3
М-42
5-61
Экз. чит. зала

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б.В. Медведев

Д-561

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Дубна 1960 год

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Д-561

Б.В. Медведев

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ[x)]

x) Направлено в ДАН СССР

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

1. Обычным подходом к квантовой теории поля является гамильтонов формализм, возникший как непосредственное перенесение на теорию поля того пути, который ведет от классической механики к квантовой. При этом теорию фиксируют, задавая вид лагранжиана, затем варьированием получают уравнения движения, которые после выполняемого по известным правилам квантования, превращаются в гайзенберговы уравнения для операторных функций поля. Фактически теория может быть сформулирована на этом пути только в рамках теории возмущений, ибо не только решение уравнений, но и их запись ("исключение бесконечностей") могут быть выполнены только в виде рядов по степеням константы связи.

Трудности гамильтонова метода привели к возникновению другого подхода, его часто (не слишком удачно) называют аксиоматическим, когда в основу теории кладутся некоторые общие физические требования, которым должны удовлетворять решения уравнений, а сами эти уравнения явно не формулируются. Интерес к такому пути построения теории особенно возрос в последние годы в связи с изучением дисперсионных соотношений - единственного точного результата квантовой теории поля.

Основные положения аксиоматического метода можно сформулировать различными способами. Так, можно включать в число основных положений требование существования в каждой точке гайзенберговых полей, коммутирующих на любой пространственно-подобной гипер-поверхности - это направление развивается Леманом, Шиманчиком и Циммерманом (см.[1,2] и многочисленные дальнейшие работы). С другой стороны, можно исходить из программы, предложенной в свое время Гайзенбергом[3], и ограничиться рассмотрением матрицы рассеяния. Последний путь был избран Н.Н.Боголюбовым, М.К.Поливановым и автором[4 x)] в связи с теорией дисперсионных соотношений[xx)].

Во всех вариантах аксиоматического подхода возникают естественные вопросы о совместимости вводимой системы "аксиом" и о ее достаточности, чтобы (с какой степенью произвола?) определить теорию. На первый из этих вопросов нельзя дать пока никакого определенного ответа, поскольку существование непротиворечивой

[x)] Цитируется в дальнейшем как ВТДС.

[xx)] Используемая в ВТДС система основных положений возникла из системы, ранее предложенной Н.Н.Боголюбовым[5] в рамках теории возмущений и гипотезы адиабатического включения и выключения взаимодействия.

схемы квантовой теории поля вообще не установлено. Целью настоящей заметки является исследование второго вопроса. Именно, мы покажем, что в рамках теории возмущений формальное разложение матрицы рассеяния по степеням связи следует из основных положений аксиоматического подхода, дополненных допущениями о трансформационных свойствах рассматриваемых полей и степенях роста матричных элементов, с той же степенью произвола, что и в обычной теории.

Мы будем исходить из системы основных положений, сформулированных в ВТДС (§ 2). Фиксируя трансформационную структуру полей, ограничимся, ради простоты, случаем одного скалярного поля (аут-поле $\varphi(x)$). Функциональное разложение (расширенное за поверхность энергии) матрицы рассеяния по нормальным произведениям $\varphi(x)$ мы запишем в форме:

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-i)^\nu}{\nu!} \int dx_1 \dots dx_\nu \, \Phi^\nu(x_1,\dots,x_\nu) : \varphi(x_1)\dots\varphi(x_\nu): \quad , \tag{1}$$

где $\Phi^n(x_1,\dots,x_n)$ – классические функции, симметричные в своих аргументах. n – кратным вариационным дифференцированием мы получим для них выражения $\Phi^n(x_1,\dots,x_n) = i^n \langle 0 | \frac{\delta^{(n)} S}{\delta\varphi(x_1)\dots\delta\varphi(x_n)} | 0 \rangle$, которые нам будет удобнее переписать, используя стабильность вакуума, ВТДС 1, (6), как

$$\Phi^n(x_1,\dots,x_n) = i^n \langle 0 | \frac{\delta^n S}{\delta\varphi(x_1)\dots\delta\varphi(x_n)} S^+ | 0 \rangle . \tag{2}$$

В силу свойства ВТДС 1 , (1), $\Phi^n(x_1,\dots,x_n)$ со всеми разными аргументами будут обобщенными функциями, интегрируемыми в одном из классов $C(q,z)$. Будь то и для совпадающих аргументов, их Фурье-образы $\tilde{\Phi}^n(p_1,\dots,p_n)$, определяемые соотношением

$$\int dx_1 \dots dx_n \, e^{i\sum_1^n xp} \, \Phi^n(x_1,\dots,x_n) = (2\pi)^4 \, \delta(p_1+\dots+p_n) \, \tilde{\Phi}^n(p_1,\dots,p_n), \tag{3}$$

(δ – функция возникает из учета трансляционной инвариантности) также были бы обобщенными функциями, интегрируемыми в некоторых классах $C(q',z')$, и поэтому $\tilde{\Phi}(p)$ были бы полиномиально ограничены при стремлении какого-либо из импульсов к бесконечности. Мы наложим на $\tilde{\Phi}(p)$ более слабое условие (выполняющееся в обычной теории) полиномиальной ограниченности при равномерной растяжке всех импульсов. Именно, потребуем, чтобы для всякого n существовал конечный индекс роста – минимальное целое число $\Omega(n)$, такое, что при растяжке всех импульсов

$$p_1 = \xi_1 P \;, \ldots, \; p_n = \xi_n P \qquad ; \quad P \to \infty \tag{4}$$

функция $\tilde{\Phi}^n(\xi, P)$ растет медленней, чем $P^{\Omega(n)+\alpha}$ для любого $\alpha > 0$.

Чтобы конкретизировать теорию (что при обычном подходе делают, задавая лагранжиан взаимодействия), надо задать индексы роста $\Omega(n)$ для всех n. В частности, в теории перенормируемого типа должно быть не более конечного числа функций $\tilde{\Phi}^n(p)$ с положительным или нулевым индексом. Очевидно также, что индексы роста нельзя назначать совершенно произвольно; вопрос о допустимых наборах индексов роста требует особого исследования.

3. Установим теперь бесконечную систему уравнений, связывающих функции $\Phi^n(x)$ с разным числом аргументов. Основой для такой системы послужит условие причинности (ВТДС **II**, (2)):

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left(\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)} S^+ \right) = 0 \qquad \text{для} \qquad x \lesssim y. \tag{5}$$

С помощью индукции можно показать, что из него следует более общее условие

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left(\frac{\delta^n S}{\delta\varphi(y_1)\ldots\delta\varphi(y_n)} S^+ \right) = 0 \qquad \text{для } x \lesssim \text{ всех } \{y_1, \ldots, y_n\}, \tag{6}$$

исходя из которого можно, опять по индукции, доказать операторное тождество

$$\frac{\delta^n S}{\delta\varphi(x_1)\ldots\delta\varphi(x_n)} S^+ = \frac{\delta^s S}{\delta\varphi(x_{j_1})\ldots\delta\varphi(x_{j_s})} S^+ \cdot \frac{\delta^{n-s} S}{\delta\varphi(x_{j_{s+1}}),\ldots,\delta\varphi(x_{j_n})} S^+, \tag{7}$$

выполняющееся, коль скоро (для любого $1 \le s \le n-1$)

$$\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\} \gtrsim \{x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}\} \tag{7a}$$

Чтобы перейти здесь к функциям $\Phi^n(x)$, возьмем от (7) вакуумное среднее, разложим в правой части произведения операторов по полной системе функций[x)] с помощью формулы

$$1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \int d\vec{k}_1 \ldots d\vec{k}_\nu \, |\vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_\nu\rangle \langle \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_\nu| \tag{8}$$

и преобразуем возникающие матричные элементы в вакуумные средние, используя свойство ВТДС, II (3). Мы получим тогда, что

$$\begin{aligned}
\Phi^n(x_1,\ldots,x_n) = {} & \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{i^{r+\nu+\mu}}{r!\,\nu!\,\mu!} \int dz_1 \ldots dz_r \, du_1 \ldots du_\nu \, du'_1, \ldots, du'_\nu \cdot \\
& \cdot \int dv_1 \ldots dv_\mu \, dz'_1 \ldots dz'_r \, dv'_1 \ldots dv'_\mu \; \Phi^{s+r+\nu}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, z_1, \ldots, z_r, u_1, \ldots, u_\nu) \cdot \\
& \cdot \mathcal{D}^{(-)}(z_1 - z'_1) \ldots \mathcal{D}^{(-)}(z_r - z'_r) \, \mathcal{D}^{(-)}(u_1 - u'_1) \ldots \mathcal{D}^{(-)}(u_\nu - u'_\nu) \cdot \\
& \cdot \Phi^{*\,\nu+\mu}(u'_1, \ldots, u'_\nu, v_1, \ldots, v_\mu) \, \mathcal{D}^{(-)}(v_1 - v'_1) \ldots \mathcal{D}^{(-)}(v_\mu - v'_\mu) \cdot \\
& \cdot \Phi^{n-s+r+\mu}(z'_1, \ldots, z'_r, v'_1, \ldots, v'_\mu, x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}),
\end{aligned} \tag{9}$$

коль скоро выполняется условие (7а).

Итак, мы пришли к бесконечной системе уравнений, которым должны удовлетворять определяющие матрицу рассеяния функции $\Phi^n(x)$. Можно думать, что совместно с условием унитарности ВТДС I,(5), которое записывается через функции Φ в форме:

---

x) Мы допускаем здесь, что в рассматриваемой теории нет связанных состояний и, следовательно, что входящие в сумму в /8/ состояния образуют полную систему.

$$\Phi^{n}(x_1,\dots,x_n) + (-1)^n \Phi^{*n}(x_1,\dots,x_n) = \delta_{n0} -$$

$$-\sum_{\kappa=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa}(-i)^{s}}{s!} P\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_{n-\kappa} \\ x_{n-\kappa+1},\dots,x_n \end{pmatrix} \int dz_1\dots dz_s\, dz_1'\dots dz_s' \cdot \tag{10}$$

$$\cdot\, \Phi^{n-\kappa+s}(x_1,\dots,x_{n-\kappa};\, z_1,\dots,z_s)\, \mathcal{D}^{(-)}(z_1-z_1')\dots \mathcal{D}^{(-)}(z_s-z_s')\, \Phi^{*\,\kappa+s}(z_1',\dots,z_s',x_{n-\kappa+1},\dots,x_n),$$

и заданием индексов роста эта система достаточна для нахождения всех функций $\Phi^{n}(x)$. Покажем, что так, во всяком случае, обстоит дело в теории возмущений – все функции Φ находятся с точностью до конечного числа констант.

4. Будем считать, что все функции Φ разложены в ряды

$$\Phi^{n}(x_1,\dots,x_n) = \delta_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m} \Phi^{n}_{m}(x_1,\dots,x_n) \tag{11}$$

по степеням учитывающего малость взаимодействия параметра λ. Допустим, что в этом разложении коэффициенты при λ^{m}, удовлетворяющие (9), (10), уже определены для всех $m < M$. Покажем, что тогда всегда можно найти функции $\Phi^{n}_{M}(x_1,\dots,x_n)$, удовлетворяющие (с точностью до λ^{M}) уравнениям (9) и условиям (10), и установим степень возникающего при этом произвола.

Будем искать функцию $\Phi^{n}_{M}(x_1,\dots,x_n)$. Если совокупность ее аргументов можно разбить на две группы, удовлетворяющие (7а), то, выделяя из (9) члены порядка M, мы получим выражение искомой функции через функции с другим числом аргументов, но меньшего порядка. В самом деле, разложение (11) всех Φ^{n}, кроме Φ^{0}, начинается с члена первого порядка (в отсутствии взаимодействия $S = S^{+} =$ 1). Поэтому члены M-го порядка в правой части (9) не могут содержать функций Φ порядка выше (M-1). Таким образом, значения Φ^{n}_{M} для аргументов, допускающих разбиение (7а), определяются из системы (9) через уже известные, по допущению, функции меньших порядков. Можно показать, что условие унитарности (10) удовлетворится при этом автоматически. Нам остается определить лишь значения Φ^{n}_{M} для аргументов, не допускающих разбиения (7а).

Но совокупность аргументов $\{x_1, \dots, x_n\}$ не допускает ни одного разбиения (7а) только тогда, когда все эти аргументы совпадают. Иными словами, система (9) определяет Φ_M^n по заданным $\Phi_m^{n'}$, $m < M$, с точностью до функции, отличной от нуля лишь при совпадении всех аргументов. Такая функция должна представлять собой линейную комбинацию δ – функций и их производных. Поэтому ее Фурье-образ будет полиномом относительно $p_1, \dots, p_n$, симметричным в этих переменных. В силу допущения о степени роста функций $\tilde{\Phi}^n(p)$, степень этого полинома не может превосходить соответствующего индекса роста $\Omega(n)$; то есть для его задания достаточно фиксировать конечное число констант (условие унитарности (10) определит нам у каждой из этих констант либо вещественную, либо мнимую часть).

Поскольку для перенормируемой теории можно задать не более конечного числа неотрицательных индексов роста (а при отрицательном индексе роста произвольный полином должен быть равен нулю), то и суммарное число констант, которые надо задать при построении M -го приближения по предыдущим, будет конечным. Наконец, в силу того, что в наших допущениях индекс роста не зависит от порядка приближения, можно, как и обычно при перенормировочных рассуждениях, просуммировать возникающие в каждом приближении константы, сведя суммарное, нужное для построения теории, число констант к конечному числу.

Последнее рассуждение, связанное с гипотетической сходимостью ряда (11), можно без труда обойти. Именно, вместо того, чтобы задавать значения возникающих в каждом приближении постоянных, можно фиксировать значения функций $\tilde{\Phi}^n(p)$ для n, которым отвечают неотрицательные степени роста, в стольких точках, сколько имеется коэффициентов у соответствующего полинома, и после этого требовать выполнения этой нормировки в каждом порядке теории возмущений. Такая возможность будет отвечать работе с перенормированными величинами при обычном подходе.

Например, если потребовать, чтобы при $n = 2$ индекс роста равнялся бы 2, для $n = 3$ и $n = 4$ равнялся 0, а остальные индексы роста были бы отрицательны, то мы придем к теории самодействующего скалярного поля, имеющего тройное и четверное взаимодействие без производных. В теории будут четыре постоянных. Две из них (соответствующие $n = 2$) мы фиксируем, потребовав, чтобы не было перенормировок массы и волновой функции. Две другие (для $n = 3$

и $n = 4$) будут заданы, если мы фиксируем значение "тройного" и "четверного" зарядов при некоторых фиксированных наборах импульсов.

5. В заключение я хочу выразить глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову, которому принадлежат инициатива и идея этого исследования, а также поблагодарить М.К.Поливанова за ценную дискуссию.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 июня 1960 года.

Литература

1. H. Lehmann, Nuovo Cim. 11, 342 /1954/
2. H. Lehmann, K. Zimanzik und W. Zimmermann. Nuovo Cim. 1, 205 /1955/.
3. W. Heisenberg, Zs. f. Phys. 120, 513; 673 /1943/
4. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев, М.К.Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., Физматгиз (1958).
5. Н.Н.Боголюбов. Изв.АН СССР, сер.физ. 19, 237 (1955).