

18
Б-64
552

29



В.А. Бирюков, В.И. Данилов

Д - 552

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ КАТУШКИ

С ТОКОМ

Ж.Т.Ф., 1961, т.31, в.4, с.428-435.

В.А. Бирюков, В.И. Данилов

Д - 552

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ КАТУШКИ
С ТОКОМ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

724/7 up

Суммированием магнитных полей элементарных токов, подчиняющихся закону Био-Савара, получены строгие выражения составляющих магнитного поля обтекаемой током прямоугольной катушки конечных размеров. Рассматриваются некоторые частные случаи.

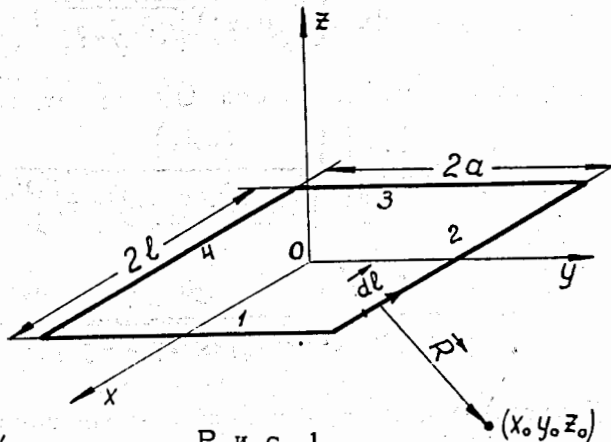
Вопрос о расчете магнитного поля, создаваемого катушками с током, обсуждается в научной литературе давно. Интерес к нему вполне понятен: такие расчеты необходимы при конструировании ряда измерительных приборов, магнитных спектрометров, а также находят применение при формировании магнитных полей ускорителей заряженных частиц и т.д. Из работ, знакомых авторам, можно указать книгу Б.Хэга^{/1/}, статьи А. Виганда^{/2/}, И.И. Пеккера^{/3/} и С.Я. Явара и др.^{/4/}.

Использование в отмеченных работах различных методов позволило или рассмотреть частные случаи, или получить выражения, пригодные для численного интегрирования.

Авторам настоящей работы представлялось целесообразным как для теоретического анализа, так и для практических расчетов получить строгое решение задачи о поле многослойной катушки конечных размеров, что и было выполнено для катушки прямоугольного сечения. При этом в качестве исходных предпосылок использован, как и в работе^{/3/}, закон Био-Савара.

1. Поле витка с током

Расположим обтекаемый ток виток бесконечно тонкого сечения в плоскости $z = 0$ прямоугольной системы координат так, чтобы ось Oz проходила через центр витка, стороны 1 и 3 размером $2a$ были параллельны оси Oy , а стороны 2 и 4 размером $2l$ - оси Ox /рис.1/.



Р и с. 1

Если обозначить через \vec{R} радиус - вектор, направленный от элемента витка $d\vec{l}$ в точку наблюдения (x_0, y_0, z_0) , то на основании закона Био-Савара магнитное поле, создаваемое этим элементом, можно записать как

$$d\vec{H} = \frac{i}{4\pi R^3} [d\vec{l} \times \vec{R}]. \quad //1/$$

При этом компоненты поля вдоль осей будут иметь вид:

$$dH_x = \frac{i}{4\pi R^3} (dl_y R_z),$$

$$dH_y = \frac{i}{4\pi R^3} (-dl_x R_z),$$

$$dH_z = \frac{i}{4\pi R^3} (dl_x R_y - dl_y R_x),$$

/1a/

т.к. в выбранной нами системе координат $dl_z = 0$. Абсолютная величина радиуса-вектора равна $R = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}$, причем для точек рассматриваемого витка $z = 0$.

Из /1/ следует, что составляющую вдоль оси OX будет иметь лишь поле, создаваемое сторонами витка 1 и 3:

$$H_x = \frac{iz_0}{4\pi} \left\{ \int_{-a}^a \frac{dy}{[(x_0 - l)^2 + (y_0 - y)^2 + z_0^2]^{3/2}} + \int_{-a}^a \frac{(-dy)}{[(x_0 + l)^2 + (y_0 - y)^2 + z_0^2]^{3/2}} \right\} =$$

$$= -\frac{iz_0}{4\pi} \left\{ \left[\frac{\beta}{(\alpha^2 + z_0^2) \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + z_0^2}} \right]_{\substack{\alpha_2 = x_0 - l \\ \alpha_1 = x_0 + l}} \right\}_{\substack{\beta_2 = y_0 - a \\ \beta_1 = y_0 + a}}$$

/2/

Составляющую вдоль оси OY будет иметь поле, создаваемое токами 2 и 4:

$$H_y = -\frac{iz_0}{4\pi} \left\{ \int_{-l}^l \frac{(-dx)}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 - a)^2 + z_0^2]^{3/2}} + \int_{-l}^l \frac{dx}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 + a)^2 + z_0^2]^{3/2}} \right\} =$$

$$= -\frac{iz_0}{4\pi} \left\{ \left[\frac{\alpha}{(\beta^2 + z_0^2) \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + z_0^2}} \right]_{\substack{\alpha_2 = x_0 - l \\ \alpha_1 = x_0 + l}} \right\}_{\substack{\beta_2 = y_0 - a \\ \beta_1 = y_0 + a}}$$

/3/

Естественно, z -компонента магнитного поля будет суммой слагающих от всех четырех сторон витка. В соответствии с /1a/ получаем:

$$H_z = \frac{i}{4\pi} \left\{ - (x_0 - l) \int_{-a}^a \frac{dy}{[(x_0 - l)^2 + (y_0 - y)^2 + z_0^2]^{3/2}} + (y_0 - a) \int_{-l}^l \frac{(-dx)}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 - a)^2 + z_0^2]^{3/2}} - \right.$$

$$\left. - (x_0 + l) \int_{-a}^a \frac{(-dy)}{[(x_0 + l)^2 + (y_0 - y)^2 + z_0^2]^{3/2}} + (y_0 + a) \int_{-l}^l \frac{dx}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 + a)^2 + z_0^2]^{3/2}} \right\} =$$

$$= \frac{i}{4\pi} \left\{ \left[\frac{\alpha\beta}{(\beta^2+z_0^2)\sqrt{\alpha^2+\beta^2+z_0^2}} + \frac{\alpha\beta}{(\alpha^2+z_0^2)\sqrt{\alpha^2+\beta^2+z_0^2}} \right] \begin{matrix} \alpha_2 = x_0 - l \\ \alpha_1 = x_0 + l \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \beta_2 = y_0 - a \\ \beta_1 = y_0 + a \end{matrix} \quad /4/$$

Здесь, как и далее, α и β являются пределами определенных интегралов, так что

$$\left\{ [f(\alpha, \beta)]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \right\}_{\beta_1}^{\beta_2} = f(\alpha_2, \beta_2) + f(\alpha_1, \beta_1) - f(\alpha_2, \beta_1) - f(\alpha_1, \beta_2).$$

Заметим, что в сумме /4/ первые четыре члена вида $\frac{\alpha\beta}{(\beta^2+z_0^2)\sqrt{\alpha^2+\beta^2+z_0^2}}$ описывают поле токов 2 и 4, параллельных оси OX, остальные четыре - токов 1 и 3.

Коэффициент пропорциональности в формулах /2/-/4/ и далее соответствует выбранной системе единиц MKSM, так что напряженность поля выражается в $a/\text{см}$, ток i - в амперах, а все линейные величины - в см.

2. Поле катушки бесконечно тонкого сечения

Магнитное поле прямоугольной катушки бесконечно тонкого сечения можно определить как сумму полей, создаваемых отдельными одинаковыми витками. Допустим, что обмотка катушки непрерывна, так что ток можно считать распределенным с равной плотностью по высоте катушки и текущим по виткам перпендикулярно оси OZ, являющейся осью катушки. По элементарной катушке высотой dz протекает ток $i = j dz$. Здесь j есть линейная плотность тока, определяемая как $j = \frac{iW}{2h}$, где i - ток, протекающий в обмотке, W - число витков, а $2h$ - высота катушки. Начало системы координат выберем так, чтобы плоскость XOY проходила через середину катушки. При этих определениях составляющие магнитного поля катушки размером $2l \times 2a$ находятся интегрированием выражения /2/-/4/ по высоте катушки:

$$H_x = -\frac{j}{4\pi} \left\{ \left[\int_{-h}^h \frac{\rho(z_0-z) dz}{[\alpha^2+(z_0-z)^2] \sqrt{\alpha^2+\beta^2+(z_0-z)^2}} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \right\}_{\beta_1}^{\beta_2} =$$

$$= -\frac{j}{4\pi} \left\{ \left[\left(\operatorname{arsh} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\eta^2}} \right) \right]_{\alpha_1=\alpha_0+l}^{\alpha_2=\alpha_0-l} \right\}_{\beta_1=y_0+a}^{\beta_2=y_0-a} \left. \begin{matrix} \eta_2=z_0-h \\ \eta_1=z_0+h \end{matrix} \right\} \quad /5/$$

$$H_y = -\frac{j}{4\pi} \left\{ \left[\left(\operatorname{arsh} \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2+\eta^2}} \right) \right]_{\alpha_1=\alpha_0+l}^{\alpha_2=\alpha_0-l} \right\}_{\beta_1=y_0+a}^{\beta_2=y_0-a} \left. \begin{matrix} \eta_2=z_0-h \\ \eta_1=z_0+h \end{matrix} \right\} \quad /6/$$

$$H_z = \frac{j}{4\pi} \left[\left(\int_{-h}^h \frac{\alpha\beta dz}{[\beta^2+(z_0-z)^2] \sqrt{\alpha^2+\beta^2+(z_0-z)^2}} + \int_{-h}^h \frac{\alpha\beta dz}{[\alpha^2+(z_0-z)^2] \sqrt{\alpha^2+\beta^2+(z_0-z)^2}} \right) \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left. \begin{matrix} \beta_2 \\ \beta_1 \end{matrix} \right\}_{\eta_1}^{\eta_2} = \quad /6a/$$

$$= -\frac{j}{4\pi} \left\{ \left[\left(\operatorname{arctg} \frac{\alpha\eta}{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\eta^2}} + \operatorname{arctg} \frac{\beta\eta}{\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\eta^2}} \right) \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \right\}_{\beta_1}^{\beta_2} \left. \begin{matrix} \eta_2 \\ \eta_1 \end{matrix} \right\}$$

В соответствии с замечанием, сделанным относительно /4/, в выражении /6a/ первые 8 членов вида $\operatorname{arctg} \frac{\alpha\eta}{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\eta^2}}$ описывают поле, создаваемое токами, протекающими по сторонам катушки 2 и 4, а остальные 8 — по сторонам 1 и 3, параллельным оси OY. В дальнейшем нам удобно сохранить запись поля в виде /6a/. Для непосредственного же вычисления поля катушки это выражение можно преобразовать, просуммировав арктангенсы. Окончательно имеем:

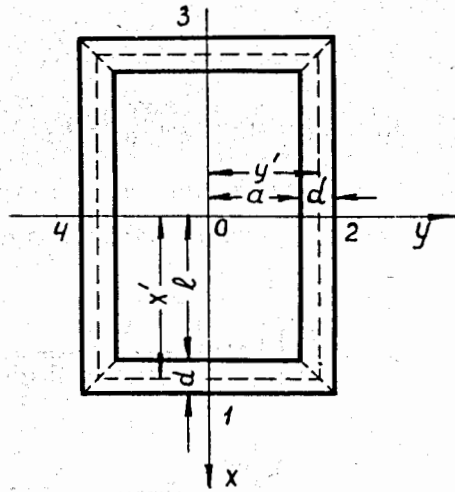
$$H_x = -\frac{j}{4\pi} \left\{ \left[\left(\operatorname{arctg} \frac{\alpha\beta}{\eta\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\eta^2}} \right) \right]_{\alpha_1=\alpha_0+l}^{\alpha_2=\alpha_0-l} \right\}_{\beta_1=y_0+a}^{\beta_2=y_0-a} \left. \begin{matrix} \eta_2=z_0-h \\ \eta_1=z_0+h \end{matrix} \right\} \quad /7/$$

3. Поле катушки бесконечно малой высоты

Вычислим магнитное поле тока, протекающего по многовитковой катушке

^{x/} В аналогичной форме в работе ^{/5/} приводится z-компонента поля равномерно намагниченного железного бруска тех же размеров, полученная из скалярного потенциала.

бесконечно малой высоты, толщина обмотки которой равна d . Поле такой катушки можно определить как сумму полей витков, постепенно увеличивающихся размеров, лежащих в плоскости XOY вплотную друг к другу. При тех же предположениях относительно распределения токов, что и в § 2, /здесь $i = j dx'$ и $i = j dy'$ / для определения компонент поля можно проинтегрировать по толщине катушки выражения вида /2/-/4/ для витка с размерами $2x'$ и $2y'$. Характер интегрирования рассмотрим на примере одного из членов суммы /2/ :



Р и с. 2

$$-\frac{jz_0}{4\pi} \int_{\ell}^{\ell+d} \frac{y_0 - y'(x')}{\sqrt{[(x_0 - x')^2 + z_0^2] \sqrt{(x_0 - x')^2 + [y_0 - y'(x')]^2 + z_0^2}}} dx'.$$

При суммировании витков по толщине катушки нужно иметь в виду, что размеры сторон витков меняются, поэтому в последнем выражении y' является функцией x' , которая, как легко видеть из рис. 2, для прямоугольной катушки имеет простой вид:

$$y' = a + (x' - \ell).$$

Подставив это выражение в последний интеграл, получим

$$-\frac{jz_0}{4\pi} \int_{\ell}^{\ell+d} \frac{(y_0 - a) - (x' - \ell)}{\sqrt{[(x_0 - x')^2 + z_0^2] \sqrt{(x_0 - x')^2 + [(y_0 - a) - (x' - \ell)]^2 + z_0^2}}} dx',$$

а, производя замену переменных $x_0 - x' = \varphi'$, сведем к интегралу

$$\frac{jz_0}{4\pi} \int_{x_0 - \ell}^{x_0 - \ell - d} \frac{K_1' + \varphi'}{(\varphi'^2 + z_0^2) \sqrt{(K_1' + \varphi')^2 + \varphi'^2 + z_0^2}} d\varphi' = \frac{j}{4\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{K_1' + \varphi' - z_0^2}{z_0 \sqrt{(K_1' + \varphi')^2 + \varphi'^2 + z_0^2}} \right]_{\varphi' = x_0 - \ell}^{\varphi' = x_0 - \ell - d},$$

где $K_1' = [(y_0 - a) - (x_0 - \ell)]$.

Интегрирование остальных членов /2/ выполняется таким же образом.

Если обозначить:

$$\begin{aligned} K_1' &= [(y_0 - a) - (x_0 - l)] = -K_1, & K_3' &= -[(y_0 + a) + (x_0 - l)] = K_3, \\ K_2' &= [(y_0 + a) - (x_0 + l)] = -K_2, & K_4' &= -[(y_0 - a) + (x_0 + l)] = K_4, \end{aligned} \quad /8/$$

то X -составляющая поля катушки может быть представлена как сумма элементарных функций, описывающих, в соответствии с замечанием к /4/, поля токов 1 и 3:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{j}{4\pi} \left\{ \left[\operatorname{arctg} \frac{K_1' \psi' - z_0^2}{z_0 \sqrt{(K_1' + \psi')^2 + \psi'^2 + z_0^2}} + \operatorname{arctg} \frac{K_3' \psi' - z_0^2}{z_0 \sqrt{(K_3' + \psi')^2 + \psi'^2 + z_0^2}} \right]_{\psi'_1 = x_0 - l - d}^{\psi'_1 = x_0 - l} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\operatorname{arctg} \frac{K_2' \psi' - z_0^2}{z_0 \sqrt{(K_2' + \psi')^2 + \psi'^2 + z_0^2}} + \operatorname{arctg} \frac{K_4' \psi' - z_0^2}{z_0 \sqrt{(K_4' + \psi')^2 + \psi'^2 + z_0^2}} \right]_{\psi'_1 = x_0 + l}^{\psi'_1 = x_0 + l + d} \right\} \end{aligned} \quad /9/$$

Производя аналогичное интегрирование по dy' членов суммы /3/, относящихся к токам 2 и 3, с учетом того, что

$$x' = l + (y' - a),$$

получим y -составляющую поля:

$$H_y = \frac{j}{4\pi} \left\{ \left[f_{xy}(K_1, \varphi) + f_{xy}(K_4, \varphi) \right]_{\varphi_1 = y_0 - a - d}^{\varphi_1 = y_0 - a} - \left[f_{xy}(K_2, \varphi) + f_{xy}(K_3, \varphi) \right]_{\varphi_1 = y_0 + a}^{\varphi_1 = y_0 + a + d} \right\}, \quad /10/$$

где для краткости обозначено:

$$f_{xy}(K, \varphi) = \operatorname{arctg} \frac{K\varphi - z_0^2}{z_0 \sqrt{(K + \varphi)^2 + \varphi^2 + z_0^2}}.$$

При вычислении Z -составляющей катушки путем интегрирования суммы /4/ необходимо учитывать, что интеграл по dx' распространяется лишь на члены, связанные с токами 1 и 3, а интеграл по dy' -токами 2 и 4 /см. замечание к /4/ /. В этом случае H_z является суммой членов вида

$$- \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(K\varphi + \varphi^2) d\varphi}{(\varphi^2 + z_0^2) \sqrt{(K + \varphi)^2 + \varphi^2 + z_0^2}} =$$

$$= \left[\operatorname{arsh} \frac{k+\varphi}{\sqrt{\varphi^2+z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} \frac{k+2\varphi}{\sqrt{k^2+2z_0^2}} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \left[f_2(k, \varphi) \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}, \quad /10a/$$

и в этих обозначениях может быть записано как

$$H_2 = \frac{j}{4\pi} \left\{ \left[f_2(k_1, \varphi) + f_2(k_4, \varphi) \right]_{\varphi_1=y_0-a}^{\varphi_2=y_0-a-d} - \left[f_2(k_2, \varphi) + f_2(k_3, \varphi) \right]_{\varphi_1=y_0+a}^{\varphi_2=y_0+a+d} + \right. \\ \left. + \left[f_2(k'_1, \varphi') + f_2(k'_3, \varphi') \right]_{\varphi'_1=x_0-e}^{\varphi'_2=x_0-e-d} - \left[f_2(k'_2, \varphi') + f_2(k'_4, \varphi') \right]_{\varphi'_1=x_0+e}^{\varphi'_2=x_0+e+d} \right\}, \quad /11/$$

где параметры K даются /8/. При этом для практических расчетов полезно иметь в виду, что

$$\left[\operatorname{arsh} \frac{k_1+2\varphi}{\sqrt{k_1^2+2z_0^2}} \right]_{\varphi_1=y_0-a}^{\varphi_2=y_0-a-d} = \left[\operatorname{arsh} \frac{k'_1+2\varphi'}{\sqrt{k_1'^2+2z_0^2}} \right]_{\varphi'_1}^{\varphi'_2}, \quad \left[\operatorname{arsh} \frac{k_4+2\varphi}{\sqrt{k_4^2+2z_0^2}} \right]_{\varphi_1=y_0-a}^{\varphi_2=y_0-a-d} = - \left[\operatorname{arsh} \frac{k'_4+2\varphi'}{\sqrt{k_4'^2+2z_0^2}} \right]_{\varphi'_1}^{\varphi'_2}, \\ \left[\operatorname{arsh} \frac{k_2+2\varphi}{\sqrt{k_2^2+2z_0^2}} \right]_{\varphi_1=y_0+a}^{\varphi_2=y_0+a+d} = \left[\operatorname{arsh} \frac{k'_2+2\varphi'}{\sqrt{k_2'^2+2z_0^2}} \right]_{\varphi'_1}^{\varphi'_2}, \quad - \left[\operatorname{arsh} \frac{k_3+2\varphi}{\sqrt{k_3^2+2z_0^2}} \right]_{\varphi_1=y_0+a}^{\varphi_2=y_0+a+d} = \left[\operatorname{arsh} \frac{k'_3+2\varphi'}{\sqrt{k_3'^2+2z_0^2}} \right]_{\varphi'_1}^{\varphi'_2},$$

благодаря чему число подлежащих вычислению слагаемых в сумме /11/ уменьшается.

Рассмотренные примеры охватывают значительное число практических задач. В самом деле, описанный в § 1 случай может быть распространен также на катушку со многими витками при условии, что сечение обмотки мало по сравнению с R . Формулы /5/-/7/ можно применять и для многослойной катушки, толщина обмотки которой мала по сравнению с другими размерами. Решение же, приведенное в § 3, дает достаточную практическую точность при вычислении поля многовитковой катушки, высота которой невелика сравнительно с размерами ℓ и a и будет тем точнее, чем дальше от катушки берется точка наблюдения / x_0, y_0, z_0 /.

Однако как для проведения оценок, так и для анализа ряда других задач, безусловно представляет интерес определить составляющие магнитного поля катушки конечных размеров.

4. Поле катушки конечных размеров

Магнитное поле прямоугольной катушки с внутренними размерами b и a , высотой $2h$ и толщиной обмотки d можно определить, с одной стороны, как сумму полей катушек бесконечно тонкого сечения высотой $2h$, рассмотренных в § 2, а с другой — как сумму полей катушек бесконечно малой высоты толщиной d / § 3/. Очевидно, что как в первом, так и во втором случае мы получим один и тот же результат. Рассмотрим последний случай, когда тонкие катушки уложены по высоте равномерно, с такой же плотностью, как и витки в этих катушках, так что мы можем считать ток распределенным с одинаковой плотностью по всему сечению непрерывной обмотки. В этом случае линейная плотность тока, протекающего по катушке высотой $d z$ равна

$$j = j^* dz,$$

где $j^* = \frac{iW}{2hd}$ есть плотность тока на единицу площади сечения обмотки.

Если, по-прежнему, плоскость XOY проходит через середину катушки, то для определения поля катушки высотой $2h$ мы можем найти интегралы выражений вида /9/-/11/, записанных для катушки высотой $d z$.

Составляющие H_x и H_y будут определяться интегралами типа

$$\int_{-h}^h \arcsin \frac{k\varphi - (z_0 - z)^2}{(z_0 - z) \sqrt{(k+\varphi)^2 \varphi^2 + (z_0 - z)^2}} dz = - \int_{z_0+h}^{z_0-h} \arcsin \frac{k\varphi - \eta^2}{\eta \sqrt{(k+\varphi)^2 \varphi^2 + \eta^2}} d\eta = \quad /11a/$$

$$= - \left\{ \eta \arcsin \frac{k\varphi - \eta^2}{\eta \sqrt{(k+\varphi)^2 \varphi^2 + \eta^2}} - \varphi \operatorname{arsh} \frac{k+\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \eta^2}} - \frac{k}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} \frac{k+2\varphi}{\sqrt{k^2 + 2\eta^2}} \right\}_{\eta_1 = z_0+h}^{\eta_2 = z_0-h} =$$

$$= - \left\{ F_{xy}(k, \varphi, \eta) \right\}_{\eta_1}^{\eta_2}.$$

Интегрируя таким способом все члены /9/ и /10/, получим

$$H_x = -\frac{j^*}{4\pi} \left\{ \left[F_{xy}(K_1, \psi', \eta) + F_{xy}(K_3, \psi', \eta) \right]_{\psi_1' = x_0 - e}^{\psi_2' = x_0 - e - d} - \right. \quad /12/$$

$$\left. - \left[F_{xy}(K_2, \psi', \eta) + F_{xy}(K_4, \psi', \eta) \right]_{\psi_1' = x_0 + e}^{\psi_2' = x_0 + e + d} \right\} \left. \begin{array}{l} \eta_2 = z_0 - h \\ \eta_1 = z_0 + h \end{array} \right\},$$

$$H_y = -\frac{j^*}{4\pi} \left\{ \left[F_{xy}(K_1, \psi, \eta) + F_{xy}(K_4, \psi, \eta) \right]_{\psi_1 = y_0 - a}^{\psi_2 = y_0 - a - d} - \right. \quad /13/$$

$$\left. - \left[F_{xy}(K_2, \psi, \eta) + F_{xy}(K_3, \psi, \eta) \right]_{\psi_1 = y_0 + a}^{\psi_2 = y_0 + a + d} \right\} \left. \begin{array}{l} \eta_2 = z_0 - h \\ \eta_1 = z_0 + h \end{array} \right\},$$

где F_{xy} определяются /11а/, а параметры K даются /8/.

Для определения H_z необходимо найти сумму интегралов вида /см.10а/

$$\begin{aligned} & - \int_{z_0+h}^{z_0-h} \left(\operatorname{arsh} \frac{k+\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \eta^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} \frac{k+2\varphi}{\sqrt{k^2 + 2\eta^2}} \right) d\eta = \\ & = \left\{ -\eta \operatorname{arsh} \frac{k+\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \eta^2}} + \varphi \operatorname{arctg} \frac{(k+\varphi)\eta}{\varphi \sqrt{(k+\varphi)^2 + \varphi^2 + \eta^2}} - \frac{k}{2} \operatorname{arsh} \frac{\eta}{\sqrt{(k+\varphi)^2 + \varphi^2}} + \right. \\ & \left. + \frac{\eta}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} \frac{k+2\varphi}{\sqrt{k^2 + 2\eta^2}} - \frac{k}{2} \operatorname{arctg} \frac{(k+2\varphi)\eta}{k \sqrt{(k+\varphi)^2 + \varphi^2 + \eta^2}} \right\} \left. \begin{array}{l} \eta_2 = z_0 - h \\ \eta_1 = z_0 + h \end{array} \right\}. \quad /13а/ \end{aligned}$$

Составляющая поля H_z при этом может быть представлена как

$$\begin{aligned} H_z = & \frac{j^*}{4\pi} \left\{ \left[F_z(k, \varphi, \eta) + F_z(K_4, \varphi, \eta) \right]_{\psi_1}^{\psi_2} - \left[F_z(k_2, \psi, \eta) + F_z(K_3, \psi, \eta) \right]_{\psi_1}^{\psi_2} + \right. \\ & \left. + \left[F_z(k_1, \psi', \eta) + F_z(K_3, \psi', \eta) \right]_{\psi_1'}^{\psi_2'} - \left[F_z(k_2, \psi', \eta) + F_z(K_4, \psi', \eta) \right]_{\psi_1'}^{\psi_2'} \right\} \left. \begin{array}{l} \eta_2 \\ \eta_1 \end{array} \right\}, \quad /14/ \end{aligned}$$

где

$$F_z(k, \varphi, \eta) = -\eta \operatorname{arsh} \frac{k+\varphi}{\sqrt{\varphi^2+\eta^2}} + \varphi \operatorname{arctg} \frac{(k+\varphi)\eta}{\varphi\sqrt{(k+\varphi)^2+\varphi^2+\eta^2}} + \quad /14a/$$

$$+ \frac{\eta}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} \frac{k+2\varphi}{\sqrt{k^2+2\eta^2}} - \frac{k}{2} \operatorname{arctg} \frac{(k+2\varphi)\eta}{k\sqrt{(k+\varphi)^2+\varphi^2+\eta^2}}.$$

Заметим, что в /14/ не содержатся члены типа $\frac{k}{2} \operatorname{arsh} \frac{\eta}{\sqrt{(k+\varphi)^2+\varphi^2}}$, которые имеются в интеграле /13a/. Нетрудно убедиться, что при суммировании /14/ эти члены с одинаковыми аргументами входят попарно с противоположными знаками и поэтому выпадают. Для практических расчетов выражение /14/ можно значительно упростить приведением подобных членов. Можно убедиться, что члены /14a/ вида $\frac{\eta}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} \frac{k+2\varphi}{\sqrt{k^2+2\eta^2}}$ с одинаковыми аргументами входят в сумму /14/ попарно с одинаковыми знаками. То же самое относится к членам типа $\frac{k}{2} \operatorname{arctg} \frac{(k+2\varphi)\eta}{k\sqrt{(k+\varphi)^2+\varphi^2+\eta^2}}$. Поэтому, если ввести обозначения

$$f_{z1}(k, \varphi, \eta) = -\eta \operatorname{arsh} \frac{k+\varphi}{\sqrt{\varphi^2+\eta^2}} + \varphi \operatorname{arctg} \frac{(k+\varphi)\eta}{\varphi\sqrt{(k+\varphi)^2+\varphi^2+\eta^2}},$$

$$f_{z2}(k, \varphi, \eta) = \frac{\eta}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} \frac{k+2\varphi}{\sqrt{k^2+2\eta^2}} - k \operatorname{arctg} \frac{(k+2\varphi)\eta}{k\sqrt{(k+\varphi)^2+\varphi^2+\eta^2}},$$

$$f_{z1} + f_{z2} = f_z^0(k, \varphi, \eta),$$

то \bar{z} - компонента поля окончательно имеет вид:

$$H_z = \frac{j^*}{4\pi} \left\{ \left[f_z^0(k_1, \varphi, \eta) + f_z^0(k_2, \varphi, \eta) \right]_{\varphi_1 = \varphi_0 - a - d}^{\varphi_2 = \varphi_0 - a - d} - \left[f_z^0(k_2, \varphi, \eta) + f_z^0(k_3, \varphi, \eta) \right]_{\varphi_1 = \varphi_0 + a}^{\varphi_2 = \varphi_0 + a} \right. \quad /15/$$

$$\left. + \left[f_{z1}(k'_1, \varphi', \eta) + f_{z1}(k'_3, \varphi', \eta) \right]_{\varphi'_1 = \varphi_0 - e}^{\varphi'_2 = \varphi_0 - e - d} - \left[f_{z1}(k'_2, \varphi', \eta) + f_{z1}(k'_4, \varphi', \eta) \right]_{\varphi'_1 = \varphi_0 + e}^{\varphi'_2 = \varphi_0 + e + d} \right\} \eta_2 = z_0 - h,$$

$$\eta_1 = z_0 + h,$$

где k определяются /8/.

5. Некоторые частные задачи

Полученные в предыдущих разделах решения позволяют легко определить

магнитные поля для некоторых специальных видов катушек, в частности для бесконечно вытянутых катушек. Получаемые в этих случаях более простые выражения представляют не только теоретический интерес, но могут быть использованы и для практических приближенных расчетов, область применимости которых в каждом случае нетрудно установить.

А. Поле неограниченно вытянутого вдоль оси Oy витка определяется переходом при $a \rightarrow \infty$ в формулах /2/-/4/:

$$H_x(a \rightarrow \infty) = \frac{i}{4\pi} \left(\frac{2z_0}{\alpha^2 + z_0^2} \right) \left. \begin{array}{l} \alpha_2 = x_0 - l \\ \alpha_1 = x_0 + l \end{array} \right\} /16/$$

$$H_y(a \rightarrow \infty) = 0,$$

$$H_z(a \rightarrow \infty) = -\frac{i}{4\pi} \left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 + z_0^2} \right) \left. \begin{array}{l} \alpha_2 = x_0 - l \\ \alpha_1 = x_0 + l \end{array} \right\}$$

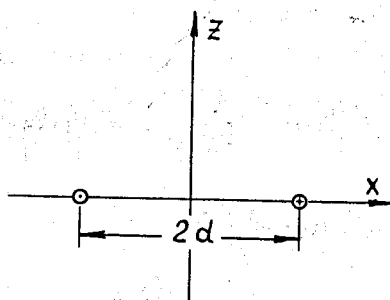


Рис. 3

Легко видеть, что в этом случае поле является просто суммой полей двух параллельных проводников с противоположно направленными токами, причем подстановка $\alpha_1 = x_0 + l$ дает поле одного проводника, а $\alpha_2 = x_0 - l$ - поле другого /рис. 3/.

Б. Для катушки конечного сечения, неограниченно вытянутой вдоль оси Oy , можно получить составляющие почленным предельным переходом в /13/-/14/:

$$H_x(a \rightarrow \infty) = \frac{i}{4\pi} \left\{ \left[\psi' \ln(\psi'^2 + \eta^2) + 2\eta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\psi'} \right] \left. \begin{array}{l} \psi'_2 = x_0 - l - d \\ \psi'_1 = x_0 - l \end{array} \right\} + \left[\psi' \ln(\psi'^2 + \eta^2) + 2\eta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\psi'} \right] \left. \begin{array}{l} \psi'_2 = x_0 + l + d \\ \psi'_1 = x_0 + l \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \eta_2 = z_0 - h \\ \eta_1 = z_0 + h \end{array} \right\},$$

$$H_y(a \rightarrow \infty) = 0,$$

/17/

$$H_z(a \rightarrow \infty) = -\frac{i}{4\pi} \left\{ \left[\eta \ln(\psi'^2 + \eta^2) + 2\psi' \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\psi'} \right] \left. \begin{array}{l} \psi'_2 = x_0 - l - d \\ \psi'_1 = x_0 - l \end{array} \right\} + \left[\eta \ln(\psi'^2 + \eta^2) + 2\psi' \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\psi'} \right] \left. \begin{array}{l} \psi'_2 = x_0 + l + d \\ \psi'_1 = x_0 + l \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \eta_2 = z_0 - h \\ \eta_1 = z_0 + h \end{array} \right\}.$$

Отсюда легко получить распределение поля, создаваемого одной из вытянутых сторон катушки, центр поперечного сечения которой площадью $2d \times 2h$ помещен в начало координат /рис. 4/. Произведя замену

$$x_0 - l \rightarrow x_0 + d,$$

$$x_0 - l - d \rightarrow x_0 - d$$

в членах сумм /17/, относящихся к одной из сторон, именно стороне

$$\begin{cases} \varphi'_1 = x_0 - l \\ \varphi'_2 = x_0 - l - d \end{cases},$$

получим:

$$H_x(a \rightarrow \infty) = \frac{j}{4\pi} \left\{ \left[\varphi'_1 \ln(\varphi'^2 + \eta^2) + 2\eta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\varphi'_1} \right]_{\varphi'_1 = x_0 - d}^{\varphi'_2 = x_0 - l} \right\}_{\eta_2 = z_0 - h, \eta_1 = z_0 + h},$$

$$H_y(a \rightarrow \infty) = 0,$$

$$H_z(a \rightarrow \infty) = -\frac{j}{4\pi} \left\{ \left[\eta \ln(\varphi'^2 + \eta^2) + 2\varphi' \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\varphi'_1} \right]_{\varphi'_1 = x_0 + d}^{\varphi'_2 = x_0 - d} \right\}_{\eta_2 = z_0 - h, \eta_1 = z_0 + h}.$$

Такое же решение получено ранее /см., например, /1/ / из векторного потенциала поля для бесконечно длинной токовой шины.

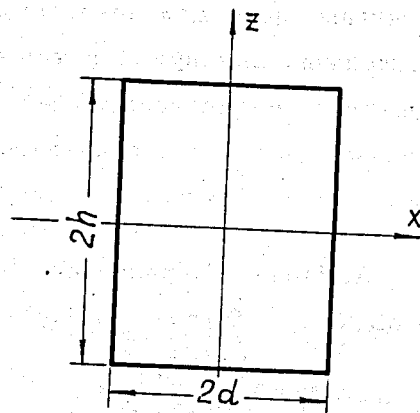
В. Составляющие поля вытянутой вдоль оси Oy катушки бесконечно тонкого сечения высотой $2h$ получаются предельным переходом при $a \rightarrow \infty$ в выражения /5/-/7/:

$$H_x(a \rightarrow \infty) = -\frac{j}{4\pi} \left\{ \left[\ln(\alpha^2 + \eta^2) \right]_{\alpha_1 = x_0 + l}^{\alpha_2 = x_0 - l} \right\}_{\eta_2 = z_0 - h, \eta_1 = z_0 + h},$$

$$H_y(a \rightarrow \infty) = 0,$$

$$H_z(a \rightarrow \infty) = \frac{j}{4\pi} \left\{ \left[2 \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\alpha} \right]_{\alpha_1 = x_0 + l}^{\alpha_2 = x_0 - l} \right\}_{\eta_2 = z_0 - h, \eta_1 = z_0 + h}.$$

Преобразованием координат в этих выражениях или непосредственно предельным переходом при $a \rightarrow \infty$ в /9/-/11/ определяются компоненты поля вытянутой катушки бесконечно малой высоты с обмоткой толщиной d :



Р и с. 4

/18/

/19/

$$H_x(a \rightarrow \infty) = -\frac{j}{4\pi} \left\{ \left[2 \operatorname{arctg} \frac{\psi'}{z_0} \right]_{\psi'_1 = x_0 - l}^{\psi'_2 = x_0 - l - d} + \left[2 \operatorname{arctg} \frac{\psi'}{z_0} \right]_{\psi'_1 = x_0 + l}^{\psi'_2 = x_0 + l + d} \right\},$$

$$H_y(a \rightarrow \infty) = 0,$$

$$H_z(a \rightarrow \infty) = \frac{j}{4\pi} \left\{ \left[\ln(\psi'^2 + z_0^2) \right]_{\psi'_1 = x_0 - l}^{\psi'_2 = x_0 - l - d} + \left[\ln(\psi'^2 + z_0^2) \right]_{\psi'_1 = x_0 + l}^{\psi'_2 = x_0 + l + d} \right\}.$$

/20/

Проделав такие же преобразования, как и в п. Б, можно найти поле одной из вытянутых сторон такой катушки с обмоткой толщиной $2d$ /рис.4/:

$$H_x(a \rightarrow \infty) = -\frac{j}{4\pi} \left[2 \operatorname{arctg} \frac{\psi'}{z_0} \right]_{\psi'_1 = x_0 + d}^{\psi'_2 = x_0 - d},$$

$$H_y(a \rightarrow \infty) = 0,$$

/21/

$$H_z(a \rightarrow \infty) = \frac{j}{4\pi} \left[\ln(\psi'^2 + z_0^2) \right]_{\psi'_1 = x_0 + d}^{\psi'_2 = x_0 - d}.$$

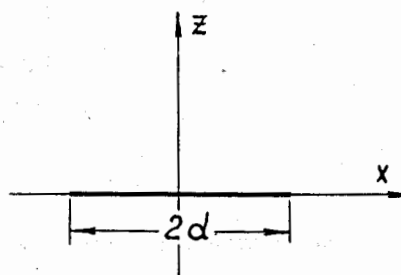


Рис. 5

Эти выражения совпадают с полученными ранее /см., например, /1/ / для тонкого листка, обтекаемого током, распределенным с одинаковой плотностью по поверхности листка.

Г. Поле соленоида неограниченной длины.

Эта задача рассмотрена рядом авторов и решение ее дается в ряде учебников. Мы приводим эту задачу с целью иллюстрации общности полученных результатов.

Поле бесконечно длинного однослойного соленоида можно найти путем предельного перехода $h \rightarrow \infty$ в выражениях /5/-/7/. Находя почленно пределы этих сумм, получим:

$$H_x(h \rightarrow \infty) = H_y(h \rightarrow \infty) = 0,$$

$$H_z(h \rightarrow \infty) = \frac{j}{4\pi} 2 \left[\left(\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} + \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} \right)_{\alpha_1 = x_0 - l}^{\alpha_2 = x_0 - l} \right]_{\beta_1 = y_0 - a}^{\beta_2 = y_0 + a}.$$

Каждая из сумм $\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} + \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$ / равна $+\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$, причем знак зависит от соотношения величин α и β . Нетрудно видеть, что при

этом поле вне соленоида равно нулю, а внутри его - постоянно и равно

$$H_z(h \rightarrow \infty) = j = i n_0, \quad /22/$$

где n_0 - число витков на единицу длины однослойного соленоида.

Аналогичное исследование выражений /12/-/14/ показывает, что для бесконечно длинного соленоида с многослойной обмоткой толщиной d компоненты поля равны:

$$H_x(h \rightarrow \infty) = H_y(h \rightarrow \infty) = 0,$$

$$H_z(h \rightarrow \infty) = \begin{cases} 0 & \text{вне соленоида,} \\ j^* d = i n'_0 d & \text{внутри соленоида,} \end{cases}$$

где n'_0 есть число витков многослойного соленоида, приходящихся на единицу площади сечения обмотки.

В заключение подчеркнем, что строгость соответствия полей реальных катушек величинам, рассчитанным с помощью приведенных в работе формул, обусловлена степенью равномерности распределения плотности тока по сечению обмотки, т.е. степенью постоянства j и j^* .

Л и т е р а т у р а

1. Б. Хэг, Электромагнитные расчеты. ОНТИ НКТП Энергоиздат, Москва-Ленинград, 1934 г.
2. A. Weigand, Elektrotechnik, Н. 12, 605-612 /1952/.
3. И.И. Пеккер, Изв.высш.учуб.завед. МВО СССР, "Электромеханика", № 6, с. 19 /1958/.
4. С.Я. Явар, Е.В. Шпак, Р.М. Минина. ЖЭТФ, 30, 395 /1960/. в. 4
5. В.И. Данилов, О.В.Савченко. ПТЭ, № 3, с. 17 /1959/.

Работа получена издательским отделом
8 июня 1960 г.