ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Сянь Дин-чан, Хэ Цзо-сю, В. Целлнер

Д-547

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ П-П-РАССЕЯНИЯ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

ЖЭТФ, 1960, т39, в6, с1668-1676

Дубна 1960 год

Д-547

Сянь Дин-чан, Хэ Цзо-сю, В. Целлнер

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ П-П-РАССЕЯНИЯ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

Направлено в ЖЭТФ.

А н н о т а ц и я

Дается критический анализ уравнений Чу-Мандельстама по $\pi-\pi$ -рассеянию. С помощью дисперсионного соотношения для фиксированной передачи импульса и условия унитарности получены новые уравнения, которые совершенно отличны от уравнений Чу-Мандельстама в отношении вклада нефизической области.

1. Введение

Недавно Чу и Мандельстам[1] получили систему интегральных уравнений для $\pi-\pi$ -рассеяния. Сингулярности амплитуды рассеяния парциальных волн определяются ими с помощью двухмерного дисперсионного соотношения, предложенного Мандельстамом[2,3,4]. Условие унитарности в нефизической области получается аналитическим продолжением из физической области с помощью разложения Лежандра. Этот метод применялся другими авторами[5,6] при рассмотрении $\pi-N$ рассеяния и $N-\tilde{N}$ аннигиляции. Ефремов, Мещеряков, Чжу и Ширков[7] показали, что аналитическое продолжение с помощью разложения Лежандра приводит к серьезным трудностям. Большие ошибки получаются при пренебрежении волнами высшего порядка в нефизической области. Законность разложения Лежандра лимитируется границами спектральной функции. Однако, если вклад от нефизической области с высокой энергией $\nu > L$ не отброшен, то в интегральных уравнениях возникают расходимости. Степень расходимости коэффициентов при полиномах Лежандра $P_\ell(z)$ тем больше, чем больше ℓ. Эти расходимости не могут быть сняты конечным числом вычитаний. Таким образом, неизбежно отбрасывание вклада от нефизической области выше некоторого предела.

Если даже отбросить вклад при $\nu' \geq L = 10$[x], то все еще останется большая область, для которой расстояние от физической области сравнимо с расстоянием границ спектральных функций.

В этой области амплитуда рассеяния не может быть апроксимирована только двумя первыми членами разложения Лежандра.

В настоящей работе пересматривается проблема $\pi-\pi$ рассеяния. При помощи одного только условия унитарности совместно с дисперсионными соотношениями для фиксированной передачи импульса получена система интегральных уравнений. Чтобы избежать дальнейшей потери точности при пренебрежении парциальными волнами высших порядков вычитания производятся в точках, отличающихся от предложенных Чу и Мандельстамом.

---

x/ ν квадрат момента π -мезона в системе центра масс; масса π-мезона положена равной единице.

В разделе II исследуются ограничения, накладываемые на аналитические продолжения разложения Лежандра. В разделе III получаются интегральные уравнения и обсуждается проблема вычитания. В последнем разделе определяется ошибка, связанная с пренебрежением парциальными волнами высших порядков. Показано, что в области, где условие унитарности строго выполняется, ошибка, связанная с опусканием парциальных волн высших порядков, меньше 10%.

11. Ограничения, накладываемые на аналитическое продолжение разложения Лежандра

Все обозначения, принятые в данной статье, почти идентичны обозначениям в работе[1/]. Ради удобства они поясняются в данном разделе.

Три следующие реакции

$$/1/ \quad (p_1,\alpha)+(p_2,\beta)\longrightarrow(-p_3,\gamma)+(-p_4,\delta),$$

$$/11/ \quad (p_1,\alpha)+(p_4,\delta)\longrightarrow(-p_2,\beta)+(-p_3,\gamma), \qquad /1/$$

$$/111/ \quad (p_1,\alpha)+(p_3,\gamma)\rightarrow(-p_2,\beta)+(-p_4,\delta)$$

описываются одной функцией Грина.

$$T=A(s,t,\bar{t})\,\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}+B(s,t,\bar{t})\,\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+C(s,t,\bar{t})\,\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}. \qquad /2/$$

Здесь p – импульсы, которые для удобства выбраны входящими. $\alpha,\beta,\gamma,\delta$-изотопические индексы. Инвариантные переменные s, t и $\bar{t}$ определяются следующим образом:

$$s=-(p_1+p_2)^2=-(p_3+p_4)^2,$$

$$t=-(p_1+p_4)^2=-(p_2+p_3)^2, \qquad /3/$$

$$\bar{t}=-(p_1+p_3)^2=-(p_2+p_4)^2.$$

В частности, если ν и θ квадрат импульса π -мезона и угол рассеяния в системе центра масс реакции [I], то

$$\begin{aligned} s &= 4(\nu+1), \\ t &= -2\nu(1-\cos\theta), \\ \bar{t} &= -2\nu(1+\cos\theta). \end{aligned} \qquad /4/$$

Обозначим через A^I амплитуду рассеяния изотопического спина I реакции /1/. Между A^I и A, B, C имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned} A^0 &= 3A + B + C, \\ A^1 &= B - C, \\ A^2 &= B + C. \end{aligned} \qquad /5/$$

Амплитуда рассеяния может быть разложена по парциальным волнам

$$A^I(\nu, \cos\theta) = \sum (2\ell+1) A^I_\ell(\nu) P_\ell(\cos\theta),$$

ℓ - четные, $I = 0, 2$.

ℓ - нечетные, $I = 1$ /6/

$$A^I_\ell(\nu) = \sqrt{\frac{1+\nu}{\nu}}\, e^{i\delta^I_\ell} \sin\delta^I_\ell .$$

ℓ обозначает здесь орбитальный угловой момент, δ^I_ℓ - фаза рассеяния.

В двухмезонном приближении условие унитарности может быть представлено как

$$\mathrm{Im}\, A^I_\ell(\nu) = \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}\, |A^I_\ell(\nu)|^2. \qquad /7/$$

Чу и Мандельстам пользуются следующим представлением

$$\begin{aligned} A(s,t,\bar{t}) = &\frac{1}{\pi^2}\int ds' \int dt' \frac{a_{13}(s',t')}{(s-s')(t-t')} \\ &+ \frac{1}{\pi^2}\int ds' \int d\bar{t}' \frac{a_{12}(\bar{t}',s')}{(s'-s)(\bar{t}'-\bar{t})} \\ &+ \frac{1}{\pi^2}\int d\bar{t}' \int dt' \frac{a_{23}(t',\bar{t}')}{(\bar{t}'-\bar{t})(t'-t)} . \end{aligned} \qquad /8/$$

a_{12}, a_{13}, a_{23} - спектральные функции. B и C могут быть представлены аналогичным образом.

Ограничения на разложение Лежандра в нефизической области могут быть немедленно получены следующим путем. Чу и Мандельстам получили свои интегральные уравнения из дисперсионного соотношения для парциальных амплитуд:

$$A_\ell^I(\nu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\nu' \frac{\mathrm{Im}\, A_\ell^I(\nu')}{\nu'-\nu} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-1} d\nu' \frac{\mathrm{Im}\, A_\ell^I(\nu')}{\nu'-\nu} \qquad /9/$$

/уравнение /У1/ в работе[1]/. Согласно уравнению /1У.5/ работы[1]

$$\mathrm{Im}\, A_\ell^I(\nu') = \sum_{I'} \alpha_{II'} \int_0^{-\nu'-1} \frac{d\nu''}{\nu'} P_\ell\left(1+2\frac{\nu''+1}{\nu'}\right) \mathrm{Im}\, A^{I'}(\nu'', \cos\theta'') \qquad /10/$$

в нефизической области $\nu' \leqslant -1$, где

$$\cos\theta'' = 1 + 2\frac{\nu'+1}{\nu''}. \qquad /11/$$

Если /6/ подставить в /10/ и /10/ подставить в /9/, то немедленно получим

$$A_\ell^I(\nu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\nu' \frac{\mathrm{Im}\, A_\ell^I(\nu')}{\nu'-\nu} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\nu' \sum_{\ell', I'} \alpha_{II'} (2\ell'+1) \beta_{\ell\ell'}(\nu', \nu)\, \mathrm{Im}\, A_{\ell'}^{I'}(\nu'), \qquad /12/$$

где

$$\beta_{\ell\ell'}(\nu', \nu) = \int_{-\infty}^{-\nu'-1} d\nu'' \frac{1}{\nu''(\nu''-\nu)} P_\ell\left(1+2\frac{\nu'+1}{\nu''}\right) P_{\ell'}\left(1+2\frac{\nu''+1}{\nu'}\right). \qquad /13/$$

Это выражение расходится для $\ell' \geqslant 1$. С помощью одного вычитания можно ликвидировать расходимость коэффициента p -волны и ввести в теорию постоянную π-π - взаимодействия λ. Однако остающаяся расходимость не может быть ликвидирована конечным числом вычитаний. Эта трудность является результатом неоправданного использования аналитического продолжения с помощью разложения Лежандра, которое становится несправедливым у границ спектральных функций.

Чу и Мандельстам оборвали дисперсионный интеграл при $|\nu'| = L \simeq 10$, т.е. примерно у границы справедливости разложения Лежандра и затем отбросили вклад от d волны и волн высшего порядка. Однако, даже для $|\nu'| \leqslant 10$ имеется существенная область, расстояние которой от границы спектральных функций сравнимо, как видно из рис. 1, с расстоянием от физической области. Сомнительно, чтобы два первых члена разложения Лежандра были достаточны для представления функции рассеяния в этой области.

Ошибка, вносимая этим обстоятельством, может быть грубо определена следующим образом. Из двойного дисперсионного соотношения и кроссинг-симметрии следует

$$\operatorname{Im} A^0(\nu'', \cos\theta'') = \frac{1}{\pi}\int\limits_{t_0(\nu'')}^{\infty} \frac{dt'}{2\nu''}(2a_{13}+b_{13}+c_{13})\left\{\frac{1}{\tau-\cos\theta''}+\frac{1}{\tau+\cos\theta''}\right\},$$

$$\operatorname{Im} A^1(\nu'', \cos\theta'') = \frac{1}{\pi}\int\limits_{t_0(\nu'')}^{\infty} \frac{dt'}{2\nu''}(b_{13}-c_{13})\left\{\frac{1}{\tau-\cos\theta''}-\frac{1}{\tau+\cos\theta''}\right\}, \qquad /14/$$

$$\operatorname{Im} A^2(\nu'', \cos\theta'') = \frac{1}{\pi}\int\limits_{t_0(\nu'')}^{\infty} \frac{dt'}{2\nu''}(b_{13}+c_{13})\left\{\frac{1}{\tau-\cos\theta''}+\frac{1}{\tau+\cos\theta''}\right\},$$

где

$$\tau = 1+\frac{t'}{2\nu''}. \qquad /15/$$

$t_0(\nu'')$ есть граница спектральных функций a_{13}, b_{13} и c_{13}, которые являются функциями $s'' = 4(1+\nu'')$ и t'. Они не зависят от $\cos\theta''$. Зависимость $\operatorname{Im} A^I(\nu'', \cos\theta'')$ от $\cos\theta''$ представлена таким образом в явном виде знаменателями в фигурных скобках. Согласно теореме Хайне[8/] имеем

$$\frac{1}{\tau\mp\cos\theta''} = \sum_{\ell'}(2\ell'+1)\,Q_{\ell'}(\tau)\,P_{\ell'}(\cos\theta''). \qquad /16/$$

$Q_{\ell'}(\tau)$ – функции Лежандра второго рода. Оставление только двух первых членов разложения Лежандра равносильно следующему приближению:

$$\frac{1}{\tau-\cos\theta''}+\frac{1}{\tau+\cos\theta''} \cong 2Q_0(\tau),$$

$$\frac{1}{\tau-\cos\theta''}-\frac{1}{\tau+\cos\theta''} \cong 6\cos\theta''\,Q_1(\tau). \qquad /17/$$

Теперь сделанная ошибка может быть легко оценена. Рассмотрим случай $\nu''=3$, для которого условие унитарности начинает нарушаться. Ближайшая особая точка, дающая наибольший вклад в /14/, лежит по соседству с границей спектральной функции $t_0(\nu''=3) = \frac{64}{3}$. Соответствующее значение τ равно $\frac{41}{9}$. Для этого значения и углов рассеяния $\theta = 0, \pi/2$ легко получить данные, указанные в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

	$\cos\theta''$	$\frac{1}{\tau-\cos\theta''}+\frac{1}{\tau+\cos\theta''}$	$2Q_0(\tau)$	$\frac{1}{\tau-\cos\theta''}-\frac{1}{\tau+\cos\theta''}$	$6\cos\theta'' Q_1(\tau)$
$\cos\theta=1$	1	0,46	0,44	0,101	0,099
$\cos\theta=0$	$11/3$	1.25	0,45	1,00	0,36

Для θ =0 ошибка, вносимая приближением /17/, составляет всего 4% и 2% соответственно. Однако, для $\theta = \frac{\pi}{2}$ ошибка определяется множителем 3. Из рис. 1 тогда ясно, что даже если оборвать разложение при $|\nu'| = 10$, как это сделано в работе [1/], имеется большая область интегрирования, в которой мнимая часть функции рассеяния не может быть апроксимирована только двумя членами разложения Лежандра.

С другой стороны, полученные результаты показывают также, что приближение /17/ вполне пригодно при θ =0. В соответствии с соображениями, развитыми в работе [7/], мы получим в следующем разделе интегральные уравнения $\pi-\pi$ - рассеяния из дисперсионного соотношения для фиксированной передачи импульса, которое было строго доказано Боголюбовым и др.[9/]. Применяемый нами метод аналогичен методу, использованному Чу, Гольдбергером, Лоу и Намбу[10/] в их работе по $\pi-N$ -рассеянию.

III. Вывод интегральных уравнений

В дальнейшем мы пренебрегаем g - и высшими волнами по сравнению с S-волнами, h-и высшими волнами по сравнению с p - волной.В этом случае с помощью /6/ получаются следующие выражения:

$$A_0^0(\nu) \cong A^0(\nu, t=0) - \frac{2\nu}{3} \left.\frac{\partial A^0(\nu,t)}{\partial t}\right|_{t=0},$$

$$A_1^1(\nu) \cong \frac{2}{5} A^1(\nu, t=0) - \frac{2\nu}{15} \left.\frac{\partial A^1(\nu,t)}{\partial t}\right|_{t=0}, \qquad /18/$$

$$A_0^2(\nu) \cong A^2(\nu, t=0) - \frac{2\nu}{3} \left.\frac{\partial A^2(\nu,t)}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

С учетом кроссинг-симметрии дисперсионные соотношения для фиксированной передачи импульса $\pi - \pi$ -рассеяния могут быть написаны в виде:

$$\begin{pmatrix} A(\nu,t) \\ B(\nu,t) \\ C(\nu,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu'-\nu}\, \mathrm{Im}\begin{pmatrix} A(\nu',t) \\ B(\nu',t) \\ C(\nu',t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{1+\nu+\nu'+\frac{t}{4}}\, \mathrm{Im}\begin{pmatrix} C(\nu',t) \\ B(\nu',t) \\ A(\nu',t) \end{pmatrix}. \qquad /19/$$

Отсюда получаются следующие выражения для производной от амплитуд рассеяния

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial A(\nu,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial B(\nu,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial C(\nu,t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu'-\nu}\, \mathrm{Im}\begin{pmatrix} \frac{\partial A(\nu',t)}{\partial t} \\ \frac{\partial B(\nu',t)}{\partial t} \\ \frac{\partial C(\nu',t)}{\partial t} \end{pmatrix} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{1+\nu+\nu'+\frac{t}{4}}\, \mathrm{Im}\begin{pmatrix} \frac{\partial C(\nu',t)}{\partial t} \\ \frac{\partial B(\nu',t)}{\partial t} \\ \frac{\partial A(\nu',t)}{\partial t} \end{pmatrix} \qquad /20/$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{(1+\nu+\nu'+\frac{t}{4})^2}\, \mathrm{Im}\begin{pmatrix} C(\nu',t) \\ B(\nu',t) \\ A(\nu',t) \end{pmatrix}.$$

Известно, что разложение мнимой части амплитуд рассеяния по полиномам Лежандра сходится лучше, чем разложение реальной части, поэтому мы далее пренебрегаем мнимыми частями $d(f)$ и высших волн по сравнению с $s(p)$ волнами. Законность такого приближения вытекает из оценок, сделанных в последнем разделе.

С помощью /5/, /6/, /18/, /19/ и /20/ получаются следующие уравнения для s- и p- волн, в которых не приведено вычитание.

$$A_0^0(\nu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu'-\nu}\,\mathrm{Im}\,A_0^0(\nu')$$

$$+\frac{1}{3\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{1+\nu+\nu'}\left[\mathrm{Im}\,A_0^0(\nu') + \left(3\frac{\nu}{\nu'}-9\right)\mathrm{Im}\,A_1^1(\nu') + 5\,\mathrm{Im}\,A_0^2(\nu')\right] \qquad /21/$$

$$+\frac{1}{18\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{(1+\nu+\nu')^2}\left[\mathrm{Im}\,A_0^0(\nu') - 9\,\mathrm{Im}\,A_1^1(\nu') + 5\,\mathrm{Im}\,A_0^2(\nu')\right],$$

$$A_1^1(\nu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu'-\nu}\,\mathrm{Im}\,A_1^1(\nu') + \frac{1}{5\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu'}\,\mathrm{Im}\,A_1^1(\nu')$$

$$+\frac{1}{15\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{1+\nu+\nu'}\left[-2\,\mathrm{Im}\,A_0^0(\nu') + \left(9-\frac{3}{2}\frac{\nu}{\nu'}\right)\mathrm{Im}\,A_1^1(\nu') + 5\,\mathrm{Im}\,A_0^2(\nu')\right] \qquad /22/$$

$$+\frac{\nu}{180\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{(1+\nu+\nu')^2}\left[-2\,\mathrm{Im}\,A_0^0(\nu') + 9\,\mathrm{Im}\,A_1^1(\nu') + 5\,\mathrm{Im}\,A_0^2(\nu')\right],$$

$$A_0^2(\nu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu'-\nu}\,\mathrm{Im}\,A_0^2(\nu')$$

$$+\frac{1}{6\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{1+\nu+\nu'}\left[2\,\mathrm{Im}\,A_0^0(\nu') + \left(9-3\frac{\nu}{\nu'}\right)\mathrm{Im}\,A_1^1(\nu') + \mathrm{Im}\,A_0^2(\nu')\right] \qquad /23/$$

$$+\frac{\nu}{36\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{(1+\nu+\nu')^2}\left[2\,\mathrm{Im}\,A_0^0(\nu') + 9\,\mathrm{Im}\,A_1^1(\nu') + \mathrm{Im}\,A_0^2(\nu')\right].$$

Для оценки порядка величин d и f – волн можно использовать следующие выражения:

$$\frac{A_2^0(\nu)}{\nu} = \frac{1}{5\pi}\int_0^\infty d\nu'\,\frac{\mathrm{Im}\,A_1^1(\nu')}{\nu'(1+\nu+\nu')}$$

$$-\frac{1}{30\pi}\int_0^\infty d\nu'\,\frac{\left\{\frac{1}{3}\mathrm{Im}\,A_0^0(\nu') - 3\,\mathrm{Im}\,A_1^1(\nu') + \frac{5}{3}\,\mathrm{Im}\,A_0^2(\nu')\right\}}{(1+\nu+\nu')^2},$$

$$\frac{A_3^1(\nu)}{\nu} = \frac{3}{70\pi}\int_0^\infty d\nu'\,\frac{\mathrm{Im}\,A_1^1(\nu')}{\nu'(1+\nu+\nu')}$$

$$+\frac{1}{70\pi}\int_0^\infty d\nu'\left(1+\frac{\nu}{1+\nu+\nu'}\right)\frac{-\frac{1}{3}\mathrm{Im}\,A_0^0(\nu') + \frac{3}{2}\,\mathrm{Im}\,A_1^1(\nu') + \frac{5}{6}\,\mathrm{Im}\,A_0^2(\nu')}{(1+\nu')(1+\nu+\nu')},$$

$$\frac{A_2^2(\nu)}{\nu} = \frac{1}{10\pi}\int_0^\infty d\nu'\,\frac{\mathrm{Im}\,A_1^1(\nu')}{\nu'(1+\nu+\nu')}$$

$$-\frac{1}{30\pi}\int_0^\infty d\nu'\,\frac{\frac{1}{3}\mathrm{Im}\,A_0^0(\nu') + \frac{3}{2}\,\mathrm{Im}\,A_1^1(\nu') + \frac{1}{6}\,\mathrm{Im}\,A_0^2(\nu')}{(1+\nu+\nu')^2}.$$

Необходимо учитывать, что эти формулы менее точны, чем уравнения /21/–/23/, так как в них g -волнами пренебрегается относительно d -волны и h -волнами – относительно f -волны.

Чу и Мандельстам делают вычитание в точке $\nu = -\frac{2}{3}$ $(s = \frac{4}{3})$, на той стадии вычисления, когда следует еще выполнить интеграцию по прямой $s = 4/3$ между точками $\cos\theta = \pm 1$. Они соединяют данное значение λ амплитуды рассеяния в симметричной точке $s = t = \bar{t} = 4/3$ с другими точками этой прямой при помощи разложения по полиномам Лежандра. Из этого разложения они удерживают лишь первые члены, что может привести к дальнейшей потере точности, вызванной пренебрежением нефизическими членами.

Мы избегаем этой потери точности, делая вычитание для A и C в точке O'' $(s = \bar{t} = 2,\ t = 0)$ /см.фиг.2/, где

$$A(\nu = -\tfrac{1}{2},\ t = 0) = C(-\tfrac{1}{2}, 0) = \Lambda$$

и для A^1 в точке O''' $(s = 4,\ t = \bar{t} = 0)$, где

$$A^1(0,0) = B(0,0) - C(0,0) = 0.$$

Таким образом необходим только один новый параметр. Надо заметить, что Λ отличается от константы λ, использованной в работе[1]. Связь между ними дана в приложении. После вычитания уравнения для s- и p- волн /21/–/23/ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_0^0(\nu) = 5\Lambda &+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\nu'\, \mathrm{Im}\, A_0^0(\nu') \Big\{ \frac{\nu + \frac{1}{2}}{(\nu'-\nu)(\nu'+\frac{1}{2})} - \frac{\frac{2}{3}(\nu+\frac{1}{2})}{(\nu'+\frac{1}{2})(1+\nu+\nu')} \\ &\qquad + \frac{\frac{1}{3}\nu}{(1+\nu')(1+\nu+\nu')} + \frac{\frac{1}{18}\nu}{(1+\nu+\nu')^2} \Big\} \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\nu'\, \mathrm{Im}\, A_1^1(\nu') \Big\{ \frac{\frac{9}{2}(\nu+\frac{1}{2})}{(\nu'+\frac{1}{2})(1+\nu+\nu')} - \frac{\frac{3}{2}}{\nu'(\nu'+\frac{1}{2})} \\ &\qquad - \frac{\frac{3}{2}\nu}{(1+\nu')(1+\nu+\nu')} + \frac{\nu}{\nu'(1+\nu+\nu')} - \frac{\frac{1}{2}\nu}{(1+\nu+\nu')^2} \Big\} \\ &- \frac{5}{6\pi}\int_0^\infty d\nu'\, \frac{\mathrm{Im}\, A_0^2(\nu')}{1+\nu+\nu'} \Big\{ \frac{\nu+\frac{1}{2}}{\nu'+\frac{1}{2}} + \frac{\nu}{1+\nu'} - \frac{\frac{1}{3}\nu}{1+\nu+\nu'} \Big\}, \end{aligned} \qquad /25/$$

$$A_1^1(\nu) = \frac{\nu}{90\pi}\int_0^\infty d\nu' \frac{\mathrm{Im}\,A_0^0(\nu')}{(1+\nu')(1+\nu+\nu')}\left\{11 + \frac{\nu}{1+\nu+\nu'}\right\}$$

$$+ \frac{\nu}{\pi}\int_0^\infty d\nu' \; \mathrm{Im}\,A_1^1(\nu')\left\{\frac{1}{\nu'(\nu'-\nu)} - \frac{\frac{1}{10}}{\nu'(1+\nu+\nu')} - \frac{1}{20}\,\frac{11+\frac{\nu}{1+\nu+\nu'}}{(1+\nu')(1+\nu+\nu')}\right\}$$

$$- \frac{\nu}{36\pi}\int_0^\infty d\nu' \,\mathrm{Im}\,A_0^2(\nu')\; \frac{11+\frac{\nu}{1+\nu+\nu'}}{(1+\nu')(1+\nu+\nu')} , \qquad /26/$$

$$A_0^2(\nu) = 2\Lambda + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\nu' \; \mathrm{Im}\,A_0^0(\nu')\left\{\frac{-\frac{2}{3}(\nu+\frac{1}{2})}{(\nu'+\frac{1}{2})(1+\nu+\nu')} + \frac{\frac{1}{3}\nu}{(1+\nu')(1+\nu+\nu')}\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{18}\nu}{(1+\nu+\nu')^2}\right\}$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\nu' \; \mathrm{Im}\,A_1^1(\nu')\left\{\frac{-\frac{3}{2}}{\nu'(\nu'+\frac{1}{2})} - \frac{\frac{3}{2}\nu}{(1+\nu')(1+\nu+\nu')}\right.$$

$$\left. \frac{-\frac{1}{2}\nu}{\nu'(1+\nu+\nu')} + \frac{\frac{1}{4}\nu}{(1+\nu+\nu')^2}\right\}$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\nu' \; \mathrm{Im}\,A_0^2(\nu')\left\{\frac{\nu+\frac{1}{2}}{(\nu'+\frac{1}{2})(\nu'-\nu)} + \frac{\frac{2}{3}(\nu+\frac{1}{2})}{(\nu'+\frac{1}{2})(1+\nu+\nu')}\right. \qquad /27/$$

$$\left. - \frac{\frac{5}{6}\nu}{(1+\nu')(1+\nu+\nu')} + \frac{\frac{1}{36}\nu}{(1+\nu+\nu')^2}\right\}.$$

В этих уравнениях коэффициенты при p -волне в правых частях отличны от соответствующих выражений уравнений Чу-Мандельстама.

Вышеупомянутые трудности с аналитическим продолжением в нефизическую область, расходящимися коэффициентами и необходимостью обрезания избегаются в наших уравнениях.

IУ. Оценки ошибки из-за пренебрежения высшими волнами в физической области

Ошибку из-за отбрасывания d- и высших волн мнимой части и g- и высших волн в реальной части, можно определить методом, подобным использованному в разделе II.

Начнем с оценки ошибки в мнимой части. Получаем следующие выражения:

$$\left(1-\gamma\frac{\nu}{\nu''}\frac{d}{d\cos\theta''}\right)\left(\frac{1}{\tau-\cos\theta''}+\frac{1}{\tau+\cos\theta''}\right)\Bigg|_{\cos\theta''=1} \cong 2Q_0(\tau) \qquad /28а/$$

$$\left(1-\gamma\frac{\nu}{\nu''}\frac{d}{d\cos\theta''}\right)\left(\frac{1}{\tau-\cos\theta''}-\frac{1}{\tau+\cos\theta''}\right)\Bigg|_{\cos\theta''=1} \cong 6\left(1-\gamma\frac{\nu}{\nu''}\right)Q_1(\tau) \qquad /28б/$$

Здесь $\gamma=\frac{1}{3}$ в уравнениях для S-волн, $\gamma=\frac{1}{6}$ для p-волны. τ, как раньше, мы берем равным $41/9$. При меньших энергиях τ становится больше, а ошибка - меньше. При больших энергиях τ уменьшается, однако, условие унитарности /7/ нарушается. После простых вычислений находим, что в области, где выполняется условие унитарности /7/, ошибка приближенной формулы /28а/ менее 3%, а формулы /28б/ - менее 8%.

Оценка ошибки в вещественной части амплитуды рассеяния более сложна. Самое серьезное ограничение законности разложения Лежандра вызвано далекими особенностями, лежащими в тонком слое и не дающими заметного вклада в амплитуды рассеяния. Однако, грубая оценка показывает, что в области, где выполняется условие унитарности, ошибка реальной части амплитуды рассеяния должна быть меньше 10%.

Авторы выражают благодарность профессору Чжу Хун-юаню и доктору Д.В.Ширкову за предложение темы работы и ценные замечания и также Чжоу Гуан-чжао и Ван Жун за интересные обсуждения.

Приложение

Связь между константой вычитания λ, введенной в /1/, и нашей константой Λ дается формулой:

$$-\lambda = \Lambda - \frac{1}{30\pi}\int_0^\infty d\nu' \, \mathrm{Im} A_0^0(\nu') \left\{ \frac{1}{(\nu'+\frac{2}{3})(\nu'+\frac{1}{2})} + \frac{4/3}{(\nu'+\frac{1}{3})(\nu'+1)} - \frac{2/3}{(\nu'+\frac{1}{3})(\nu'+\frac{1}{2})} + \frac{1/3}{(\nu'+\frac{1}{3})^2} \right\}$$

$$- \frac{1}{30\pi}\int_0^\infty d\nu' \, \mathrm{Im} A_1^1(\nu') \left\{ \frac{9}{\nu'(\nu'+\frac{1}{2})} + \frac{2}{\nu'(\nu'+\frac{1}{3})} - \frac{4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\nu'}\right)}{(\nu'+\frac{1}{3})(\nu'+1)} + \frac{\frac{9}{2}}{(\nu'+\frac{1}{3})(\nu'+\frac{1}{2})} - \frac{3}{(\nu'+\frac{1}{3})^2} \right\}$$

$$+ \frac{1}{18\pi}\int_0^\infty d\nu' \, \mathrm{Im} A_0^2(\nu') \left\{ \frac{2}{(\nu'+\frac{1}{3})(\nu'+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(\nu'+\frac{1}{3})(\nu'+\frac{1}{2})} - \frac{1}{(\nu'+\frac{1}{3})^2} \right\}$$

Из-за пренебрежения волнами высших порядков эта формула не точна. Мы нашли, что соответствующая ошибка - менее 6%.

Примечание при корректуре (31 мая 1960 г.)

После направления настоящей статьи в печать, мы узнали о препринте Чу и Мандельстама (UCRL – 9126, Theory of the Low Energy $\pi - \pi$ - Interaction, II), в котором они отмечают, что, когда p-волна при низких энергиях велика, следует ввести обрезание. В их теории возникают, по крайней мере, два новых параметра. Решения их уравнений являются неустойчивыми. Это подтверждает наши заключения относительно их уравнений.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 мая 1960 года.

Литература

1. G. Chew and S. Mandelstam,'Theory of the Low-Energy Pion-Pion Interaction',UCRL–8728, April 1959.
2. S. Mandelstam, Phys.Rev. 112, 344 (1958).
3. S. Mandelstam, Phys.Rev. 115, 1741 (1959).
4. S. Mandelstam, Phys. Rev. 115, 1752 (1959).
5. S. McDowell, Phys.Rev. 116, 774 (1959).
6. W. Frazer and T. Fulco, 'Partial Wave Dispersion Relation for the Process $\pi + \pi \rightarrow N + \tilde{N}$ UCRL – 8806.
7. А.Ефремов, В.Мещеряков, Чжу Х.Ю. и Д.Ширков. "К выводу уравнений из представлений Мандельстама", препринт ОИЯИ.
8. E. Whittaker, G. Watson, ' Modern Analysis, pp. 321.
9. Н.Н.Боголюбов, Б.Медведев, М.Поливанов."Вопросы теории дисперсионных соотношений", Москва, 1958г.
10. G. Chew, M. Goldberger, F. Low and Y. Nambu, Phys.Rev. 106, 1337 (1957).

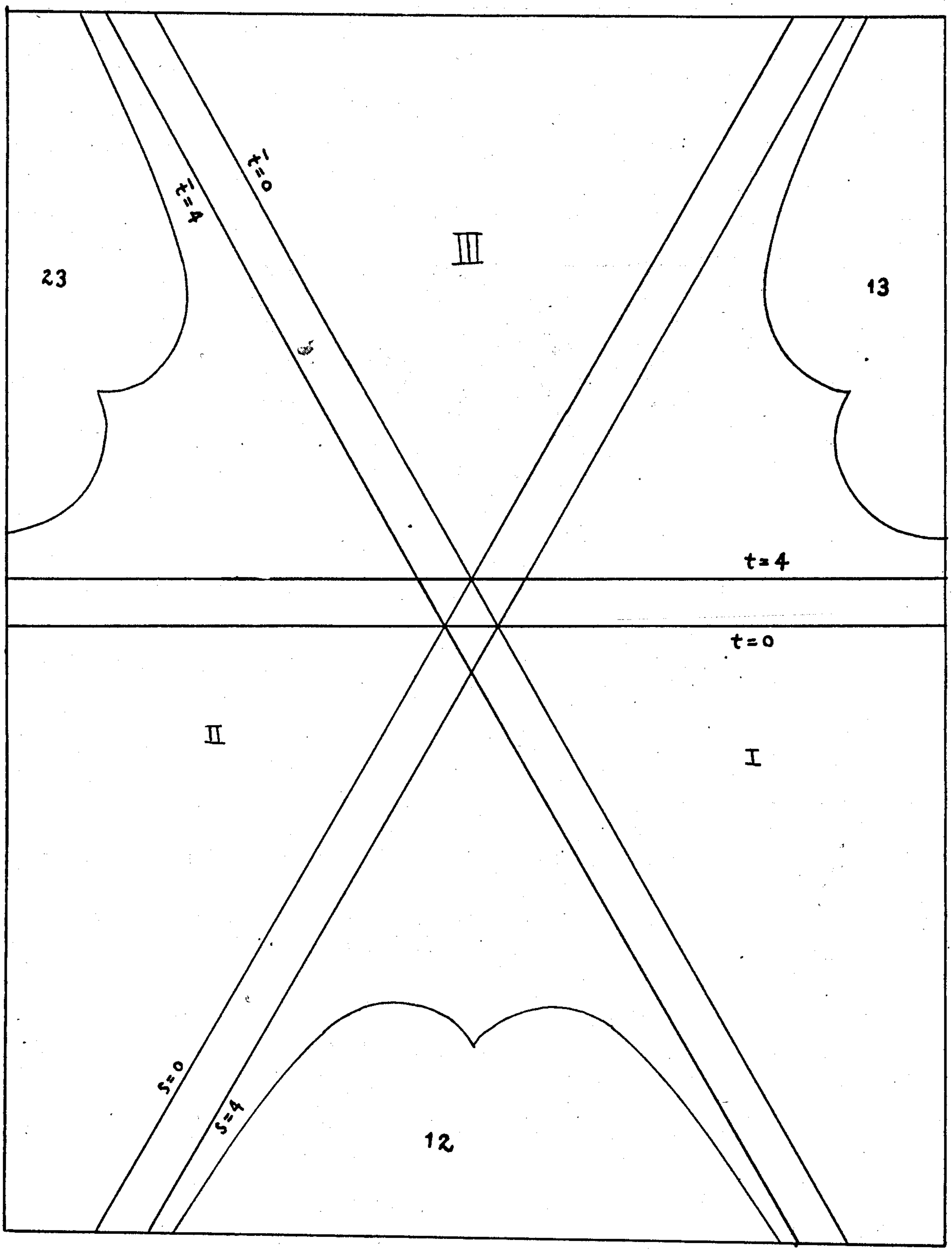

Рис. 1.

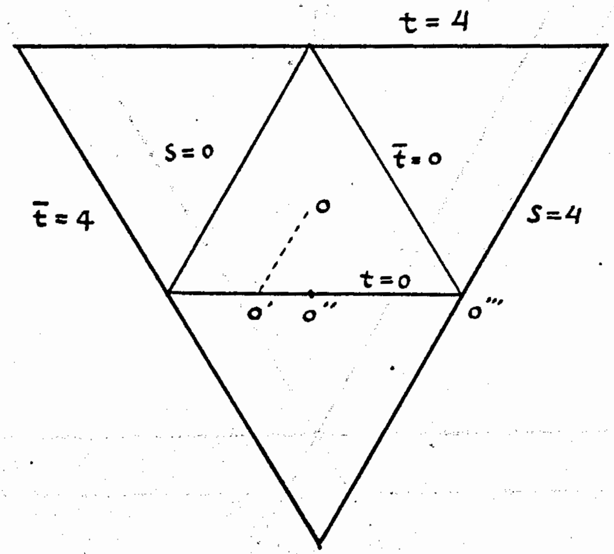

Рис. 2