(m-1)^2} ds' \frac{B_2^{\pm}(s', -1)}{s' - s} - \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{g_+} + \int_{g_-} - \int_{-m^2+1}^0 + \int_{-\infty}^{-m^2+1} \right\} ds' \frac{B_3^{\pm}(s', -1)}{s' - s}$$

A_2^{\pm}, B_2^{\pm} и A_3^{\pm}, B_3^{\pm} даны также в работе Мандельштама. Они совпадают с минимальными частями A^{\pm}, B^{\pm} в физической области реакции 11 и 111 соответственно. Контур g_+ является полукругом верхней полуплоскости, обходимым по часовой стрелке, тогда как контур g_- - полукругом нижней полуплоскости, обходимым против часовой стрелки, как показано на рис.3. \bar{s}_- - определяется следующим образом

$$\bar{s}_- \equiv \frac{1}{s} (m^2 - 1)^2 \quad /19/$$

Знаки перед A_2^{\pm}, B_2^{\pm} и A_3^{\pm}, B_3^{\pm} , появляющиеся в интегралах, должны быть определены путем рассмотрения знаков небольших мнимых частей \bar{s} и t появляющихся в дисперсионных соотношениях /5/. Для иллюстрации далее показано определение знака перед A_3^{\pm} в интеграле по g_+ . Для рассеяния назад $t = -4k^2$. На полукруге верхней полуплоскости s имеет вид:

$$s = \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad /20/$$

Используя /11/ мы сразу же получаем

$$\text{Im } t = \frac{1}{\rho} \{ (m^2 - 1)^2 - \rho^2 \} \sin \varphi. \quad /21/$$

Таким образом, t имеет отрицательную мнимую часть вне полукруга верхней полуплоскости и положительную мнимую часть внутри полукруга верхней полуплоскости. Знак перед A_3^\pm в интеграле по \mathcal{L}_+ должен быть отрицательным, в противоположность результату, полученному Мак-Дауэлом^{10/}.

Дисперсионные соотношения /18/ могут принять вид, подобный /16/. Интегралы в /20/ взяты фактически вдоль кривой $\bar{s}s = (m^2 - 1)^2$. Некоторые из интегралов удобно подвергнуть преобразованию:

$$\bar{s} = \frac{1}{s} (m^2 - 1)^2.$$

/22/

В частности

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{(m-1)^2} ds' \frac{A_2^\pm(s', -1)}{s' - s} = \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} d\bar{s}' \cdot \frac{\bar{s}_-}{\bar{s}'} \cdot \frac{A_2^\pm(s', -1)}{\bar{s}' - \bar{s}_-}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-m^2+1}^0 ds' \frac{A_3^\pm(s', -1)}{s' - s} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-m^2+1} d\bar{s}' \cdot \frac{\bar{s}_-}{\bar{s}'} \cdot \frac{A_3^\pm(s', -1)}{\bar{s}' - \bar{s}_-}$$

/23/

Применяя кроссинг соотношения к /23/, мы получаем

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{(m-1)^2} ds' \frac{A_2^\pm(s', -1)}{s' - s} = \pm \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \cdot \frac{\bar{s}_-}{s'} \cdot \frac{A_1^\pm(s', -1)}{s' - \bar{s}_-}$$

/24/

$$\frac{1}{\pi} \int_{-m^2+1}^0 ds' \frac{A_3^\pm(s', -1)}{s' - s} = \mp \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-m^2+1} ds' \cdot \frac{\bar{s}_-}{s'} \cdot \frac{A_3^\pm(s', -1)}{s' - \bar{s}_-}$$

Подобным образом мы получаем

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{(m-1)^2} ds' \frac{B_2^\pm(s', -1)}{s' - s} = \mp \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \cdot \frac{\bar{s}_-}{s'} \cdot \frac{B_1^\pm(s', -1)}{s' - \bar{s}_-}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-m^2+1}^0 ds' \frac{B_3^\pm(s', -1)}{s' - s} = \pm \int_{-\infty}^{-m^2+1} ds' \cdot \frac{\bar{s}_-}{s'} \cdot \frac{B_3^\pm(s', -1)}{s' - \bar{s}_-}$$

Кроме того, интеграл по \mathcal{G}_+ комплексно сопряжен интегралу по \mathcal{G}_- . Поэтому /20/ может быть приведено к следующему виду:

$$A^\pm(s, -1) = \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \left\{ \frac{1}{s' - s} \pm \frac{\bar{s}_-}{s'} \cdot \frac{1}{s' - \bar{s}_-} \right\} A_1^\pm(s', -1)$$

$$- \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\mathcal{G}_-} ds' \frac{A_2^\pm(s', -1)}{s' - s}$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-m^2+1} ds' \left\{ \frac{1}{s' - s} \pm \frac{\bar{s}_-}{s'} \cdot \frac{1}{s' - \bar{s}_-} \right\} A_3^\pm(s', -1)$$

$$B^\pm(s, -1) = \frac{g^2}{m^2 - s} \mp \frac{g^2}{m^2 - \bar{s}_-}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \left\{ \frac{1}{s' - s} \mp \frac{\bar{s}_-}{s'} \cdot \frac{1}{s' - \bar{s}_-} \right\} B_1^\pm(s', -1)$$

/25/

/26/

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\mathcal{D}_-} ds' \frac{B_3^\pm(s', -1)}{s' - s} \\
 & - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-m^2+1} ds' \left\{ \frac{1}{s' - s} \mp \frac{\bar{s}_-}{s'} \cdot \frac{1}{s' - \bar{s}_-} \right\} B_3^\pm(s', -1).
 \end{aligned}$$

Если мы можем пренебречь \mathcal{D} и более высокими волнами по сравнению с \mathcal{S} - волнами, пренебречь \mathcal{F} и более высокими волнами по сравнению с \mathcal{P} - волнами, то амплитуды \mathcal{S} -, \mathcal{P} -волн $f_{s_{\frac{1}{2}}}^\pm(s)$, $f_{p_{\frac{1}{2}}}^\pm(s)$, $f_{p_{\frac{3}{2}}}^\pm(s)$ могут быть легко выражены через амплитуды рассеяния вперед и назад:

$$f_{s_{\frac{1}{2}}}^\pm(s) \cong \frac{1}{2} \left\{ f_1^\pm(s, 1) + f_1^\pm(s, -1) \right\}$$

$$f_{p_{\frac{1}{2}}}^\pm(s) - f_{p_{\frac{3}{2}}}^\pm(s) \cong \frac{1}{2} \left\{ f_2^\pm(s, 1) + f_2^\pm(s, -1) \right\}$$

$$f_{p_{\frac{3}{2}}}^\pm(s) \cong \frac{1}{6} \left\{ f_1^\pm(s, 1) - f_1^\pm(s, -1) \right\}.$$

Выражение f_1^\pm и f_2^\pm определено в /9/ следующим образом:

$$f_1^\pm(s, x \cong \cos \phi) = \frac{E+m}{8\pi\sqrt{s}} \left\{ A^\pm(s, x) + (\sqrt{s}-m) B^\pm(s, x) \right\}$$

$$f_2^\pm(s, x) = \frac{E-m}{8\pi\sqrt{s}} \left\{ -A^\pm(s, x) + (\sqrt{s}+m) B^\pm(s, x) \right\}.$$

Здесь E - энергия нуклона в с.ц.м.

IV. Интегральные уравнения

Следующий этап состоит в том, чтобы выразить A_1^\pm, B_1^\pm через мнимые части $\pi-N$ - парциальных волновых амплитуд и A_3^\pm, B_3^\pm , через мнимые части амплитуд $N-\tilde{N}$ аннигиляции. Выражения для A_1^\pm и B_1^\pm могут быть получены прямо из /27/ и /28/

$$\frac{1}{4\pi} A_1^\pm(s, 1) \cong \frac{\sqrt{s+m}}{E+m} \mathcal{I}m \left\{ f_{s_{\frac{1}{2}}}^\pm(s) + 3f_{p_{\frac{3}{2}}}^\pm(s) \right\} - \frac{\sqrt{s-m}}{E-m} \mathcal{I}m \left\{ f_{p_{\frac{1}{2}}}^\pm(s) - f_{p_{\frac{3}{2}}}^\pm(s) \right\}$$

$$\frac{1}{4\pi} A_1^\pm(s, -1) \cong \frac{\sqrt{s+m}}{E+m} \mathcal{I}m \left\{ f_{s_{\frac{1}{2}}}^\pm(s) - 3f_{p_{\frac{3}{2}}}^\pm(s) \right\} - \frac{\sqrt{s-m}}{E-m} \mathcal{I}m \left\{ f_{p_{\frac{1}{2}}}^\pm(s) - f_{p_{\frac{3}{2}}}^\pm(s) \right\}$$

/29/

$$\frac{1}{4\pi} B_1^\pm(s, 1) \cong \frac{1}{E+m} \mathcal{I}m \left\{ f_{s_{\frac{1}{2}}}^\pm(s) + 3f_{p_{\frac{3}{2}}}^\pm(s) \right\} + \frac{1}{E-m} \mathcal{I}m \left\{ f_{p_{\frac{1}{2}}}^\pm(s) - f_{p_{\frac{3}{2}}}^\pm(s) \right\}$$

$$\frac{1}{4\pi} B_1^\pm(s, -1) \cong \frac{1}{E+m} \mathcal{I}m \left\{ f_{s_{\frac{1}{2}}}^\pm(s) - 3f_{p_{\frac{3}{2}}}^\pm(s) \right\} + \frac{1}{E-m} \mathcal{I}m \left\{ f_{p_{\frac{1}{2}}}^\pm(s) - f_{p_{\frac{3}{2}}}^\pm(s) \right\}.$$

Чтобы выразить A_3^\pm и B_3^\pm через амплитуды рассеяния реакции 111, прежде всего необходимо получить соотношение между $s, x \equiv \cos \phi$ реакции 1 и $t, z \equiv \cos \theta$ реакции 111. Из /6/ и /11/ следует, что для рассеяния назад

$$t = 2(m^2 + 1) - s - \frac{1}{5}(m^2 - 1)^2.$$

/30/

Можно показать, что на контурах интегрирования в /26/

$$z = \frac{s - \bar{s}}{4p^2} = -1.$$

/31/

Реакция $N-\tilde{N}$ аннигиляции была изучена Фразером и Фулко [2]. Нетрудно выразить A_3^\pm и B_3^\pm через парциальные волновые амплитуды $N-\tilde{N}$ аннигиляции $f_{\pm}^{I,J}$ с определенной спиральностью. I и J обозначают здесь изотопический спин и полный момент количества движения $N-\tilde{N}$ системы соответственно. "+" и "-" относится к двум спиральным состояниям. Учитывая условие унитарности для реакции 111, после простого расчета мы получаем:

$$A_3^+(s, -1) = \frac{8\pi}{\sqrt{6}} \sum_J^{\text{чётный}} (J + \frac{1}{2}) \frac{(pq)^J}{p^2} \left\{ \frac{m}{2} \sqrt{J(J+1)} \operatorname{Im} f_{-}^{0,J}(t) - \operatorname{Im} f_{+}^{0,J}(t) \right\}$$

$$A_3^-(s, -1) = 4\pi \sum_J^{\text{нечётный}} (J + \frac{1}{2}) \frac{(pq)^J}{p^2} \left\{ -\frac{m}{2} \sqrt{J(J+1)} \operatorname{Im} f_{-}^{1,J}(t) + \operatorname{Im} f_{+}^{1,J}(t) \right\}$$

$$B_3^+(s, -1) = -\frac{4\pi}{\sqrt{6}} \sum_J^{\text{чётный}} (J + \frac{1}{2}) \sqrt{J(J+1)} (pq)^{J-1} \operatorname{Im} f_{-}^{0,J}(t)$$

$$B_3^-(s, -1) = 2\pi \sum_J^{\text{нечётный}} (J + \frac{1}{2}) \sqrt{J(J+1)} (pq)^{J-1} \operatorname{Im} f_{-}^{1,J}(t),$$

где на контуре g_-

$$s = (m^2 - 1) e^{-i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$t = 2(m^2 + 1) - 2(m^2 - 1) \cos \varphi$$

$$pq = \frac{i}{2} (m^2 - 1) \sin \varphi.$$

При $-\infty < s \leq -m^2 + 1$

$$t = 2(m^2 + 1) - s - \frac{1}{s} (m^2 - 1)^2$$

$$pq = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{s} (m^2 - 1)^2 - s \right\}.$$

/32/

/33/

/34/

Интересно отметить, что на контуре g_2 A_3^+ и B_3^- являются действительными, а A_3^- и B_3^+ - чисто мнимыми. Первые несколько членов разложения /32/ могли бы быть достаточными для того, чтобы хорошо представлять A_3^{\pm} и B_3^{\pm} для значений t , немного больших 4. Эта область дает существенный вклад в дисперсионные соотношения. Однако она относится к нефизической области реакции 111, не доступной эксперименту. Действительное число членов, которое необходимо сохранить, должно определяться в процессе решения интегрального уравнения. Используя определение

$$\omega \equiv \sqrt{s} - m$$

$$K_{\pm}(s', s) \equiv \left\{ \frac{1}{s'-s} \pm \frac{\bar{s}_-}{s'} \cdot \frac{1}{s'-\bar{s}_-} \right\}, \quad /35/$$

мы получаем из /16/, /26/, /27/, /28/ следующие уравнения, которые в сочетании с условием унитарности дают интегральные уравнения для π -N рассеяния. Для амплитуды $f_{s_1/2}^{\pm}(s)$ мы имеем следующие уравнения

$$f_{s_1/2}^{\pm}(s) = P_{s_1/2}^{\pm}(s) + I_{s_1/2}^{\pm}(s) + II_{s_1/2}^{\pm}(s) + III_{s_1/2}^{\pm}(s)$$

$$P_{s_1/2}^{\pm}(s) = \frac{\omega(E+m)g^2}{16\pi\sqrt{s}} \left\{ \frac{2}{m^2-s} \mp \left[\frac{1}{m^2-\bar{s}_+} + \frac{1}{m^2-\bar{s}_-} \right] \right\}$$

$$I_{s_1/2}^{\pm}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'-s} \left\{ \frac{E+m}{E'+m} \cdot \frac{\sqrt{s'+s}}{2\sqrt{s}} \Im_m f_{s_1/2}^{\pm}(s') \right. \\ \left. + \frac{E+m}{2\sqrt{s}} \cdot \frac{\sqrt{s}-\sqrt{s'}}{E'-m} \left[\Im_m f_{p_1/2}^{\pm}(s') - \Im_m f_{p_3/2}^{\pm}(s') \right] \right\} \quad /36/$$

$$II_{s_1/2}^{\pm}(s) = \pm \frac{E+m}{4\pi\sqrt{s}} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \left\{ 3 K_{-}(s', s) \frac{2m+\omega'-\omega}{E'+m} \Im_m f_{p_1/2}^{\pm}(s') \right. \\ \left. + K_{+}(s', s) \left[\frac{2m+\omega'-\omega}{E'+m} \Im_m f_{s_1/2}^{\pm}(s') - \frac{\omega'+\omega}{E'-m} \Im_m (f_{p_1/2}^{\pm}(s') - f_{p_3/2}^{\pm}(s')) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{III}_{\frac{1}{2}}^{\pm}(s) = & -\frac{E+m}{16\pi\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{\pi} \left\{ 2 \operatorname{Re} \int_{g_-} \frac{ds'}{s'-s} [A_3^{\pm}(s',-1) + \omega B_3^{\pm}(s',-1)] \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{-m^2+1} ds' [K_{\pm}(s',s) A_3^{\pm}(s',-1) + \omega K_{\mp}(s',s) B_3^{\pm}(s',-1)] \right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что выражения A_3^{\pm} и B_3^{\pm} в $\text{III}_{\frac{1}{2}}^{\pm}(s)$ должны быть заменены выражениями /32/. Соответствующие уравнения для $f_{\frac{1}{2}}^{\pm}(s) - f_{\frac{3}{2}}^{\pm}(s)$ имеют вид:

$$f_{\frac{1}{2}}^{\pm}(s) - f_{\frac{3}{2}}^{\pm}(s) = P_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}^{\pm}(s) + I_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}^{\pm}(s) + \Pi_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}^{\pm}(s) + \text{III}_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}^{\pm}(s)$$

$$P_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}^{\pm}(s) = \frac{(\sqrt{s}+m)(E-m)g^2}{16\pi\sqrt{s}} \left\{ \frac{2}{m^2-s} \mp \left[\frac{1}{m^2-\bar{s}_+} + \frac{1}{m^2-\bar{s}_-} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}^{\pm}(s) = & \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'-s} \left\{ \frac{E-m}{E'-m} \cdot \frac{\sqrt{s'+\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}} \operatorname{Im} [f_{\frac{1}{2}}^{\pm}(s') - f_{\frac{3}{2}}^{\pm}(s')] \right. \\ & \left. + \frac{E-m}{E'+m} \cdot \frac{\sqrt{s}-\sqrt{s'}}{2\sqrt{s}} \operatorname{Im} f_{\frac{3}{2}}^{\pm}(s') \right\} \end{aligned}$$

/37/

$$\begin{aligned} \text{II}_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}^{\pm}(s) = & \mp \frac{E-m}{4\pi\sqrt{s}} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \left\{ 3 K_{-}(s',s) \frac{2m+\sqrt{s'+\sqrt{s}}}{E'+m} \operatorname{Im} f_{\frac{3}{2}}^{\pm}(s') \right. \\ & \left. + K_{+}(s',s) \left[\frac{2m+\sqrt{s'+\sqrt{s}}}{E'+m} \operatorname{Im} f_{\frac{3}{2}}^{\pm}(s') + \frac{2m+\sqrt{s}-\sqrt{s'}}{E'-m} \operatorname{Im} (f_{\frac{1}{2}}^{\pm}(s') - f_{\frac{3}{2}}^{\pm}(s')) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{III}_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}^{\pm}(s) = -\frac{E-m}{16\pi\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{\pi} \left\{ 2 \operatorname{Re} \int_{g_-} \frac{ds'}{s'-s} [-A_3^{\pm}(s',-1) + (\sqrt{s}+m) B_3^{\pm}(s',-1)] \right\}$$

$$-m^2+1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} ds' \left[-K_{\pm}(s',s) A_3^{\pm}(s',-1) + (\sqrt{s}+m) K_{\mp}(s',s) B_3^{\pm}(s',-1) \right] \}.$$

Уравнения для амплитуды $f_{p_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s)$ следующие:

$$f_{p_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s) = P_{p_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s) + I_{p_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s) + II_{p_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s) + III_{p_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s)$$

$$P_{p_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s) = \mp \frac{\omega(E+m)g^2}{4g\pi\sqrt{s}} \left[\frac{1}{m^2-\bar{s}_+} - \frac{1}{m^2-\bar{s}_-} \right]$$

$$I_{p_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'-s} \cdot \frac{E+m}{E'+m} \cdot \frac{\sqrt{s'+s}}{2\sqrt{s}} \mathcal{I}m f_{p_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s')$$

/38/

$$II_{p_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s) = \pm \frac{E+m}{12\pi\sqrt{s}} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \left\{ 3K_{+}(s',s) \frac{2m+\omega'-\omega}{E'+m} \mathcal{I}m f_{p_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s') \right.$$

$$\left. + K_{-}(s',s) \left[\frac{2m+\omega'-\omega}{E'+m} \mathcal{I}m f_{p_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s') - \frac{\omega'+\omega}{E'-m} \mathcal{I}m (f_{p_{\frac{1}{2}}}^{\pm}(s') - f_{p_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s')) \right] \right\}$$

$$III_{p_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s) = -\frac{1}{3} III_{s_{\frac{1}{2}}}^{\pm}(s).$$

Эти уравнения достаточно длинные, но просты. Каждая из амплитуд представляет собой наложение четырех членов P^{\pm} , I^{\pm} , II^{\pm} , III^{\pm} , P^{\pm} — полюсный вклад, в то время как I^{\pm} , II^{\pm} , III^{\pm} — вклады от областей реак — ций 1, 11, 111, соответственно.

Так как в вышеуказанных уравнениях появляются амплитуды реакции III интегральные уравнения должны решаться одновременно с интегральными уравнениями для $N-\tilde{N}$ -аннигиляции.

Интересно сравнить уравнения /36/, /37/, /38/ с соответствующим результатом ^{9/}. Основная разница лежит, несомненно, в членах III [±], появляющихся в наших уравнениях, которые полностью отсутствуют в их уравнениях. Эти члены представляют явно эффекты $\pi-\pi$ -взаимодействия, так как $\text{Im} f_{\pm}^{I,J}$ обращаются в нуль в пределах двухмезонного приближения условия унитарности, если обращается в нуль $\pi-\pi$ -взаимодействие.

Чтобы сравнить полюсные вклады и вклады от областей I и II, удобно пренебречь $\text{Im} f_{S_{\frac{1}{2}}}^{\pm}$ и $\text{Im} f_{P_{\frac{1}{2}}}^{\pm}$ по сравнению с $\text{Im} f_{P_{\frac{3}{2}}}^{\pm}$ и отбросить члены порядка $(\frac{\omega}{m})^2$ по сравнению с главными, что и было сделано в ^{9/}. Тогда для $P_{S_{\frac{1}{2}}}^{\pm}$, $I_{S_{\frac{1}{2}}}^{\pm}$ и $II_{S_{\frac{1}{2}}}^{\pm}$ имеем следующие приближенные выражения:

$$P_{S_{\frac{1}{2}}}^{\pm}(s) \approx -\frac{g^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{2\sqrt{s}} \left\{ \left(1 - \frac{\omega}{2m}\right) \pm \left(1 + \frac{\omega}{2m}\right) \right\}$$

$$I_{S_{\frac{1}{2}}}^{\pm}(s) \approx \frac{2m^2}{\pi\sqrt{s}} \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{k'^2} \left\{ 1 + \frac{\omega'}{2m} - \frac{\omega}{2m} \right\} \text{Im} f_{P_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s')$$

/39/

$$II_{S_{\frac{1}{2}}}^{\pm}(s) \approx \pm \frac{2m^2}{\pi\sqrt{s}} \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{k'^2} \left\{ 1 - \frac{\omega'}{2m} - \frac{\omega}{2m} \right\} \text{Im} f_{P_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s')$$

Приближенные уравнения для $P_{\rho_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}}^{\pm}(s)$, $I_{\rho_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}}^{\pm}(s)$, $\Pi_{\rho_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}}^{\pm}(s)$ имеют вид

$$P_{\rho_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}}^{\pm}(s) \approx -\frac{f^2 k^2}{\omega} \left\{ \left(1 - \frac{\omega}{2m}\right) \pm \left(1 + \frac{\omega}{2m}\right) \right\} \left(1 - \frac{\omega}{2m}\right)$$

/40/

$$I_{\rho_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}}^{\pm}(s) \approx -\frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} d\omega' \frac{k^2}{k'^2} \left\{ \frac{1}{\omega' - \omega} + \frac{1}{m} \right\} \Im_m f_{\rho_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s')$$

$$\Pi_{\rho_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}}^{\pm}(s) \approx \pm \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} d\omega' \frac{k^2}{k'^2} \left\{ \frac{1}{\omega' + \omega} - \frac{1}{m} \right\} \Im_m f_{\rho_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s').$$

f - ренормализованная, но нерационализованная псевдовекторная постоянная связи, определенная следующим образом.

$$f^2 \equiv \frac{g^2}{16\pi m^2}.$$

/41/

Приближенные выражения для $P_{\rho_{\frac{3}{2}}}^{\pm}$, $I_{\rho_{\frac{3}{2}}}^{\pm}$ и $\Pi_{\rho_{\frac{3}{2}}}^{\pm}$ имеют вид:

$$P_{\rho_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s) \approx \pm \frac{2f^2 k^2}{3\omega}$$

$$I_{\rho_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s) \approx \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} d\omega' \left\{ \frac{1}{\omega' - \omega} + \frac{1}{m} \right\} \Im_m f_{\rho_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s')$$

/42/

$$\Pi_{\rho_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s) \approx \pm \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega + \omega'} \left\{ 1 + \frac{2(\omega + \omega')^2}{3k'^2} \left(1 - \frac{k^2}{(\omega + \omega')^2}\right) - \frac{2\omega}{m} - \frac{2(\omega + \omega')^3}{3mk'^2} \right\} \Im_m f_{\rho_{\frac{3}{2}}}^{\pm}(s').$$

Таким образом, полюсные вклады и $I_{\rho_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}}^{\pm}$ точно такие же, как у 9 в пределах сделанного приближения.

$I_{s\frac{1}{2}}^{\pm}$, $II_{s\frac{1}{2}}^{\pm}$ и $III_{p\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\frac{\omega}{m}}^{\pm}$ отличаются от соответствующих выражений 9 членами порядка $\frac{3}{2}\frac{\omega}{m}$. Но $I_{p\frac{1}{2}}^{\pm}$ и $II_{p\frac{1}{2}}^{\pm}$ отличны друг от друга. В самом деле в наших уравнениях /38/ не произведено вычитания. Если вычитание сделано при $\omega \approx \mu$, $I_{p\frac{1}{2}}^{\pm}$ становится аналогичным их результату, но $II_{p\frac{1}{2}}^{\pm}$ остается отличным. Это, вероятно, приведет к некоторым изменениям в поведении /3.3/ резонанса.

Автор пользуется случаем, чтобы выразить благодарность доктору Ширкову, Мещерякову и Ефремову за многочисленные полезные дискуссии, а также участникам семинара Боголюбова за интересные дискуссии.

Рукопись поступила в издательский отдел

5 июля 1960 года.

Л и т е р а т у р а

1. G.F.Chew and S.Mandelstam, UCRL 8728 preprint.
2. W.R.Fraser and R.Fulco, UCRL 8806 preprint.
3. C.F.Chew, S.Mandelstam and H.P.Noyes, UCRL 9001 preprint.
4. S.Mandelstam, Phys.Rev. 112, 1344 (1958).
5. S.Mandelstam, Phys.Rev. 115, 1741 (1959).
6. S.Mandelstam, Phys.Rev. 115, 1752 (1959).
7. А.В.Ефремов, В.А.Мещеряков и Д.В.Ширков. ОИЯИ препринт.
8. А.В.Ефремов, В.А.Мещеряков и Д.В.Ширков. ОИЯИ-препринт.
9. G.F.Chew, M.Goldberger, F.Low and Y.Nambu, Phys.Rev. 106, 1337 (1957).
10. S.W.MacDowell, Phys.Rev. 116, 774 (1959).
11. E.T.Whittaker and G.N.Watson, A course of modern analysis, 322 (1940).
12. H.Lehmann, Nuovo Cimento, 10, 579 (1958).
13. S.Mandelstam, Phys.Rev.Letter, 4, 84 (1960).

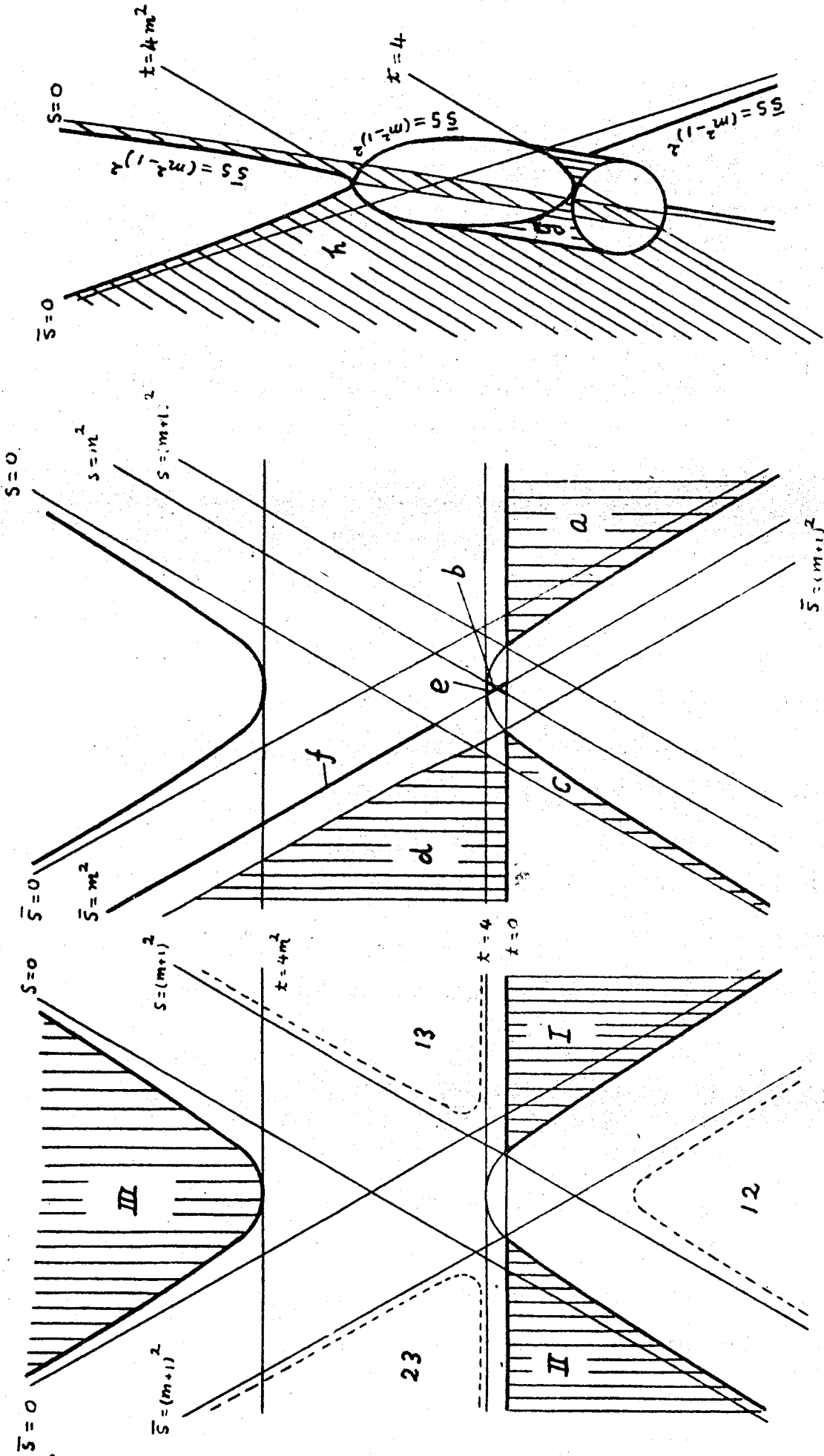


Рис. 1в

Рис. 1б

Рис. 1а

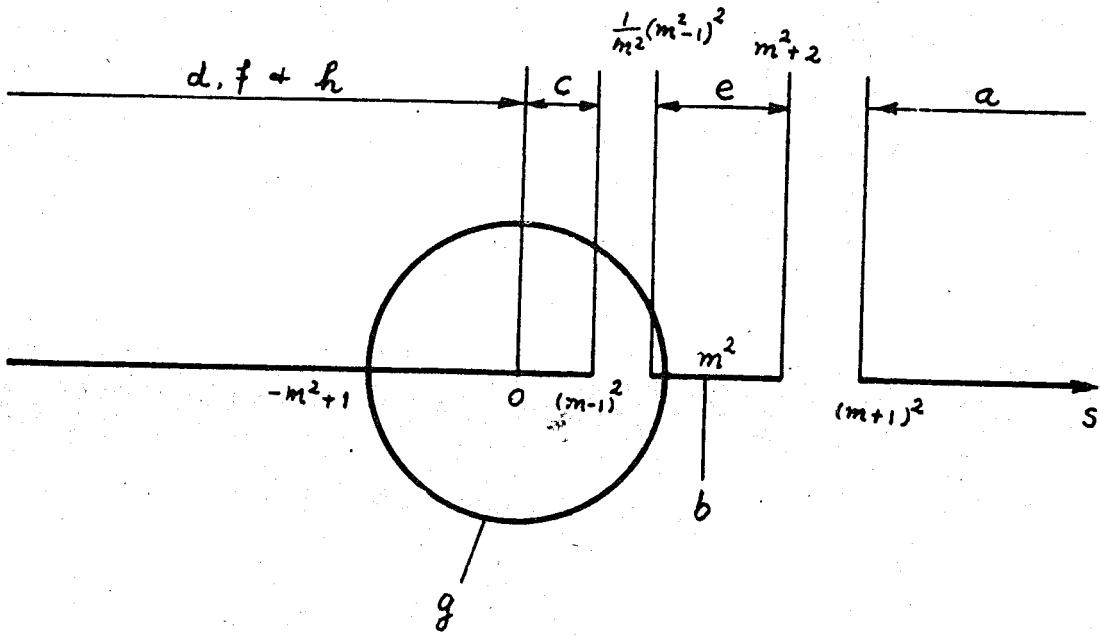


Рис. 2.

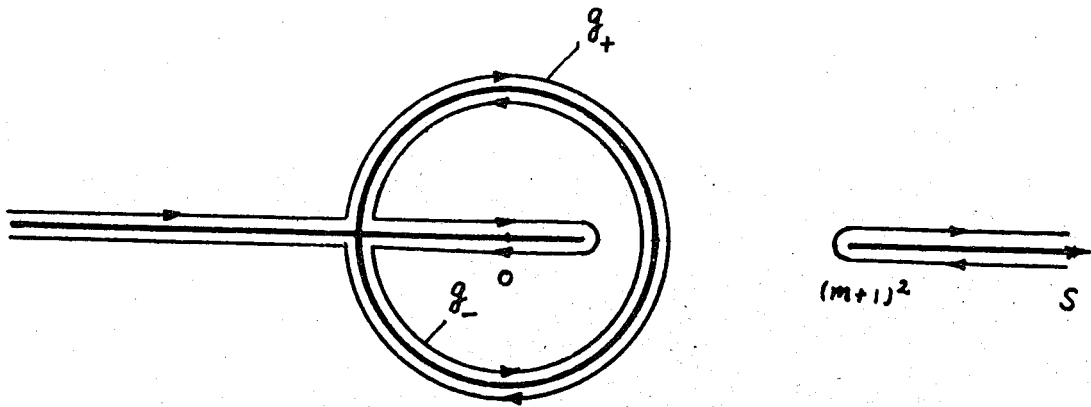


Рис. 3.