ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

П.С. Исаев, М.В. Сэвэрыньский

Д - 550

ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД π- К РАССЕЯНИЯ

Nucl. Phys., 1961, v.22, n4, p.663.

Дубна 1960

П.С. Исаев, М.В. Сэвэрыньский

ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД π-К РАССЕЯНИЯ[x/]

x/ Доложено на Всесоюзной межвузовской конференции по теории квантованных полей и элементарных частиц /Ужгород 12-18 мая 1960 год/.

Аннотация

С помощью двойного представления Мандельстама получены приближенные интегральные уравнения для парциальных амплитуд π -K рассеяния в области низких энергий.

P.S. Isaev, M. Sewerynski

1. Введение

Исследование взаимодействия π-мезонов с K-мезонами представляет интерес не только с чисто теоретической точки зрения, но и с точки зрения "прикладной". Именно π-K взаимодействие входит как неотъемлемая часть при изучении упругих и неупругих процессов взаимодействия K-мезонов с гиперонами, в частности, при рассеянии K-мезонов нуклонами.

В теории возмущений обсуждается два типа взаимодействия.

Взаимодействие

$$K\pi K, \tag{1}$$

представленное на рис. 1, было введено Швингером[1] и детально обсуждено в работах Минами[2] и Пайса[3]. Взаимодействие

$$\bar{K}K\pi\pi, \tag{2}$$

представленное на рис. 2, детально обсуждено в работах Баршая[4].

В настоящее время нет ясности, какой из упомянутых выше видов взаимодействия является более предпочтительным. В пользу взаимодействия типа /2/ можно привести следующее соображение: если считать, что взаимодействие K-мезонов и барионов имеет форму $\bar{Y}KY$, то для того, чтобы теория была перенормируема, необходимо в гамильтониан взаимодействия ввести член $g_{K\pi}\bar{K}K\pi^2$ /аналогично тому как в мезодинамике вводится член $\lambda\varphi^4$ или в мезоэлектродинамике – член $\varepsilon A_\mu A_\mu \pi^2$/.

Анализ экспериментальных данных по K-N рассеянию, проведенный в работах[3,4,5], показал, что в области небольших энергий /до200 Мэв/ имеется хорошее согласие экспериментов с теорией, если использовать взаимодействие /2/ и считать, что константа связи π-K взаимодействия $\sim$ 1-5.

Упомянем еще о результатах Чжоу Гуан-чжао[6] относительно возможных симметричных свойств для π-K-системы. Исходя из гамильтониана в виде:

$$H = H_\pi + H_K + g_{K\pi}\pi_\alpha\pi_\alpha\bar{K}_\lambda K_\lambda, \tag{3}$$

где H_π -гамильтониан, описывающий π-π взаимодействия, H_K -гамильтониан, описывающий K-мезонное взаимодействие, и предполагая инвариантность гамильтониана /3/ относительно вращений в изотопических π-мезонном векторном и K-мезонном изоспинорном пространствах, он получил, что все амплитуды π-K рассеяния без перезарядки равны между собой, все амплитуды π-K рассеяния с перезарядкой равны нулю, и процессы аннигиляции $K+\bar{K}\to n\pi$ происходят только через изоскалярное состояние.

В данной работе π-K взаимодействие изучается методом двойных дисперсионных представлений Мандельстама. В качестве первого этапа исследования в работе выводятся приближенные интегральные уравнения для парциальных амплитуд π-K рассеяния в области низких энергий. Стимулом к изучению π-K взаимодействия методом двойных дисперсионных соотношений послужили: 1/ важность этого взаимодействия при исследовании K-N рассеяния и 2/ работа Ефремова, Мещерякова и Ширкова /7/, в которой были успешно преодолены трудности по устранению кинематических особенностей посредством рассмотрения соответствующих симметризованных и антисимметризованных выражений.

Логическая последовательность процессов для сильно взаимодействующих частиц при изучении π-K рассеяния приведена на рис. 3. π-π рассеяние было подробно исследовано в работах Чу и Мандельстама /8/ и Чу, Мандельстама и Нойеса /9/. В наших уравнениях для π-K рассеяния фазы π-π рассеяния считаются заданными.

Амплитуда π-K рассеяния рассматривается в плоскости комплексной переменной $\vec{q}^{\,2}$ / $\vec{q}^{\,2}$ -импульс в системе центра масс реакции $\pi+K\to\pi+K$ /. Кинематический разрез по $\vec{q}^{\,2}$ в интервале $-M^2\le\vec{q}^{\,2}\le-\mu^2$, где M и μ массы K-мезона и π-мезона, соответственно, устраняется способом, предложенным в работе /7/. Область аналитичности мнимой части амплитуды π-K-рассеяния определяется из представления Мандельстама и на основе теории возмущений в предположении взаимодействия /2/.

Нефизический разрез от реакции $\pi+\pi\to K+\bar{K}$ устраняется с помощью метода Мусхелишвили-Омнеса /10/. Используя далее условие унитарности, мы получили замкнутую систему приближенных интегральных уравнений для амплитуд π-K рассеяния, в которые вошли фазы π-π рассеяния. Приближение заключается в том, что при получении системы интегральных уравнений были учтены лишь ближайшие особенности. Это, естественно, приводит к разумному ограничению низшими парциальными волнами для π-K рассеяния s и p -волнами. Для них получена система интегральных уравнений двумя способами: 1/ для парциальных амплитуд, усредненных по всем углам рассеяния, и 2/ для парциальных амплитуд, взятых для угла рассеяния назад.

2. Амплитуда процесса π-K рассеяния и ее изотопическая структура

Матричные элементы процессов рассеяния

$$\text{I.}\quad \pi + K \to \pi' + K'$$

$$\text{II.}\quad \pi' + K \to \pi + K' \quad .$$

и рождения пар K-мезонов

$$\text{III.}\quad \pi + \pi \to K + \bar{K}$$

могут быть представлены в виде:

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|1 + iT|i\rangle = \delta_{if} + \delta(\Sigma p_i)\frac{i}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{16 p_{10} p_{20} q_{10} q_{20}}\right)^{1/2} T . \qquad /4/$$

В соотношении /4/ Σp_i -сумма 4-х импульсов всех частиц, p_{10} и p_{20} энергия K-мезонов, q_{10} и q_{20} - энергия π-мезонов, T -двухчастичная функция Грина.

Для процесса рассеяния I дифференциальное сечение выражается формулой

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{|\vec{q}_2|}{|\vec{q}_1|}\frac{1}{16 p_{10} p_{20}}|T|^2 \qquad . \qquad /5/$$

В системе центра масс $|\vec{q}_2| = |\vec{q}_1|$, $p_{20} = p_{10} = E_K$ и соотношение /5/ переходит в соотношение $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\frac{1}{8\pi E_K}T\right|^2$. Изотопическая структура амплитуды рассеяния π -мезонов K-мезонами имеет вид:

$$T_{\alpha\beta} = A\,\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}[\tau_\alpha, \tau_\beta]B , \qquad /6/$$

где A и B -скалярные функции, зависящие от скалярных произведений 4-х импульсов p_1, p_2, q_1, q_2.

Связь A и B с изотопическими состояниями π-K системы имеет вид:

$$A = \frac{2T^{3/2} + T^{1/2}}{3}$$

$$B = -\frac{T^{3/2} - T^{1/2}}{3},$$

где $T^{3/2}$ и $T^{1/2}$ –состояния со значением изотопического спина 3/2 и 1/2, соответственно.

Изотопическая структура процесса III совпадает с изотопической структурой процессов I и II , а связь T^{0} и T^{1} /состояний со значениями изотопического спина 0 и 1, соответственно/ с A и B совсем простая:

$$T^{0} = A \qquad T^{1} = B. \qquad /7/$$

3. Кинематика реакций

Будем рассматривать коэффициенты A и B как функции инвариантных переменных s_1 , s_2 и s_3 , определяемых обычным образом:

$$s_1 = -(p_1 + q_1)^2 \;; \quad s_2 = -(p_1 + q_2)^2 \;; \quad s_3 = -(p_1 + p_2)^2.$$

В системе центра масс реакции I эти инвариантные переменные имеют вид:

$$\begin{aligned} s_1 &= M^2 + \mu^2 + 2\vec{q}_1^{\,2} + 2\sqrt{(\vec{q}_1^{\,2} + \mu^2)(\vec{q}_1^{\,2} + M^2)} \\ s_2 &= M^2 + \mu^2 - 2\vec{q}_1^{\,2}\cos\theta_1 - 2\sqrt{(\vec{q}_1^{\,2} + \mu^2)(\vec{q}_1^{\,2} + M^2)} \\ s_3 &= -2\vec{q}_1^{\,2}(1 - \cos\theta_1), \end{aligned} \qquad /8/$$

где θ_1 –угол рассеяния падающего мезона. Из соотношений /6/ и /7/ следует, что замена $\alpha \rightleftarrows \beta$ соответствует замене $s_1 \rightleftarrows s_2$ и при этом то мы получим, что А / s_1, s_2, s_3 / является амплитудой реакции II в области физических значений второй реакции. На рис. 4 графически изображена связь переменных 1, II реакций, выражаемой соотношениями /10/, /11/.

Итак, наряду с функциями А / s_1, s_2, s_3 / и В / s_1, s_2, s_3) будем рассматривать функции А / $\overset{*}{s}_1$, $\overset{*}{s}_2$, s_3 / и В / $\overset{*}{s}_1$, $\overset{*}{s}_2$, s_3 /. Симметричная и антисимметричная комбинации этих функций не будут содержать иррациональную зависимость от корня $K(\vec{q}_1^{\,2})=\sqrt{(\vec{q}_1^{\,2}+\mu^2)(\vec{q}_1^{\,2}+M^2)}$. Таким образом, функции

$$\Phi_s=\frac{\Phi(\vec{q}_1^{\,2},z_1,+K)+\Phi(\vec{q}_1^{\,2},z_1,-K)}{2}$$

и

$$\Phi_a=\frac{\Phi(\vec{q}_1^{\,2},z_1,+K)-\Phi(\vec{q}_1^{\,2},z_1,-K)}{2K},$$

где Φ обозначает любую из функций: А или В, не будут содержать кинематического разреза.

Разрезы функции $\Phi(\vec{q}_1^{\,2},z_1,-K)$ лежат: от реакции II – в интервале $[0,+\infty]$ и в интервале $[-M^2,-\tau_2]$ для $z_1\geq\frac{\mu}{M}$, от реакции III – в интервале $[-\infty,-\frac{2\mu^2}{1-z_1}]$. От реакции 1 разреза нет. Записывая теперь для функции Φ_a и Φ_s обычную теорему Коши в плоскости комплексных $\vec{q}_1^{\,2}$ и возвращаясь снова к функциям Φ, получим:

$$\Phi(\vec{q}_1^{\,2},z_1,\pm K)=\frac{1}{\pi}\Bigg\{\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\Phi(\vec{q}_1^{\,\prime 2},+K)\gamma(\pm)+\operatorname{Im}\Phi(\vec{q}_1^{\,\prime 2},-K)\gamma(\mp)}{\vec{q}_1^{\,\prime 2}-\vec{q}_1^{\,2}}\,d\vec{q}_1^{\,\prime 2}+$$

$$+\int_{-\infty}^{\vec{q}^{\,2}(z_1)}\frac{\operatorname{Im}\Phi(\vec{q}^{\,\prime 2},+K)}{\vec{q}^{\,\prime 2}-\vec{q}^{\,2}}\gamma(\pm)\,d\vec{q}^{\,\prime 2}+\vartheta\left(z_1-\frac{\mu}{M}\right)\int_{-\tau_{z_1}}^{-M^2}\frac{\operatorname{Im}\Phi(\vec{q}^{\,\prime 2},-K)}{\vec{q}_1^{\,\prime 2}-\vec{q}_1^{\,2}}\gamma(\mp)\,d\vec{q}_1^{\,\prime 2}+ \qquad /12/$$

$$+\int_{-\infty}^{-\frac{2\mu^2}{1-z_1}}\frac{\operatorname{Im}\Phi(\vec{q}_1^{\,\prime 2},+K)\gamma(\pm)+\operatorname{Im}\Phi(\vec{q}^{\,\prime 2},-K)\gamma(\mp)}{\vec{q}_1^{\,\prime 2}-\vec{q}_1^{\,2}}\,d\vec{q}_1^{\,\prime 2},$$

где

$$\gamma(\pm)=1\pm\frac{K(\vec{q}^{\,2})}{K(\vec{q}^{\,\prime 2})}$$

$$\vec{q}^{\,2}(z_1) = \begin{cases} -M^2 & \text{для } z_1 \geq \frac{\mu}{M} \\ -\tau_{z} & \text{для } z_1 \leq \frac{\mu}{M} \end{cases}$$

$$\tau_{z_1} = \frac{M^2 + \mu^2 - 2M\mu z_1}{1 - z_1} .$$

На рис. 5 изображены области интегрирования по $\vec{q}_1^{\,2}$ в уравнении /12/ в зависимости от z_1.

Из рис.5 видно, что при $z_1 = 1$ отличными от нуля областями интегрирования остаются лишь области $\vec{q}^{\,\prime 2} \geq 0$. Это соответствует переходу к обычным дисперсионным соотношениям для случая рассеяния вперед.

При $z_1 = -1$ вклад от отрицательных $\vec{q}_1^{\,2}$ происходит только от разреза от третьей реакции.

Уравнение /12/ было выведено из представления Мандельстама без каких-либо приближений. Ограничиваясь ближайшими особенностями, а именно, учитывая лишь часть разреза от третьей реакции, мы в дальнейшем рассматриваем такое уравнение:

$$\Phi(\vec{q}_1^{\,2}, \pm K) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\Phi(\vec{q}_1^{\,\prime 2}, +K)\,\chi(\pm) + \operatorname{Im}\Phi(\vec{q}_1^{\,\prime 2}, -K)\,\chi(\mp)}{\vec{q}_1^{\,\prime 2} - \vec{q}_1^{\,2}}\, d\vec{q}_1^{\,\prime 2} + \qquad /13/$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{8\mu^2}{1-z_1}}^{-\frac{2\mu^2}{1-z_1}} d\vec{q}_1^{\,\prime 2} \frac{\operatorname{Im}\Phi(\vec{q}_1^{\,\prime 2}, +K)\,\chi(\pm) + \operatorname{Im}\Phi(\vec{q}_1^{\,\prime 2}, -K)\,\chi(\mp)}{\vec{q}_1^{\,\prime 2} - \vec{q}_1^{\,2}}$$

5. Устранение нефизического разреза от реакции III

В уравнении /13/ мнимые части $\operatorname{Im}\Phi(\vec{q}_1^{\,\prime 2}, +K)$ и $\operatorname{Im}\Phi(\vec{q}_1^{\,\prime 2}, -K)$ в интервале $\left[-\frac{8\mu^2}{1-z_1}, -\frac{2\mu^2}{1-z_1}\right]$ будем рассматривать как аналитические продолжения соответствующих функций из физической области $s_3 \geq 4M^2$.

Разложим амплитуду $\Phi(s_1, s_2, s_3)$ по парциальным волнам реакции III в области физических значений $\vec{q}_3^{\,2}$ и $\cos\Theta_3$:

$$\Phi(s_1,s_2,s_3) = 2p_3q_3\sum_\ell(2\ell+1)\,\Phi^\ell_{\text{III}}(\vec{q}_3^{\,2})\,P_\ell(\cos\Theta_3). \qquad /14/$$

Как следует из /9/ в соотношении /14/ сумма по четным ℓ берется для $\Phi = A$ и сумма по нечетным ℓ берется для $\Phi = B$. Запишем так же соотношение унитарности для реакции III:

$$\operatorname{Im}\Phi(s_1,s_2,s_3) = \frac{1}{32\pi^2}\,\frac{|\vec{q}_3|}{W(\vec{q}_3^{\,2})}\int d\Omega'\,\Phi_{\text{III}}(\Omega')\,\overset{*}{\Pi}(\Omega''), \qquad /15/$$

где $\overset{*}{\Pi}$ обозначает эрмитово-сопряженную амплитуду реакции $\pi+\pi\to\pi+\pi$ [x/].
Из /7/ и /15/ следует:

$$\operatorname{Im}A = \frac{1}{32\pi^2}\,\frac{|\vec{q}_3|}{W_3}\int d\Omega'\,A(\Omega')\,\overset{*}{\Pi}{}^0(\Omega'')$$

$$\operatorname{Im}B = \frac{1}{32\pi^2}\,\frac{|\vec{q}_3|}{W_3}\int d\Omega'\,B(\Omega')\,\overset{*}{\Pi}{}^1(\Omega'').$$

Ограничиваясь в разложении Π^0 и Π^1 по парциальным волнам лишь S и P-волнами соответственно, получим:

$$\operatorname{Im}A_{\text{III}}(\vec{q}_3^{\,2},z_3) = \frac{1}{8\pi}\,\frac{|\vec{q}_3|}{W_3}\,A^0_{\text{III}}(\vec{q}_3^{\,2})\,e^{i\delta_0}\sin\delta_0 \qquad /16/$$

$$\operatorname{Im}B_{\text{III}}(\vec{q}_3^{\,2},z_3) = \frac{1}{8\pi}\,\frac{|\vec{q}_3|}{W_3}\,B^1_{\text{III}}(\vec{q}_3^{\,2})\,e^{i\delta_1}\sin\delta_1\cos\Theta_3.$$

Очевидно, что аналитическое продолжение разложения /16/ по $z_3=\cos\Theta_3$ в реакции $\pi+\pi\to\bar{K}+K$ возможно вплоть до первой особенности, на которой мнимая часть амплитуды реакции III испытывает скачок. Границу первого скачка мы находим аналогично тому, как это было сделано в работе [/11/].

Граничные кривые для спектральных функций имеют вид:

---

x/ Изотопическая структура реакции $\pi+\pi\to\pi+\pi$ имеет вид: /см., например, /8/ /:

$$\Pi^{\alpha\beta,\gamma\varepsilon} = \Pi_1\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\varepsilon}+\Pi_2\delta_{\alpha\varepsilon}\delta_{\beta\gamma}+\Pi_3\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\varepsilon\beta},$$

а связь изотопических состояний со спином 0 /Π^0/ и со спином 1 /Π^1/ с коэффициентами Π_1, Π_2, Π_3 имеет вид

$$\Pi^0 = 3\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3$$

$$\Pi^1 = \Pi_1-\Pi_3$$

$$(s_3-16\mu^2)[s_1-(M+\mu)^2][s_1-(M-\mu)^2]-64s\mu^4=0$$

/асимптоты $s_1=(M+\mu)^2$ и $s_3=16\mu^2$ / /17/

и
$$(s_3-4\mu^2)[s_1-(M+3\mu)^2]-32\mu^3(M+\mu)=0$$

/асимптоты $s_1=(M+3\mu)^2$ и $s_3=4\mu^2$ /.

Из /1/ и /18/ следует, что аналитическое продолжение мнимой части амплитуды реакции III по переменной $\vec{q}_1^{\,2}$ /при физических z_1 / возможно до $-21{,}3\mu^2$.

Область аналитичности действительной части амплитуды реакции III определяется из представления Мандельстама с помощью теоремы Гейне /12/.

Граница в переменных $\vec{q}_1^{\,2}$, z_1, до которой возможно аналитическое продолжение амплитуды третьей реакции изображена на рис. 6.

Применяя теперь прием Мусхелишвили- Омнеса /10/ к функции

$$\Phi_s e^{-u(\vec{q}_1^{\,2},z_1)}$$

где
$$u(\vec{q}_1^{\,2},z_1)=\frac{1}{\pi}\int_{-2{,}79\mu^2}^{-\frac{2\mu^2}{1-z_1}}\frac{\delta_0\left[-\frac{\vec{q}_1^{\,\prime 2}(1-z_1)}{2}-\mu^2\right]}{\vec{q}_1^{\,\prime 2}-\vec{q}_1^{\,2}}\,d\vec{q}_1^{\,\prime 2}$$

δ_0 - s -фаза π-π рассеяния, и снова возвращаясь к функциям мы получаем следующую систему уравнений для A:

$$A(\vec{q}_1^{\,2},z_1,\pm)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\vec{q}_1^{\,\prime 2}\,\eta_\pm\,\frac{\operatorname{Im}A_{I}(\vec{q}_1^{\,\prime 2},z_1)}{\vec{q}_1^{\,\prime 2}-\vec{q}_1^{\,2}}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\vec{q}_1^{\,\prime 2}\,\eta_\mp\,\frac{\operatorname{Im}A_{II}(\vec{q}_1^{\,\prime 2},z_1)}{\vec{q}_1^{\,\prime 2}-\vec{q}_1^{\,2}},\qquad /19/$$

где
$$\eta_\pm(u,\vec{q}_1^{\,\prime 2},\vec{q}_1^{\,2})=\frac{1}{2}\left[e^{u(\vec{q}_1^{\,2},z_1)-u(\vec{q}_1^{\,\prime 2},z_1)}\pm\frac{K(\vec{q}_1^{\,2})}{K(\vec{q}_1^{\,\prime 2})}\right].$$

Чтобы устранить нефизический разрез в уравнениях для функции B, будем рассматривать функции

$$\tilde{B}=\frac{B}{s_1-s_2}$$

и
$$\frac{\Phi_{sB}\,e^{-\beta}}{s_1-s_2},$$

где
$$\beta=\frac{1}{\pi}\int_{-2{,}79\mu^2}^{-\frac{2\mu^2}{1-z_1}}d\vec{q}_1^{\,\prime 2}\,\frac{\delta_1\left[-\frac{\vec{q}_1^{\,\prime 2}(1-z_1)}{2}-\mu^2\right]}{\vec{q}_1^{\,\prime 2}-\vec{q}_1^{\,2}},$$

δ_1- p-фаза π-π рассеяния.

Функция $\frac{\Phi_{SB}\, e^{-\beta}}{s_1 - s_2}$ не содержит новых особенностей и для нее может быть записано то же представление Мандельстама, как и для Φ_{SB}

Аналогично тому, как это было сделано для функции $A(\pm K)$, мы получаем следующую систему для функции $\tilde{B}$:

$$\tilde{B}(\vec{q}_1^{\,2}, z_1, \pm K) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\vec{q}_1^{\,\prime 2} \frac{\mathrm{Im}\,\tilde{B}(\vec{q}_1^{\,\prime 2}, z_1, +K)}{\vec{q}_1^{\,\prime 2} - \vec{q}_1^{\,2}} \xi_\pm + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\vec{q}_1^{\,\prime 2} \frac{\mathrm{Im}\,B(\vec{q}_1^{\,\prime 2}, z_1, -K)}{\vec{q}_1^{\,\prime 2} - \vec{q}_1^{\,2}} \xi_\mp, \qquad /20/$$

где

$$\xi_\pm = \frac{1}{2}\left[e^{\beta(\vec{q}_1^{\,2}, z_1) - \beta(\vec{q}_1^{\,\prime 2}, z_1)} \pm \frac{K(\vec{q}_1^{\,2})}{K(\vec{q}_1^{\,\prime 2})}\right].$$

6. Интегральные уравнения для парциальных амплитуд рассеяния

Чтобы перейти от уравнений /19/ и /20/ к уравнениям для парциальных амплитуд, мы используем разложения $T^{1/2}$ и $T^{3/2}$ в ряд по полиномам Лежандра и условия унитарности:

$$T^I(\vec{q}_1^{\,2}, z_1) = \sum_l (2l+1)\, T_l^I(\vec{q}_1^{\,2})\, P_l(z_1)$$

$$T^I(\vec{q}_2^{\,2}, z_2) = \sum (2l+1)\, T_l^I(\vec{q}_2^{\,2})\, P_l(z_2) \qquad /21/$$

$$I = 1/2,\ 3/2$$

$$\mathrm{Im}\, T_l^I(\vec{q}_1^{\,2}) = \frac{1}{8\pi} \frac{|\vec{q}_1|}{W(\vec{q}_1^{\,2})} |T_l^I(\vec{q}_1^{\,2})|^2$$

$$\mathrm{Im}\, T_l^I(\vec{q}_2^{\,2}) = \frac{1}{8\pi} \frac{|\vec{q}_2|}{W(\vec{q}_2^{\,2})} |T_l^I(\vec{q}_2^{\,2})|^2. \qquad /22/$$

Ограничиваясь S и P -волнами, из /19/-/22/ и условия ортогональности полиномов Лежандра, получаем:

$$2T_l^{3/2}(\vec{q}^{\,2}) + T_l^{1/2}(\vec{q}^{\,2}) = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty d\vec{q}^{\,\prime 2} \frac{|\vec{q}^{\,\prime}|}{W(\vec{q}^{\,\prime 2})}\Big\{ n_l(\vec{q}^{\,\prime 2}, \vec{q}^{\,2})\big(2\,|T_0^{3/2}(\vec{q}^{\,\prime 2})|^2 + |T_0^{1/2}(\vec{q}^{\,\prime 2})|^2\big) +$$
$$+ 3\,\varphi_l(\vec{q}^{\,\prime 2}, \vec{q}^{\,2})\big(2|T_1^{1/2}(\vec{q}^{\,\prime 2})|^2 + |T_1^{3/2}(\vec{q}^{\,\prime 2})|^2\big)\Big\} \qquad /23/$$

$$T_\ell^{1/2}(\vec{q}^{\,2}) - T_\ell^{3/2}(\vec{q}^{\,2}) = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty d\vec{q}_1^{\,\prime 2}\,\frac{|\vec{q}^{\,\prime}|}{W(\vec{q}^{\,\prime 2})}\Big\{\varepsilon_\ell(\vec{q}^{\,\prime 2},\vec{q}^{\,2})\big(|T_0^{1/2}(\vec{q}^{\,\prime 2})|^2 - |T_0^{3/2}(\vec{q}^{\,\prime 2})|^2\big) +$$

$$+ 3\omega_\ell(\vec{q}^{\,\prime 2},\vec{q}^{\,2})\big(|T_1^{1/2}(\vec{q}^{\,\prime 2})|^2 - |T_1^{3/2}(\vec{q}^{\,\prime 2})|^2\big)\Big\}. \qquad /24/$$

В уравнениях /23/, / 24/ введены следующие обозначения:

$$W(\vec{q}^{\,2}) = \sqrt{M^2+\mu^2+2\vec{q}^{\,2}+2\sqrt{(\vec{q}^{\,2}+\mu^2)(\vec{q}^{\,2}+M^2)}}$$

$$f(\vec{q}^{\,2},x_1) = \frac{\tau + 2x_1(\vec{q}^{\,2}+K) - M^2-\mu^2}{2(1-x_1^2)}$$

$$x_2(\vec{q}^{\,2},x_1) = 1 - \frac{f(\vec{q}^{\,2},x_1)}{\vec{q}^{\,2}}(1-x_1)$$

$$\mathcal{D}(\vec{q}^{\,2},x_1) = \frac{2K+2\vec{q}^{\,2}+\mu^2}{2K}\cdot\frac{\tau x_1 - x_1(M^2+\mu^2) + 2(\vec{q}^{\,2}+K)}{\tau(1-x_1^2)}$$

$$\tau = \sqrt{(M^2-\mu^2)^2 - 4x_1(M^2+\mu^2)(\vec{q}^{\,2}+K) + 4x_1M^2\mu^2 + 4(\vec{q}^{\,2}+K)^2}$$

$$\tilde{\eta}_- = \eta_-\big[u(f(\vec{q}^{\,\prime 2},x_1),x_1),\vec{q}^{\,2},f(\vec{q}^{\,\prime 2},x_1)\big]$$

$$\tilde{\xi}_- = \xi_-\big[\beta(f(\vec{q}^{\,\prime 2},x_1),x_1),\vec{q}^{\,2},f(\vec{q}^{\,\prime 2},x_1)\big]$$

$$\alpha_\pm(\vec{q}^{\,\prime 2},\vec{q}^{\,2}) = \xi_\pm\,\frac{s_1 - s_2}{s_1(\vec{q}^{\,2}) - s_2(\vec{q}^{\,\prime 2},x_1)}$$

$$\tilde{\alpha}_\pm = \xi_\pm \frac{s_1 - s_2}{s_1[f(\vec{q}'^2, z_1)] - s_2[f(\vec{q}'^2, z_1)]}$$

$$n_\ell(\vec{q}'^2, \vec{q}^2) = \int_{-1}^{+1} dz_1 P_\ell(z_1) \left[\frac{\eta_+}{\vec{q}'^2 - \vec{q}^2} + \frac{\tilde{\eta}_- \mathcal{D}(\vec{q}'^2, z_1)}{f(\vec{q}'^2, z_1) - \vec{q}^2} \right]$$

$$\varphi_\ell(\vec{q}'^2, \vec{q}^2) = \int_{-1}^{+1} dz_1 P_\ell(z_1) \left[\frac{\eta_+ z_1}{\vec{q}'^2 - \vec{q}^2} + \frac{\tilde{\eta}_- z_1(\vec{q}'^2, z_1) \mathcal{D}(\vec{q}'^2, z_1)}{f(\vec{q}'^2, z_1) - \vec{q}^2} \right.$$

$$\varepsilon_\ell(\vec{q}'^2, \vec{q}^2) = \int_{-1}^{+1} dz_1 P_\ell(z_1) \left[\frac{\alpha_+}{\vec{q}'^2 - \vec{q}^2} + \frac{\tilde{\alpha}_+ \mathcal{D}(\vec{q}'^2, z_1)}{f(\vec{q}'^2, z_1) - \vec{q}^2} \right]$$

$$\omega_\ell(\vec{q}'^2, \vec{q}^2) = \int_{-1}^{+1} dz_1 P_\ell(z_1) \left[\frac{\alpha_+ z_1}{\vec{q}'^2 - \vec{q}^2} + \frac{\tilde{\alpha}_- z_1(\vec{q}'^2, z_1) \mathcal{D}(\vec{q}'^2, z_1)}{f(\vec{q}'^2, z_1) - \vec{q}^2} \right].$$

Будем далее исходить из предположения, что в уравнениях /23/ и /24/ достаточно провести одно вычитание. В рассматриваемом случае нет такой удобной симметричной точки вычитания, как это имеет место в случае π-π рассеяния, так как массы K-мезона и π-мезона различны. Условимся поэтому вычитание проводить в точке $\vec{q}_1^2 = 0$. При этом S-фазы будут связаны с длинами рассеяния $a^{1/2}$ и $a^{3/2}$, соответствующим изотопическим состояниям $T_0^{1/2}$ и $T_0^{3/2}$, которые войдут в уравнения как параметры. В результате простых вычислений получаем следующие уравнения:

$$\mathrm{Re}[2T_\ell^{3/2}(\vec{q}^2) + T_\ell^{1/2}(\vec{q}^2)] = \mathrm{Re}[2T_\ell^{3/2}(0) + T_\ell^{1/2}(0)] +$$

$$\frac{1}{16\pi^2}P\int_0^\infty d\vec{q}'^2\,\frac{|\vec{q}'|}{W(\vec{q}'^2)}\Big\{\left[\eta_\ell(\vec{q}'^2,\vec{q}^2)-\eta_\ell(\vec{q}'^2,0)\right]\left(2\,|T_0^{3/2}(\vec{q}'^2)|^2+|T_0^{1/2}(\vec{q}'^2)|^2\right)+$$

$$+3\left[\varphi_\ell(\vec{q}'^2,\vec{q}^2)-\varphi_\ell(\vec{q}'^2,0)\right]\left(2\,|T_1^{3/2}(\vec{q}'^2)|^2+|T_1^{1/2}(\vec{q}'^2)|^2\right)\Big\}$$

/25/

$$Re\left[T_\ell^{1/2}(\vec{q}^2)-T_\ell^{3/2}(\vec{q}^2)\right]=Re\left[T_\ell^{1/2}(0)-T_\ell^{3/2}(0)\right]+$$

$$\frac{1}{16\pi^2}P\int_0^\infty d\vec{q}'^2\,\frac{|\vec{q}'|}{W(\vec{q}'^2)}\Big\{\left[\varepsilon_\ell(\vec{q}'^2,\vec{q}^2)-\varepsilon_\ell(\vec{q}'^2,0)\right]\left(|T_0^{1/2}(\vec{q}'^2)|^2-|T_0^{3/2}(\vec{q}'^2)|^2\right)+$$

$$3\left[\omega_\ell(\vec{q}'^2,\vec{q}^2)-\omega_\ell(\vec{q}'^2,0)\right]\left(|T_1^{1/2}(\vec{q}'^2)|^2-|T_1^{3/2}(\vec{q}'^2)|^2\right)\Big\}$$

$$\ell=0,1\qquad Re\,T_1^{1/2}(0)=Re\,T_1^{3/2}(0)=0.$$

/26/

Получим теперь систему уравнений для парциальных амплитуд в системе реакции 1 для рассеяния назад. В этом случае $\vec{q}_1^{\,2}=\vec{q}_2^{\,2}$ и $z_1=z_2=-1$. При получении системы уравнений будем исходить из соотношений /19/ и /20/. Законность разложения в точке $z_2=-1$ вытекает из свойств аналитичности функций A и B в этой точке.

Итак, имеем:

$$T(\vec{q}_1^{\,2},z_1)=T^I(\vec{q}_1^{\,2},-1)+(1+z_1)\partial_{z_1}T^I(\vec{q}_1^{\,2},z_1)\big|_{z_1=-1}+\dots$$

$$T(\vec{q}_2^{\,2},z_2)=T^I(\vec{q}_2^{\,2},-1)+(1+z_2)\partial_{z_2}T^I(\vec{q}_2^{\,2},z_2)\big|_{z_2=-1}+\dots$$

/27/

$$Im\,T^I(\vec{q}_1^{\,2},z_1)=\frac{|\vec{q}_1|}{8\pi W(\vec{q}_1^{\,2})}\left(|T_0^I(\vec{q}_1^{\,2})|^2+3z_1|T_1^I(\vec{q}_1^{\,2})|^2+\dots\right)$$

$$Im\,T^I(\vec{q}_2^{\,2},z_2)=\frac{|\vec{q}_2|}{8\pi W(\vec{q}_2^{\,2})}\left(|T_0^I(\vec{q}_2^{\,2})|^2+3z_2|T_1^I(\vec{q}_2^{\,2})|^2+\dots\right)$$

/28/

$$I=1/2,\ 3/2$$

$$T^{I}(\vec q_1^{\,2},-1)=T_0^{I}(\vec q_1^{\,2})-3T_1^{I}(\vec q_1^{\,2})$$

$$\partial_z T^{I}(\vec q^{\,2},z)\Big|_{z=-1}=3T_1^{I}(\vec q^{\,2}). \qquad /29/$$

Используя выражения /27/ – /29/ , разлагая в ряды Тейлора подинтегральные функции в соотношениях /19/, /20/, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z_1 и проводя одно вычитание в точке $\vec q_1^{\,2}=0$, получаем другую систему уравнений для парциальных амплитуд:

$$\mathrm{Re}\left[2T_0^{3/2}(\vec q^{\,2})+T_0^{1/2}(\vec q^{\,2})\right]=\mathrm{Re}\left[2T_0^{3/2}(0)+T_0^{1/2}(0)\right]+\frac{1}{8\pi^2}P\int_0^\infty d\vec q^{\,\prime 2}\frac{|\vec q^{\,\prime}|}{W(\vec q^{\,\prime 2})}\left\{\frac{2|T_0^{3/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2+|T_0^{1/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2}{\vec q^{\,\prime 2}(\vec q^{\,\prime 2}-\vec q^{\,2})}\times\right.$$
$$\left[\vec q^{\,\prime 2}\left(V(\vec q^{\,\prime 2};\vec q^{\,2})-V(\vec q^{\,\prime 2};0)\right)+\vec q^{\,2}V(\vec q^{\,\prime 2};0)\right]+3\,\frac{2|T_1^{3/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2+|T_1^{1/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2}{\vec q^{\,\prime 2}(\vec q^{\,\prime 2}-\vec q^{\,2})}\left.\left[\vec q^{\,\prime 2}\left(L(\vec q^{\,\prime 2};\vec q^{\,2})-L(\vec q^{\,\prime 2};0)\right)+\vec q^{\,2}L(\vec q^{\,\prime 2};0)\right]\right\}$$

$$\mathrm{Re}\left[2T_1^{3/2}(\vec q^{\,2})+T_1^{1/2}(\vec q^{\,2})\right]=\frac{1}{8\pi^2}P\int_0^\infty d\vec q^{\,\prime 2}\frac{|\vec q^{\,\prime}|}{W(\vec q^{\,\prime 2})}\left\{\frac{2|T_0^{3/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2+|T_0^{1/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2}{\vec q^{\,\prime 2}(\vec q^{\,\prime 2}-\vec q^{\,2})}\left[\vec q^{\,\prime 2}\left(C(\vec q^{\,\prime 2};\vec q^{\,2})-C(\vec q^{\,\prime 2};0)\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\vec q^{\,2}C(\vec q^{\,\prime 2};0)\right]+3\,\frac{2|T_1^{3/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2+|T_1^{1/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2}{\vec q^{\,\prime 2}(\vec q^{\,\prime 2}-\vec q^{\,2})}\left.\left[\vec q^{\,\prime 2}\left(Q(\vec q^{\,\prime 2};\vec q^{\,2})-Q(\vec q^{\,\prime 2};0)\right)+\vec q^{\,2}Q(\vec q^{\,\prime 2};0)\right]\right\}$$

$$\mathrm{Re}\left[T_0^{1/2}(\vec q^{\,2})-T_0^{3/2}(\vec q^{\,2})\right]=\mathrm{Re}\left[T_0^{1/2}(0)-T_0^{3/2}(0)\right]+\frac{1}{8\pi^2}P\int_0^\infty d\vec q^{\,\prime 2}\frac{|\vec q^{\,\prime}|}{W(\vec q^{\,\prime 2})}\left\{\frac{|T_0^{1/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2-|T_0^{3/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2}{\vec q^{\,\prime 2}(\vec q^{\,\prime 2}-\vec q^{\,2})}\times\right.$$
$$\left[\vec q^{\,\prime 2}\left(E(\vec q^{\,\prime 2};\vec q^{\,2})-E(\vec q^{\,\prime 2};0)\right)+\vec q^{\,2}E(\vec q^{\,\prime 2};0)\right]+3\,\frac{|T_1^{1/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2-|T_1^{3/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2}{\vec q^{\,\prime 2}(\vec q^{\,\prime 2}-\vec q^{\,2})}\left.\left[\vec q^{\,\prime 2}\left(F(\vec q^{\,\prime 2};\vec q^{\,2})-F(\vec q^{\,\prime 2};0)\right)+\vec q^{\,2}E(\vec q^{\,\prime 2};0)\right]\right\}$$

$$\mathrm{Re}\left[T_1^{1/2}(\vec q^{\,2})-T_1^{3/2}(\vec q^{\,2})\right]=\frac{1}{8\pi^2}P\int_0^\infty d\vec q^{\,\prime 2}\frac{|\vec q^{\,\prime}|}{W(\vec q^{\,\prime 2})}\left\{\frac{|T_0^{1/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2-|T_0^{3/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2}{\vec q^{\,\prime 2}(\vec q^{\,\prime 2}-\vec q^{\,2})}\left[\vec q^{\,\prime 2}\left(G(\vec q^{\,\prime 2};\vec q^{\,2})-G(\vec q^{\,\prime 2};0)\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\vec q^{\,2}G(\vec q^{\,\prime 2};0)\right]+3\,\frac{|T_1^{1/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2-|T_1^{3/2}(\vec q^{\,\prime 2})|^2}{\vec q^{\,\prime 2}(\vec q^{\,\prime 2}-\vec q^{\,2})}\left.\left[\vec q^{\,\prime 2}\left(H(\vec q^{\,\prime 2};\vec q^{\,2})-H(\vec q^{\,\prime 2};0)\right)+\vec q\,H(\vec q^{\,\prime 2};0)\right]\right\},$$

где

Во всех соотношениях аргумент -1 означает, что функция от него берется в точке $z=-1$

$$V(\vec{q}'^2,\vec{q}^2)=\eta_+(-1)+\partial_{z_1}\eta_+ + \tilde{\eta}_-(-1)+(\vec{q}'^2-\vec{q}^2)\partial_{z_1}\tilde{\eta}_- \frac{D(\vec{q}'^2,z_1)}{f(\vec{q}'^2,z_1)-\vec{q}^2}\Big|_{z_1=-1}$$

$$L(\vec{q}'^2,\vec{q}^2)=\partial_{z_1}\eta_+ -\tilde{\eta}_-(-1)+(\vec{q}'^2-\vec{q}^2)\partial_{z_1}\tilde{\eta}_- \frac{D(q'^2,z_1)}{f(\vec{q}'^2,z_1)-\vec{q}^2}\alpha_2(\vec{q}'^2,z_1)\Big|_{z_1=-1}$$

$$C(\vec{q}'^2,\vec{q}^2)=\partial_{z_1}\eta_+ +(\vec{q}'^2-\vec{q}^2)\partial_{z_1}\tilde{\eta}_+ \frac{D(\vec{q}'^2,z_1)}{f(\vec{q}'^2,z_1)-\vec{q}^2}\Big|_{z_1=-1}$$

$$E(\vec{q}'^2,\vec{q}^2)=\alpha_+(-1)+\partial_{z_1}\alpha_+ +\tilde{\alpha}_-(-1)+(\vec{q}'^2-\vec{q}^2)\partial_{z_1}\tilde{\alpha}_- \frac{D(\vec{q}'^2,z_1)}{f(\vec{q}'^2,z_1)-\vec{q}^2}\Big|_{z_1=-1}$$

$$Q(\vec{q}'^2,\vec{q}^2)=\eta_+(-1)-\partial_{z_1}\eta_+ +(\vec{q}'^2-\vec{q}^2)\partial_{z_1}\tilde{\eta}_- \frac{D(\vec{q}'^2,z_1)}{f(\vec{q}'^2,z_1)-\vec{q}^2}\alpha_2(\vec{q}'^2,z_1)\Big|_{z_1=-1}$$

$$F(\vec{q}'^2,\vec{q}^2)=\partial_{z_1}\alpha_+ -\tilde{\alpha}_-(-1)+(\vec{q}'^2-\vec{q}^2)\partial_{z_1}\tilde{\alpha}_- \frac{D(\vec{q}'^2,z_1)}{f(\vec{q}'^2,z_1)-\vec{q}^2}\alpha_2\Big|_{z_1=-1}$$

$$G(\vec{q}'^2,\vec{q}^2)=\partial_{z_1}\alpha_+ +(\vec{q}'^2-\vec{q}^2)\partial_{z_1}\tilde{\alpha}_- \frac{D(\vec{q}'^2,z_1)}{f(\vec{q}'^2,z_1)-\vec{q}^2}\Big|_{z_1=-1}$$

$$H(\vec{q}'^2,\vec{q}^2)=-\partial_{z_1}\alpha_+ +\alpha_+(-1)+(\vec{q}'^2-\vec{q}^2)\Big[\partial_{z_1}\tilde{\alpha}_- \frac{D(\vec{q}'^2,z_1)}{f(\vec{q}'^2,z_1)-\vec{q}^2}\alpha_2(\vec{q}'^2,z_1)\Big]_{z_1=-1}$$

Отметим, что в уравнениях /25/ – /26/ интегралы в u и β брались в пределах $\left[-2{,}79\mu^2, -\frac{2\mu^2}{1-z_1}\right]$, а в уравнениях /30/ – /33/ – интегралы в u и β берутся в пределах $[-4\mu^2, -\mu^2]$.

З а к л ю ч е н и е

Как видно из /26/, /32/-/33/, мы получили системы приближенных нелинейных интегральных уравнений, которые могут иметь несколько решений.

Одним из возможных решений этих уравнений является решение $T^{1/2}=T^{3/2}$, что совпадает с результатами [6,13]. Однако, это решение следует считать приближенным, так как константы вычитания $\mathrm{Re}\,T^{1/2}(0)$ и $\mathrm{Re}\,T^{3/2}(0)$, которые берутся из опыта, вообще говоря, не обязаны быть равными друг другу и, кроме того, известно, что сечение рассеяния $K-N$ с перезарядкой отлично от нуля.

Неравенство констант вычитания естественно связать с различным влиянием высших по энергии барионных состояний на изотопически-спиновые состояния $T^{1/2}$ и $T^{3/2}$ амплитуды $\pi-K$ рассеяния.

Возможно, что из-за нелинейности уравнений /26/ и /32/-/33/ могут существовать решения, отличные от решения $T^{1/2}=T^{3/2}$ даже в том случае, когда $\mathrm{Re}\,T^{1/2}(0)=\mathrm{Re}\,T^{3/2}(0)$.

Если в соотношениях /22/ и /28/ учесть гиперонные состояния, то в уравнения /26/ и /32/-/33/ войдут дополнительные члены, которые тем более изменят решение $T^{1/2}=T^{3/2}$. Однако, из-за высокого энергетического порога гиперонных состояний, роль их вкладов в уравнения /26/, /32/-/33/ остается пока неясной.

Авторы выражают глубокую благодарность доктору физико-математических наук Д.В. Ширкову, А.В. Ефремову и В.А. Мещерякову за ознакомление с результатами работы [7] до ее опубликования и полезные советы и дискуссии.

Авторы благодарны А.А. Ансельму и В.М. Шехтеру за обсуждение вопроса, связанного с перезарядкой в $\pi-K$ рассеянии.

Литература

1. J. Schwinger, Phys.Rev. 104, 1164, (1956).
2. S. Minami, Prog. Theor. Phys. 17, 508, (1957).
3. A. Pais, Phys.Rev. 112, 624, (1959).
4. S. Barshay, Phys.Rev. 109, 2160, (1958); 110, 743, (1958).
5. W. Krolikowski, Bull. Acad. Pol. Sc. VIII, 63, (1960).
6. Чжоу Гуан-чжао, ЖЭТФ, 38, 1015, /1960/.
7. А.В. Ефремов, В.А. Мещеряков, Д.В. Ширков - препринт ОИЯИ, Д-503, /см. также ЖЭТФ, в печати/.
8. G.F. Chew and S. Mandelstam, preprint 'Theory of Low Energy Pion-Pion Interaction' UCRL – 8728.
9. G.F. Chew, S. Mandelstam, H.P. Noyes – preprint 'S-wave Dominant Solutions of the Pion-Pion Integral Equations' – UCRL – 9001.
10. R. Omnes, Nuovo Cimento, 8, 316, (1958).
11. S. Mandelstam, Phys.Rev. 115, 1752, (1959).
12. Е.В. Гоббсон, "Теория сферических и эллипсоидальных функций" И.Л.- Москва, 1952. гл. П, стр. 64.
13. S. Okubo, препринт № N.Y. 0–2627, 1959 год.

Поступила в издательский отдел
8 июня 1960 г.

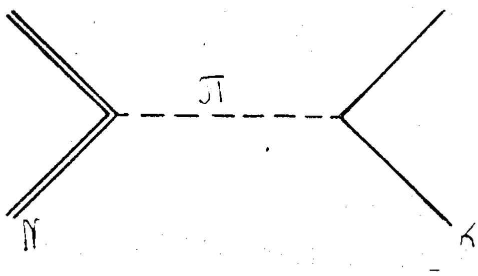

Рис. 1

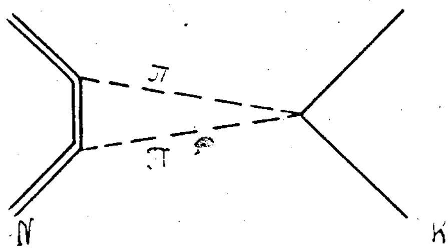

Рис. 2

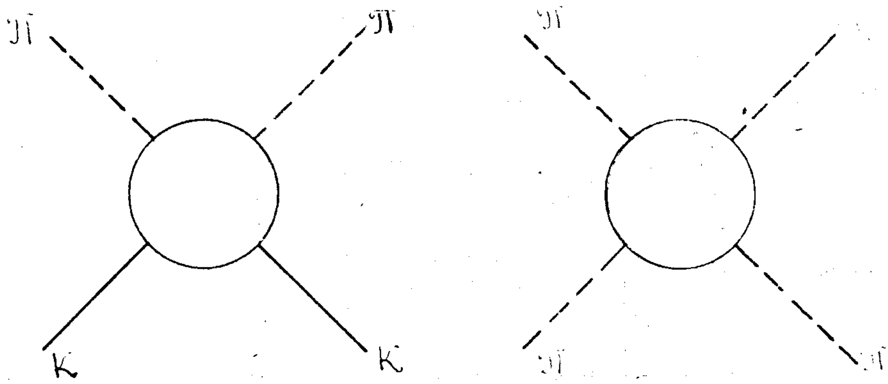

Рис. 3

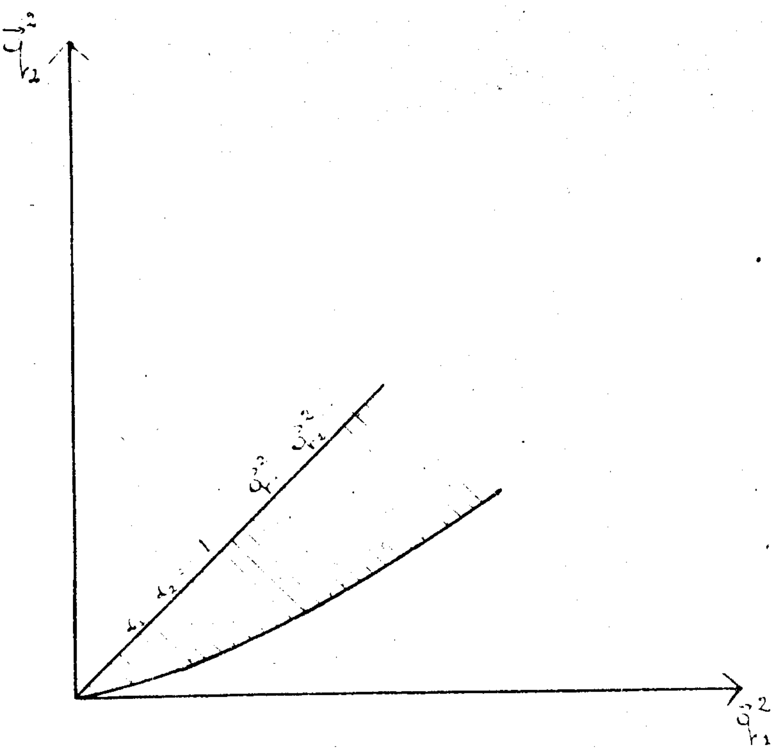

Рис. 4

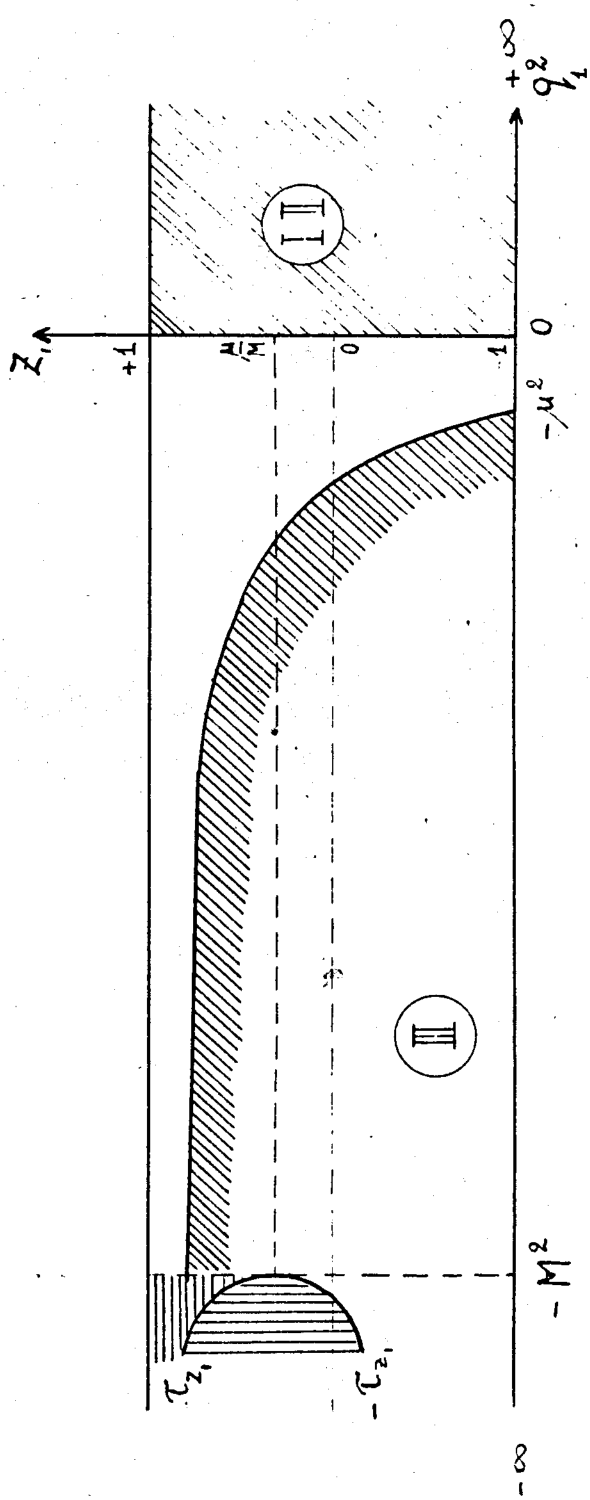

Рис. 5

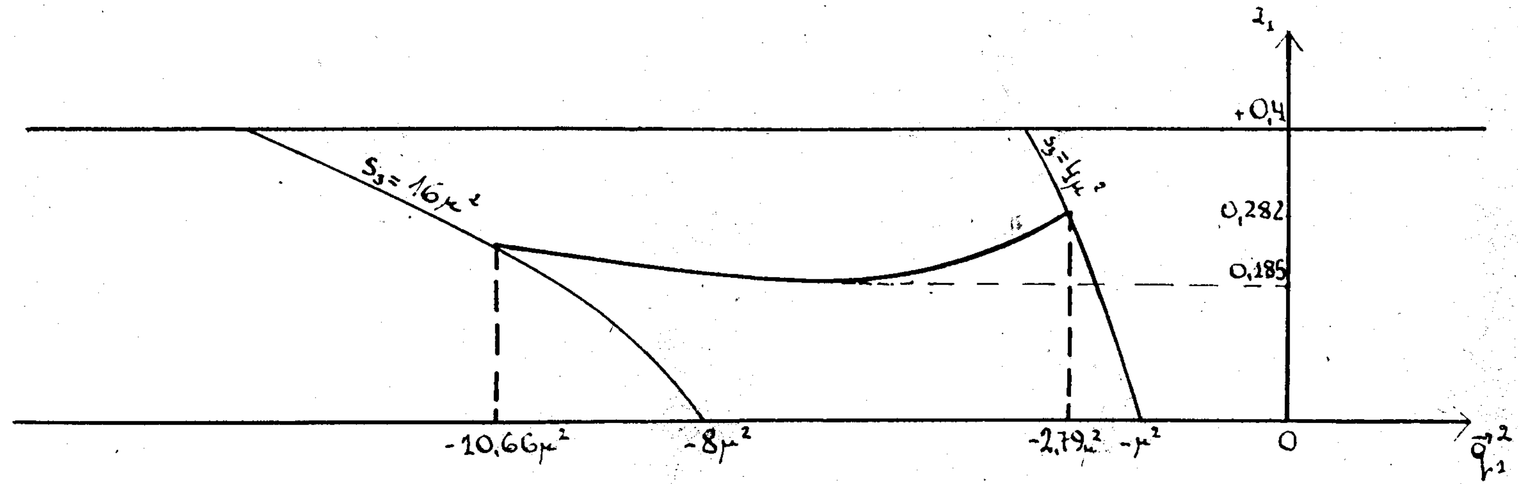
λ_1
+0,4
0,282
0,185
$s_3 = 16\mu^2$
$s_3 = 4\mu^2$
$-10{,}66\mu^2$
$-8\mu^2$
$-2{,}79\mu^2$
$-\mu^2$
0
$\vec{q}_1^{\,2}$

Рис. 6