ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

D-503

А.В. Ефремов, В.А. Мещеряков, Д.В. Ширков

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МЕЗОН-НУКЛОННОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

ЖЭТФ, 1960, т 39, в 2, с 438-449.

Дубна 1960 год

D-503

А.В. Ефремов, В.А. Мещеряков, Д.В. Ширков

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МЕЗОН-НУКЛОННОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

Направлено в ЖЭТФ

А н н о т а ц и я

Исходя из представления Мандельстама получены интегральные уравнения для парциальных волн πN -рассеяния в области низких энергий. Ядра уравнений содержат низшие фазы $\pi\pi$ -рассеяния.

1. Введение

Двойное дисперсионное представление Мандельстама [1] для двухчастичной функции Грина позволяет рассматривать матричные элементы соответствующих этой функции Грина процессов взаимодействия, как различные граничные значения единой аналитической функции двух комплексных переменных.

Это представление приводит к простым дисперсионным соотношениям по одной переменной, в том числе к обычным дисперсионным соотношениям по энергии при произвольном значении передачи импульса.

Используя условие унитарности для мнимых частей различных амплитуд мы приходим к возможности получить систему соотношений, связывающую амплитуды процессов.

Условие унитарности, использующее разложение по полной системе промежуточных состояний, вводит в рассмотрение бесконечный набор соответствующих амплитуд. Ограничиваясь в условии унитарности нижним по массе двухчастичным состоянием, мы приходим к системе уравнений для матричных элементов двухчастичных процессов. Двухчастичное приближение в мнимой части не дает ошибки вплоть до порога следующего по массе состояния, вследствие чего его интегральный эффект может считаться малым в области низких энергий. Тезис Чу "поведение аналитической функции в малой области определяется, главным образом, ближайшими особенностями" [2] является формулировкой этого приближения.

Изложенная программа дает возможность получать уравнения для двухчастичных амплитуд в области малых энергий. Ясно, что при этом важную роль играют амплитуды рассеяния самых легких частиц. Пренебрегая электромагнитными эффектами, мы получаем следующую логическую последовательность процессов /см.рис. 1/. для "обычных" сильно взаимодействующих частиц.

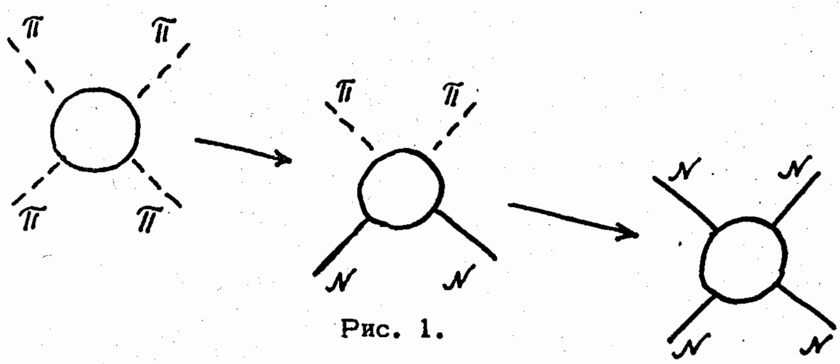

Рис. 1.

Схема обозначает, например, что в систему уравнений для процессов /$\pi N \to \pi N$, $\pi\pi \leftrightarrow N\tilde{N}$ / войдут амплитуды процесса $\pi\pi \to \pi\pi$. Для $\pi\pi$ рассеяния, наоборот, система уравнений будет замкнута. Таким образом, процесс $\pi\pi \to \pi\pi$ приобретает очень важное значение для теории сильных взаимодействий. Он является для них "исходным пунктом".

Уравнения для этого процесса были получены Чу и Мандельстамом /3/. Эти уравнения, подобно уравнениям Чу-Лоу, являются сингулярными интегральными нелинейными уравнениями. Как известно /4/ , такие уравнения имеют множество решений. Даже нахождение определенной ветви этих решений - сложная задача, выполнимая лишь с помощью быстродействующих электронных счётных машин. К настоящему моменту получено /5/ частное "адиабатическое" решение уравнений Чу-Мандельстама с преобладанием S -волны.

Узел $\pi\pi NN$ диаграммы 1, описывающий процессы:

I. $\pi + N \to \pi' + N$

II. $\pi' + N \to \pi + N$

III. $\pi + \pi' \to N + \tilde{N}$

с точки зрения процесса III рассматривался Фрезером и Фулко /6/. Они получили уравнения для амплитуд процесса III , содержащие амплитуды πN - рассеяния и фазы $\pi\pi$ -рассеяния. Попытка исследовать узел $\pi\pi NN$ с точки зрения πN -рассеяния была предпринята Мак-Дауэллом /7/ . Он рассматривал аналитические свойства парциальных амплитуд мезон-нуклонного рассеяния[x/] в комплексной плоскости переменной s [квадрат полной энергии системы мезон + нуклон - см. ниже /3.1/] и установил наличие кинематических комплексных особенностей, обусловленных неравенством масс.

Эти особенности затрудняют получение интегральных уравнений. Однако, недавно Чжу Хун-юань /частное сообщение/ смог провести до конца эти рассуждения и получил систему интегральных уравнений для амплитуд рассеяния и процесса $\pi\pi \to N\tilde{N}$.

В настоящей работе аналитические свойства амплитуд πN -рассеяния исследуются в комплексной плоскости переменной квадрата импульса q^2 в системе центра масс при фиксированном угле рассеяния. Этот подход аналогичен подходу Чини-Фубини-Стангеллини[/8/] к процессу $NN \to NN$.

В плоскости переменной q^2 кинематические особенности имеют вид конечного разреза на действительной оси и могут быть уничтожены путем рассмотрения соответствующих симметризованных и антисимметризованных выражений.

Ограничиваясь в условии унитарности для реакции I двухмезонным состоянием, мы оставляем в $\pi\pi \to \pi\pi$ амплитуде только s - и p -фазы. Это позволяет нам получить интегральные уравнения для амплитуд процессов $\underline{I}$ и $\overline{\underline{II}}$, содержащие только упомянутые две фазы δ_0^0 и δ_1^1 $\pi\pi$ -рассеяния. Использование принципа Чу дает возможность пренебречь нефизическими разрезами от реакции $\underline{II}$ и получить интегральные уравнения для парциальных волн πN -рассеяния. Разумеется, эти уравнения могут иметь смысл только в области малых энергий. Раздел 2 содержит сводку формул, выражающих матричные элементы процессов $\underline{I}$, $\overline{\underline{II}}$ и $\overline{\underline{III}}$ через инвариантные коэффициенты 2-частичной функции Грина, а также соотношения унитарности для парциальных волн.

В разделе 3 выбираются функции и переменная для аналитического продолжения. Это продолжение, а также устранение кинематических разрезов, осуществляется в разделе 4. Далее /раздел 5/, произведен анализ ближайшей части нефизического разреза от реакции $\overline{\underline{III}}$, с помощью приближенного

[x/] Точнее Мак-Дауэлл рассматривал процесс $KN \to KN$. Однако, кинематические особенности этого процесса аналогичны процессу $\pi N \to \pi N$.

условия унитарности, содержащего только S- и P- фазы $\pi\pi$ -рассеяния. С помощью метода Мусхелишвили мы получаем интегральные уравнения для амплитуд πN -рассеяния, содержащие интегралы только по физическим областям реакций I и II. Фазы $\pi\pi$ -рассеяния входят в ядра этих уравнений. В разделе 6 проводится переход к парциальным волнам в окончательных уравнениях.

Приведенный выше краткий обзор работ по использованию представлений Мандельстама неполон. Необходимо упомянуть о весьма важной работе Тер-Мартиросяна /9/, в которой с помощью условий унитарности в двухчастичном приближении, подвергнутым принудительной кроссинг-симметризации, получены уравнения для спектральных функций представления Мандельстама. Интересный метод приближенного сведения двойного представления Мандельстама к сумме одномерных предложен Чини и Фубини /10/.

2. Матричные элементы, условия унитарности

Матричные элементы процессов I, II и III , описываемых узлом $\pi\pi NN$, представляются в виде

$$\langle f|S-1|i\rangle = \frac{i}{(2\pi)^2}\delta(p_1+p_2+q_1+q_2)\sqrt{\frac{M^2}{4p_1^0p_2^0q_1^0q_2^0}}\,\bar{u}Tu\,. \qquad /1.2/$$

Двухчастичная функция Грина T обладает следующей структурой:

$$T = A + \frac{\hat{q}_1-\hat{q}_2}{2}B \quad ; \quad T = \delta_{\rho\rho'}T^{(+)} + \frac{[\tau_\rho,\tau_{\rho'}]}{2}T^{(-)}. \qquad /2.2/$$

В /2.1/ и /2.2/ приняты обычные обозначения, используется фейнмановская метрика $\hat{q} = q^0\gamma_0 - \vec{q}\vec{\gamma}\,;\ \gamma_0^2 = 1,\ \gamma_\alpha^2 = -1$.

Матричные элементы $\bar{u}Tu$ с точностью до множителя $M/4\pi W$ /W - полная энергия процесса/ совпадают со "спиральными состояниями" Якоба и Вика /11/. Для процесса рассеяния эти состояния имеют вид:

$$f_{++} = f_{--} = \cos\frac{\theta}{2}\cdot(f_1 + f_2) = \frac{\cos\theta/2}{4\pi W}\left\{M.A + (p^0 W - M^2)B\right\}$$

$$f_{+-} = -f_{-+} = \sin\frac{\theta}{2}\cdot(f_1 - f_2) = \frac{\sin\theta/2}{4\pi W}\left\{P_0 . A + M q_0 B\right\}. \qquad /2.3/$$

Здесь, как и ниже в /2.6/, азимутальные углы приравнены нулю, θ – угол рассеяния в системе центра масс, а f_1 и f_2 выражаются через парциальные амплитуды

$$f_1 = \sum_\ell \left\{ f_{\ell,+} P'_{\ell+1}(\cos\theta) - f_{\ell,-} P'_{\ell-1}(\cos\theta) \right\} \qquad /2.4/$$

$$f_2 = \sum_\ell \left\{ f_{\ell,-} - f_{\ell,+} \right\} P'_\ell(\cos\theta)$$

$$f^J_{\ell,\pm} = \frac{1}{q} e^{i\delta^J_{\ell,\pm}} \sin\delta^J_{\ell,\pm} . \qquad /2.5/$$

Спиральные состояния для процесса $\overline{III}$ будут /ср. /6/ /

$$J_{++} = J_{--} = \frac{1}{8\pi p^0}\left\{-pA + qM\cos\theta_3 B\right\} \qquad /2.6/$$

$$J_{+-} = -J_{-+} = \frac{q}{8\pi}\sin\theta_3 B .$$

Здесь θ_3 – угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Разложение по парциальным волнам имеет вид

$$J_{++} = \frac{1}{pp^0}\sum_\ell (\ell + 1/2)(p.q)^\ell f^\ell_+ P_\ell(\cos\theta_3) \qquad /2.7/$$

$$J_{+-} = q\sum_\ell \frac{\ell + 1/2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}(p.q)^{\ell-1} f^\ell_- P^{(1)}_\ell(\cos\theta_3). \qquad /2.8/$$

Если ввести в эти формулы изотопические индексы / $\pm$ /, то для знака /+ / суммирование в них идет только по четным ℓ , а при знаке / – / – по нечетным.

Рассмотрим антиэрмитову часть третьего процесса, ограничившись в сумме по полной системе функций двухмезонным членом. Она может быть представлена в виде:

$$Jm\, J^{(\pm)}_{\lambda\mu} = \frac{q}{64\pi^2 q^0} \int d\Omega_{\vec{q}'}\, J^{(\pm)}_{\lambda\mu}(\vec{p},-\vec{p};\vec{q}',-\vec{q}')\, \overset{*}{\Pi}{}^{(0,1)}(\vec{q}',-\vec{q}';\vec{q},-\vec{q}). \qquad /2.9/$$

Здесь Π^0 и Π^1 - амплитуды $\pi\pi$ - рассеяния с полным изотопическим спином 0 и 1 соответственно /см.,например, /2.8/ из [/3/]/. Из /2.9/ видно, что $J^{(\pm)}$ - амплитуды процесса $\overline{III}$ с полным изотопическим спином 0,1.

Ниже будем рассматривать аналитическое продолжение формулы /2.9/ в нефизическую область малых q^2 . В этом случае можно ограничиться в амплитуде Π s - и p - волнами. Разлагая /2.9/ по парциальным волнам и возвращаясь к А и В, получим в этом приближении

$$\begin{aligned} Jm\, A^{(+)} &= -\frac{4\pi}{p^2} f_+^{0(+)} e^{-i\delta_0} \sin\delta_0 \\ Jm\, A^{(-)} &= 12\pi \frac{q\cos\theta_3}{p} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} f_-^{1(-)} - f_+^{1(-)} \right\} e^{-i\delta_1} \sin\delta_1 \\ Jm\, B^{(-)} &= 6\sqrt{2}\, f_-^{1(-)} e^{-i\delta_1} \sin\delta_1 \\ Jm\, B^{(+)} &= 0. \end{aligned} \qquad /2.10/$$

Здесь δ_0 - s- фаза с $J = 0$, δ_1 - p - фаза для $J = 1$.

3. Кинематика; выбор переменных и функций для аналитического продолжения.

Введем обычные инвариантные переменные

$$s = (p_1 + q_1)^2, \quad \bar{s} = (p_1 + q_2)^2, \quad t = (p_1 + p_2)^2 \qquad /3.1/$$

$$s + \bar{s} + t = 2(M^2 + \mu^2),$$

которые в системах центра масс реакций $\overline{I}$ и $\overline{III}$ имеют вид

$$\mathrm{I}\qquad \begin{aligned} s &= M^2+\mu^2+2q^2+2\sqrt{(q^2+M^2)(q^2+\mu^2)} \\ \bar{s} &= M^2+\mu^2-2q^2\cos\theta-2\sqrt{(q^2+M^2)(q^2+\mu^2)} \\ t &= -2q^2(1-\cos\theta) \end{aligned} \qquad /3.2/$$

$$\underline{\mathrm{III}}\qquad \begin{aligned} s &= M^2-\mu^2-2q_3^2+2p_3q_3\cos\theta_3 \\ \bar{s} &= M^2-\mu^2-2q_3^2-2p_3q_3\cos\theta_3 \\ t &= 4(q_3^2+\mu^2)=4(p_3^2+M^2). \end{aligned} \qquad /3.3/$$

Аналитические свойства инвариантных скалярных функций $A^{(\pm)}$, $B^{(\pm)}$, введенных в /2.2/, описываются представлением Мандельстама /см.формулу /2,12/ из работы[1] /. В дальнейшем будет важно, что представления для $B^{\pm}$ содержат полюсные члены

$$B^{(\pm)}(s,\bar{s},t)=\frac{g^2}{M^2-s}\mp\frac{g^2}{M^2-\bar{s}}+\ldots \qquad /3.4/$$

тогда как представления для $A^{(\pm)}$ не содержат их. Мы выберем для аналитического продолжения четыре функции $\phi(s,\bar{s},t)$

$$\phi(s,\bar{s},t)=\left\{A^{(+)}(s,\bar{s},t),\ \frac{A^{(-)}(s,\bar{s},t)}{s-\bar{s}},\ \frac{B^{(+)}(s,\bar{s},t)}{s-\bar{s}},\ B^{(-)}(s,\bar{s},t)\right\} \qquad /3.5/$$

Все эти функции обладают свойством

$$\phi(\bar{s},s,t)=\phi(s,\bar{s},t). \qquad /3.6/$$

Кроме того, на бесконечности они убывают не медленнее чем А и В. Деление на / $s-\bar{s}$ / не вносит новых особенностей.

Функции ϕ будут рассматриваться с точки зрения реакции $\underline{\mathrm{I}}$, в которой мы фиксируем угол рассеяния $\cos\theta=c$, т.е. мы будем рассматривать аналитические свойства по переменной q^2. Формулы /3.2/ удобно теперь записать в виде

$$S = S(q^2) = R(q^2) + D(q^2) + 2K(q^2)$$
$$\bar{S} = \bar{S}(q^2) = R(q^2) - D(q^2) - 2K(q^2) \qquad /3.7/$$
$$t = -2q^2(1-c)$$

где

$$R(q^2) = M^2 + \mu^2 + q^2(1-c)$$
$$D(q^2) = q^2(1+c) \qquad /3.8/$$
$$K(q^2) = \sqrt{(q^2+M^2)(q^2+\mu^2)}\,.$$

4. Устранение кинематических разрезов и теорема Коши

Функции

$$\phi(s,\bar{s},t)\Big/_{(3.7)} = \phi(q^2), \qquad /4.1/$$

рассматриваемые в комплексной плоскости q^2, обладают следующими особенностями: 1/ разрезом $0 < q^2 < \infty$ от знаменателя $(s' - s)$ в спектральной формуле Мандельстама; 2/ разрезом $-\infty < q^2 < -2\mu^2/(1-c) = -a_3$ от знаменателя $(t'-t)$; 3/ разрезом $-\infty < q^2 < -a(c)$ от $(\bar{s}' - \bar{s})$

$$a(c) = \begin{cases} M^2 & 1 \geq c \geq \mu/M \\ a_2 = \dfrac{M^2+\mu^2-2M\mu c}{1-c^2} & \mu/M \geq c \geq -1 \end{cases} \qquad /4.2/$$

4/ разрезом $-M^2 < q^2 < -\mu^2$, возникающим из-за квадратного корня /3.8/ в зависимости $s(q^2)$, $\bar{s}(q^2)$ от q^2. Этот разрез мы назовем кинематическим.

Кроме того, функции $B^{(+)}/(s-\bar{s})$ и $B^{(-)}$ будут обладать полюсами от членов /3.4/.

Кинематический разрез $-M^2 < q^2 < -\mu^2$ при переходе к переменной S дает комплексный разрез, расположенный на круге /ср. [7] /. Для того, чтобы избавиться от него, представим $\phi(q^2)$ следующим образом

$$\phi(q^2, K) = \phi_1(q^2) + K(q^2)\phi_2(q^2), \qquad /4.3/$$

явно выделив иррациональную зависимость. Функции ϕ_i иррациональных зависимостей не содержат. Они могут быть определены как

$$\phi_1(q^2) = \frac{\phi(q^2, K(q^2)) + \phi(q^2, -K(q^2))}{2} \qquad /4.4/$$

$$\phi_2(q^2) = \frac{\phi(q^2, K(q^2)) - \phi(q^2, -K(q^2))}{2K(q^2)}. \qquad /4.5/$$

Выясним смысл функции $\phi(q^2, -K(q^2))$. В соответствии с /3.7/ и /4.1/ имеем $\phi(q^2, -K) = \phi(s^*, \bar{s}^*, t)$, причем

$$s^*(q^2) = R(q^2) + D(q^2) - 2K(q^2)$$
$$\bar{s}^*(q^2) = R(q^2) - D(q^2) + 2K(q^2). \qquad /4.6/$$

Переменные $s^*, \bar{s}^*$ записаны через переменные первой реакции q^2 и c.

Точка $(s^*, \bar{s}^*, t)$ есть физическая точка второй реакции, если (q^2, c) - физическая точка первой реакции. Связь между ними задается формулами

$$q_2^2 = q^2 \frac{M^2 + \mu^2 + q^2(1 + c^2) - 2cK(q^2)}{M^2 + \mu^2 - 2cq^2 + 2K(q^2)} \qquad /4.7/$$

$$c_2 = 1 - \frac{q^2}{q_2^2}(1 - c).$$

Геометрическую интерпретацию соотношений /4.7/ см. в приложении.

Функции $\phi(q^2, -K(q^2))$, рассматриваемые в комплексной плоскости q^2, обладают следующими особенностями: 1/ разрезом $0 < q^2 < \infty$ от знаменателя $(\bar{s}' - \bar{s}^*)$ в спектральной формуле Мандельстама; 2/ разрезом $-a_2 < q^2 < -\mathcal{M}^2$ от того же знаменателя при $c \geq \mu/\mathcal{M}$; 3/ разрезом $-\infty < q^2 < -a_3$ от знаменателя $(t'-t)$; 4/ кинематическим разрезом $-\mathcal{M}^2 < q^2 < -\mu^2$. Кроме того, функции $B^{(+)}/(s-\bar{s})$, $B^{(-)}$ от аргументов $q^2, -K$ будут обладать полюсами.

Функции $\Phi_i(q^2)$ будут обладать всеми особенностями функций $\Phi(q^2, K(q^2))$, $\Phi(q^2, -K(q^2))$, кроме кинематического разреза.

Написав для них формулы Коши и возвращаясь к первоначальной функции $\Phi(q^2, K)$, получаем

$$\Phi(q^2, K) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{Jm\,\Phi(q'^2, K')\,æ_+(q^2, q'^2) + Jm\,\Phi(q'^2, -K')\,æ_-(q^2, q'^2)}{q'^2 - q^2}\,dq'^2 +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-a_3} \frac{Jm\,\Phi(q'^2, K')\,æ_+(q^2, q'^2) + Jm\,\Phi(q'^2, -K')\,æ_-(q^2, q'^2)}{q'^2 - q^2}\,dq'^2 + \qquad /4.8/$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-a(c)} \frac{Jm\,\Phi(q'^2, K')\,æ_+(q^2, q'^2)}{q'^2 - q^2}\,dq'^2 + \frac{\theta(c - \frac{\mu}{\mathcal{M}})}{\pi}\int_{-a_2}^{-\mathcal{M}^2} \frac{Jm\,\Phi(q'^2, -K')\,æ_-(q^2, q'^2)}{q'^2 - q^2}\,dq'^2$$

+ полюсные члены для $\frac{B^{(+)}}{s-\bar{s}}$, $B^{(-)}$.

Здесь

$$æ_\pm(q^2, q'^2) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{K(q^2)}{K(q'^2)}\right). \qquad /4.9/$$

На рис. 2 изображены области интегрирования в уравнении /4.8/ в зависимости от c .

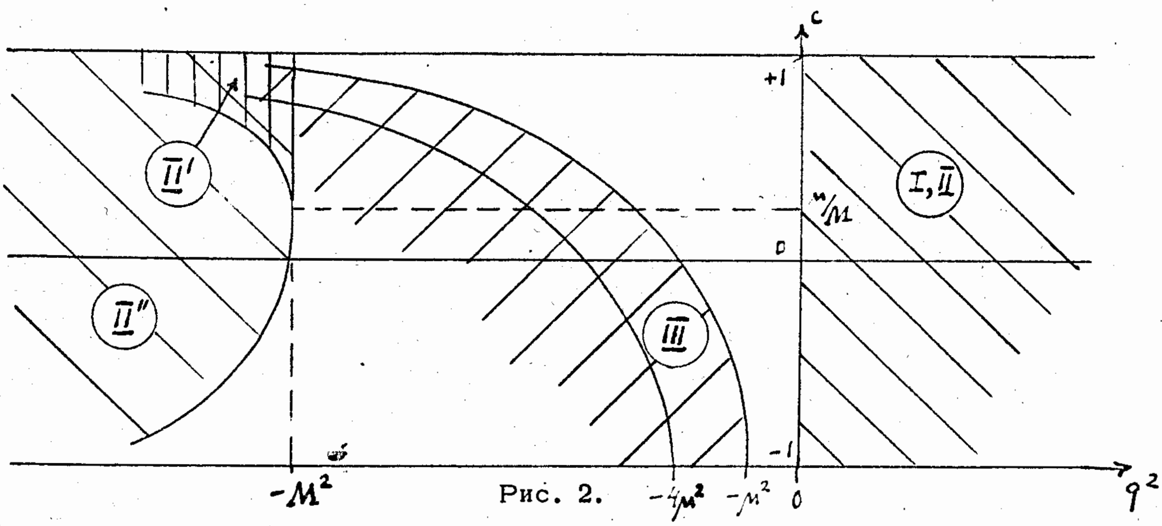

Рис. 2.

Из этого рисунка видно, что случаи рассеяния назад и вперед обладают наибольшей простотой. Так, при $c=-1$ нефизический разрез от реакции $\overline{II}$ /область $\overline{II}'$ / уходит на бесконечность и при $q^2<0$ остается лишь разрез от реакции $\overline{III}$. Как можно показать, в этом случае в интеграл входит антиэрмитова часть амплитуды от физического значения $\cos\theta_3=-1$.

Для рассеяния вперед $(c=1)$, наоборот, уходит на бесконечность разрез от реакции $\overline{III}$. В этом случае антиэрмитовы части под интегралами по областям $\overline{II}'$ и $\overline{II}''$ также зависят от физического значения $\cos\theta_2=1$. Формулы /4.8/ в точности совпадают с обычными дисперсионными соотношениями вперед по переменной энергии E в лабораторной системе координат. При этом области интегрирования находятся в следующем соответствии /см. таблицу/.

Таблица

	Область в переменной q^2	Область в переменной E
I	$[0, \infty)$	$[\mu, \infty]$
$\overline{II}$	$[0, \infty]$	$[-(M^2+\mu^2)/2M, -\mu]$
$\overline{II}'$	$(-\infty, -M^2]$	$[-M, -(M^2+\mu^2)/2M]$
$\overline{II}''$	$(-\infty, -M^2]$	$(-\infty, -M]$

5. Исследование разреза от реакции III

Второй интеграл в формуле /4.8/ содержит антиэрмитову часть реакции III в нефизической области $t<4M^2$. Мы будем рассматривать величины $Jm\,\Phi$ в этой области, как аналитические продолжения соответствующих функций из физической области $t>4M^2$. Их явные выражения могут быть получены из /2.10/ с учетом того, что $s-\bar{s}=4p_3q_3\cos\theta_3$. Ввиду того, что в нашем приближении /учет только s- и p- фаз $\pi\pi$- рассеяния/ эти выражения не содержат $\cos\theta_3$, они совпадают с числителями во втором интеграле /4.8/. В более общем случае, при учете высших фаз, эти выражения зависят от $\cos\theta_3$ и тогда следует воспользоваться связью

$$2(\vec{p}_3\vec{q}_3)=\frac{s-\bar{s}}{2}=D+2K. \qquad /5.1/$$

Из /5.1/ видно, что $\cos\theta_3$ становится комплексным, однако, числитель второго интеграла в /4.8/ остается действительным. Для того, чтобы связать $Jm\,\Phi$ с самими функциями Φ, следует обратиться к разложениям типа /2.7/ и /2.8/. Эти разложения фактически идут по параметру $(s-\bar{s})$. Радиус сходимости такого разложения определяется особенностями представления Мандельстама. Ближайшими особенностями являются полюса от однонуклонных знаменателей. В приближении /2.10/ эти особенности существенны только для функции $B^{(-)}$. Мы рассмотрим их несколько ниже. Следующие особенности возникают от интегралов двойного спектрального представления. Можно показать, что эти особенности не препятствуют разложениям вплоть до

$$q'^2\sim-3\mu^2. \qquad /5.2/$$

Поэтому разложения /2.7/, /2.8/ справедливы только в области /5.2/. Мы предположим, что члены этих разложений быстро убывают и ограничимся в них первыми членами. Это дает

$$Jm\,A^{(+)}=A^{(+)}e^{-i\delta_0}\sin\delta_0$$
$$Jm\left(\frac{A^{(-)}}{s-\bar{s}}\right)=\frac{A^{(-)}}{s-\bar{s}}e^{-i\delta_1}\sin\delta_1. \qquad /5.3/$$

Вернемся к уравнению /4.8/ и сравним эффекты от различных нефизических вкладов из интервала $q^2 < 0$. Предполагая в дальнейшем переход к парциальным амплитудам рассеяния, т.е. усреднение по $\cos\theta = c$ мы должны рассматривать роль этих разрезов по переменной q^2 независимо от c. Из рис. 2 следует, что ближайший разрез, начинающийся от точки $-\mu^2$, связан с 3-ей реакцией. Двухмезонная унитарность позволяет нам аккуратно учесть этот разрез до точки $-4\mu^2$ /существуют соображения /3,6,12/, позволяющие предполагать, что эти соотношения будут верны и в некоторой области ниже $-4\mu^2$ /. Однако, как было отмечено ранее /5.2/, формулы /5.3/ могут быть справедливы не ниже $\sim -3\mu^2$. Таким образом, разумно ожидать, что формулы /5.3/ позволят нам учесть ближайшие нефизические особенности в интервале $[-3\mu^2, -\mu^2]$. Ясно, что мы должны поэтому полностью пренебречь вкладами от нефизических областей $\bar{\underline{II}}'$ и $\bar{\underline{II}}''$, расположенных за $-M^2$. Оценки для рассеяния вперед, когда области $\bar{\underline{II}}'$ и $\bar{\underline{II}}''$ дают весь нефизический вклад, показали, что пренебрежение ими при малых энергиях вплоть до значений E порядка 100 Мэв, дает ошибку $\sim$ 10%. Можно ожидать, что глобальный эффект после усреднения по углам уменьшится. В результате мы получаем следующее уравнение для $B^{(+)}$

$$\frac{B^{(+)}}{s-\bar{s}} = \frac{g^2}{(M^2-s)(M^2-\bar{s})} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\left(B^{(+)}/(s-\bar{s})\right)\varkappa_+(q^2, q'^2)}{q'^2-q^2}\,dq'^2 + \tag{5.4}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\left(B^{(+)}/(s-\bar{s})\right)\varkappa_-(q^2, q'^2)}{q'^2-q^2}\,dq'^2.$$

Соответствующие уравнения для $A^{(+)}$ и $A^{(-)}/(s-\bar{s})$ можно упростить. Для этого удобно вернуться к функциям Φ_1 и Φ_2. В нашем приближении на разрезе $[-3\mu^2, -\mu^2]$ $\operatorname{Im}\Phi_2 = 0$, а $\operatorname{Im}\Phi_1 = \Phi_1 e^{-i\delta}\sin\delta$.
Если считать интегралы по областям $[0, \infty)$ известными функциями, то уравнение для Φ_1, будет линейным сингулярным уравнением, которое может быть решено методом Мусхелишвили [см.главу 5 в /13/, а также /14/.] В нашем случае это сведется к рассмотрению функции $\Phi_1(q^2)\exp[-u(q^2)]$

$$u(q^2) = \frac{-1}{\pi} \int\limits_{\sim -3\mu^2}^{-a_3} \frac{\delta\left(-\frac{q'^2(1-c)}{2} - \mu^2\right)}{q'^2 - q^2}\, dq'^2, \qquad /5.5/$$

не обладающей особенностями при $q^2 < 0$.

Решая уравнение этим путем, получаем после небольших преобразований

$$\Phi(q^2, K) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{Jm\, \Phi_I(q'^2)\, \varkappa_+(\delta, q^2, q'^2)}{q'^2 - q^2}\, dq'^2 +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{Jm\, \Phi_{II}(q'^2)\, \varkappa_-(\delta, q^2, q'^2)}{q'^2 - q^2}\, dq'^2; \; \Phi_{I,II} = \Phi(q^2, \pm K); \qquad /5.6/$$

где

$$\varkappa_\pm(\delta, q^2, q'^2) = \frac{1}{2}\left[e^{u(q^2) - u(q'^2)} \pm \frac{K(q^2)}{K(q'^2)}\right]. \qquad /5.7/$$

Отметим, что наше приближение /5.3/ эквивалентно условию : $\Phi_2(q^2) = 0$ при $q^2 < -a_3$.

Обратимся к функции $B^{(-)}$, представление Мандельстама которой содержит полюсные члены, препятствующие разложению по аргументу $s - \bar{s}$ в области реакции $\overline{\underline{III}}$. Будем считать, что большие значения действительных частей высших парциальных волн $f_\ell \; (\ell \geq 3)$ в разложении /2.8/ целиком обусловлены этими полюсными членами. /Аналогичные соображения использовались Окунем и Померанчуком [15] при рассмотрении высших парциальных волн в NN -рассеянии/. Это дает нам возможность записать

$$Jm\, B^{(-)} = \left\{ B^{(-)} - g^2\left(\Delta - \langle\Delta\rangle_1\right)\right\} e^{-i\delta_1} \sin\delta_1 . \qquad /5.8/$$

Здесь Δ обозначает полюсный член, а $\langle\Delta\rangle_1$ – первый член его разложения по углу реакции $\overline{\underline{III}}$

$$\langle\Delta\rangle_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{(2M^2 - s - \bar{s})}{(M^2 - s)(M^2 - \bar{s})}\, d\cos\theta_3 =$$

$$= \frac{1}{2Z(t)} \ln \frac{R(t) + 2Z(t)}{R(t) - 2Z(t)} \qquad /5.9/$$

$$R(t) = M^2 + \mu^2 - \frac{t}{2}$$

$$Z(t) = \sqrt{\left(\frac{t}{4} - \mu^2\right)\left(\frac{t}{4} - M^2\right)}$$

причем выбирается та ветвь функции $\langle\Delta\rangle_1$, которая действительна в физической области реакции $\underline{\mathrm{I}}$.

Выполняя преобразование с e^{-u}, получаем

$$B^{(-)} = g^2\left(\Delta - \langle\Delta\rangle_1\right) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\, B_{\mathrm{I}}^{(-)}(q'^2)\,\varkappa_+(\delta, q^2, q'^2) + \mathrm{Im}\, B_{\mathrm{II}}^{(-)}(q'^2)\,\varkappa_-(\delta, q^2, q'^2)}{q'^2 - q^2}\, dq'^2 \qquad /5.10/$$

В нашем приближении антисимметризованная по K часть функции $B^{(-)}$ равна антисимметризованной части полюсных членов, т.е. $B_2^{(-)} = g^2\Delta_2$. Отметим еще, что аналогичный способ устранения трудностей, связанных с полюсами, был предложен недавно Чини и Фубини[10].

6. Переход к парциальным амплитудам рассеяния

Для того, чтобы превратить набор /5.4/, /5.6/ и /5.10/ в замкнутую систему уравнений, нам осталось воспользоваться соотношениями унитарности и перейти к парциальным амплитудам рассеяния. Из /2.3/, с учетом того, что

$$s - \bar{s} = 2(1 + \cos\theta)q^2 + 4q^0p^0$$

получаем выражения для функций Φ через переменные и амплитуды реакции I. Входящие в них $f^{(\pm)}_{1,2}$ зависят от аргументов q^2, $\cos\theta = c$ и с помощью формул /2.3/, /2.4/ выражаются через парциальные волны f_ℓ, обладающие, согласно /2.5/, свойством унитарности.

Таким образом, мы можем переходить к парциальным амплитудам f_ℓ как от функций Φ, так и от $\mathrm{Im}\,\Phi_{\mathrm{I}}(q'^2)$, входящих в интегральные члены набора /5.4/, /5.6/ и /5.10/. Чтобы перейти к f_ℓ от $\mathrm{Im}\,\Phi_{\mathrm{II}} = \mathrm{Im}\,\Phi(q_3^2 - K)$, заметим, во-первых, что формулы /2.3/ сохраняют свой вид и в переменных реакции II. Для этого нужно лишь перейти в них к соответствующим переменным в системе центра масс реакции II $\cos\theta \to \cos\theta_2$, $q \to q_2$, $q_0 \to q_{02}$, $P_0 \to P_{02}$. Переход же в аргументах $\mathrm{Im}\,\Phi$ к переменным реакции II осуществляется с помощью формул /4.7/. Получаем из них:

$$\cos\theta_2 = \frac{2q_2^2 + M^2 + \mu^2 - 2\cos\theta\, K(q_2^2) - \Box(q^2, \cos\theta)}{2q_2^2(1+\cos\theta)} \qquad /6.1/$$

$$\Box = \left\{\left[2q_2^2 + 2K(q_2^2) - \cos\theta\,(M^2+\mu^2)\right]^2 - \sin^2\theta\,(M^2-\mu^2)^2\right\}^{1/2}.$$

Совершая в интегралах, содержащих $\mathrm{Im}\,\Phi_{\mathrm{II}}(q'^2)$, переход к новой переменной интегрирования q'^2

$$q'^2 = \frac{\Box(q_2'^2 \cos\theta) + 2\cos\theta\left[q_2'^2 + K(q_2'^2)\right] - M^2 - \mu^2}{2\sin^2\theta}$$

/6.2/

$$K(q'^2) = \frac{2K(q_2'^2) + 2q_2'^2 - \cos\theta\,(M^2+\mu^2-\Box)}{2\sin^2\theta}$$

$$\frac{dq'^2}{dq_2'^2} = \frac{2K(q_2'^2) + M^2 + \mu^2 + 2q^2}{\Box(q_2'^2, \cos\theta)}\;\frac{K(q'^2)}{K(q_2'^2)} = D(q_2'^2, \cos\theta),$$

можем представить их в виде

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,\Phi_{\mathrm{II}}(q'^2)}{q'^2 - q^2}\,\varkappa_-(\delta, q'^2, q^2)\,dq'^2 =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,\Phi\,(q_2'^2, c_2(q'^2, c))}{q'^2(q_2'^2, c) - q^2}\,D(q_2'^2, c)\,\varkappa_-(\delta, q_2'^2, q^2 c)\,dq_2'^2. \qquad /6.3/$$

Здесь $\Phi(q_2'^2, C_2)$ обозначает амплитуду реакции $\overline{II}$, записанную через импульс q_2' и косинус угла рассеяния C_2 в ее системе центра масс. $\operatorname{Im}\Phi(q_2'^2 C_2)$ определяется по формулам /2.3/-/2.5/. Символ $\mathcal{X}_{\pm}(\delta, q_2'^2, C, q^2)$ обозначает величину /5.7/ после подстановки /6.2/.

7. Обсуждение результатов

Набор /5.4/, /5.6/, /5.10/, /6.1/-/6.3/ дает полную систему уравнений для парциальных волн πN рассеяния. При выводе мы аккуратно учли полюсные члены и вклад $\pi\pi$ -взаимодействия до $q^2 = -3\mu^2$, где начинают играть роль 4-мезонные вклады в процесс $\pi\pi \to N\tilde{N}$ и вклады от спектральных функций двойных представлений Мандельстама.

Поэтому полученные уравнения могут давать разумные приближения лишь в области малых энергий, где мы должны ограничиться небольшим количеством парциальных волн. В уравнения входят фазы δ_0 и δ_1 $\pi\pi$ -рассеяния. Поскольку об этих фазах никаких прямых сведений сейчас не имеется, то естественно использовать полученную систему уравнений для косвенного получения информации об этих фазах. Большой интерес здесь представляет проверка гипотезы [16] о существовании резонанса в р- волне $\pi\pi$ -рассеяния. Такая гипотеза приводит к разумным результатам по электромагнитной структуре нуклона [17].

Отметим, что изложенный прием устранения кинематических особенностей может быть использован для ряда других задач рассеяния частиц с неравными массами, например, для $K\pi$ и KN .

Авторы выражают благодарность проф. Чжу Хун-юаню за неоднократные очень важные обсуждения и ценные советы, Н.А.Черникову за разъяснение вопросов, изложенных в приложении, а также участникам семинара сектора Боголюбова ЛТФ ОИЯИ за полезную дискуссию.

Приложение x/

Поясним геометрический смысл преобразования /4.7/. Введем описание кинематики реакций в пространстве скоростей /18/, которое является пространством Лобачевского. Обычная связь между элементами треугольника $C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma$ заменяется здесь на $\mathrm{ch}\, C = \mathrm{ch}\, A\, \mathrm{ch}\, B - \mathrm{sh}\, A\, \mathrm{sh}\, B \cos\gamma$. 4-скорость частицы p/m изображается точкой этого пространства.

Рассмотрим плоскость в пространстве скоростей, проходящую через скорости частиц, участвующих в реакции I $P_i = p_i/M$, $Q_i = q_i/\mu$, $i=1,2$ /см. рис. 3/.

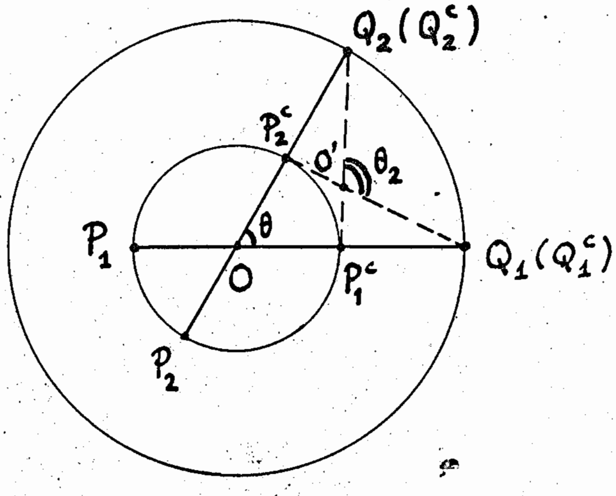

Рис. 3.

Точка 0 изображает скорость центра масс. Инварианты s и t могут быть выражены через расстояния $\overset{\frown}{P_1Q_1}$ и $\overset{\frown}{Q_1Q_2}$

$$s = M^2 + \mu^2 + 2M\mu\, \mathrm{ch}\, \overset{\frown}{P_1Q_1}$$

$$t = 2\mu^2 \left(1 - \mathrm{ch}\, \overset{\frown}{Q_1Q_2}\right).$$

---

x/ Приводимая интерпретация была предложена Н.А.Черниковым.

Для того, чтобы перейти к переменным второй реакции, заметим, что из /3.2/ и /4.6/ вытекает, что $s\bar{s}^{*} = (M^2-\mu^2)^2$. Отсюда следует, что s^{*} может быть представлено в виде

$$s^{*} = M^2+\mu^2 - 2M\mu \, ch\, \overbrace{P_1^cQ_1}.$$

Если теперь отождествить P_1^c со скоростью начального нуклона в реакции $\overline{\underline{II}}$, а Q_1 - со скоростью вылетающего мезона реакции $\overline{\underline{II}}$ Q_1^c, то из условия инвариантности t следует, что точку Q_2 можно отождествить со скоростью Q_2^c. Тогда P_2^c есть пересечение отрезка OQ_2 с малой окружностью. Скорость O' центра масс $\overline{\underline{II}}$-ой реакции и угол рассеяния θ_2 определяются пересечением отрезков $P_2^cQ_1$ и $P_1^cQ_2$ и углом между ними. Импульс $\overline{\underline{II}}$-ой реакции определяется соотношением

$$q^c = M\, sh\, \overbrace{O'P_1^c} = \mu\, sh\, \overbrace{O'Q_1^c}.$$

Из рисунка видно, что $\theta_2 > \theta$, за исключением рассеяния вперед и назад, когда эти углы равны; $q^c = q$ для рассеяния назад и меньше q для всех остальных углов.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 марта 1960 года.

Литература

1. S.Mandelstam.Phys. Rev. 112, No. 4, 1344, (1958).
2. G.F. Chew. Ann. Rev. Nucl. Sci. 9, 29, (1959), стр. 57, а также доклад на Киевской конференции по высоким энергиям.
3. G.F. Chew and S. Mandelstam. 'Theory of Low EnergyPion-Pion Interaction' UCRL – 8728. April, 1958.
4. L. Castillejo, R. Dalitz, F. Dyson. Phys. Rev., 101, No. 1, 453, (1956).
5*. G.F. Chew, S. Mandelstam, H.P. Noyes . 'S–Wave–Dominant Solutions of the Pion-Pion Integral Equations'. UCRL–9001, Nov. 1959.
6*. W. Fraser, T. Fulco. 'Partial-Wave Dispersion Relations for Process $\pi+\pi\to N+\bar{N}$' UCRL–8806.
7. S.W. McDowell. Phys.Rev., 116, No. 3, 774, (1959).
8. M. Cini, S . Fubini, A. Stanghellini. Phys. Rev., 114, 1633, (1959).
9*. К.А.Тер-Мартиросян "Уравнения для спектральных функций квантовой теории поля – 1", ЖЭТФ /в печати/.
10*. M. Cini, S. Fubini. 'Theory of LowEnergy Scattering in Field Theory'. CERN preprint (1960).
11. M. Jacob, G.C. Wick. Ann. of Phys., 7, 404–428 , (1959).
12. R.H. Capps. Phys. Rev. Lett., 2, 475, (1959).
13. Н.И.Мусхелишвили "Сингулярные интегральные уравнения". Гостехиздат, Москва, 1946.
14. R. Omnes. Nuovo Cim., 8, 316, (1958).
15. Л.Б.Окунь, И.Я.Померанчук. ЖЭТФ, 36, 300 /1959/; Nucl.Phys., 10, 492, (1959).
16*. G. Chew. 'Posible Manifestations of Pion-Pion Interaction'. UCRL–9028. Jan, 1960.
17*. W. Frazer, J.Fulco. Phys. Rev. Lett., 2, 365, (1959). 'Effect of a Pion-Pion Scattering Resonance on Nucleon Structure' UCRL–8880. Aug. 1959.
18. Н.А.Черников. НДВШ № 2, стр. 158 /1958/.

---

x/ Авторы благодарят Чу, Мандельстама, Тер-Мартиросяна, Чини и Фубини за присылку препринтов.