ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Д-498

Б.М. Барбашов, Г.В. Ефимов

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОЛЯ С ФИКСИРОВАННЫМ НУКЛОНОМ

ЖЭТФ, 1960, т 39, в 2, с 450-460.

Дубна 1960 год

Д - 498

Б.М. Барбашов, Г.В. Ефимов

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОЛЯ С ФИКСИРОВАННЫМ НУКЛОНОМ

Аннотация

Предлагается новый метод решения задач теории поля с фиксированным нуклоном. Формализм не связан с величиной константы связи, а основан на матричных методах решений линейных дифференциальных уравнений, развитых И.А. Лаппо-Данилевским. Решения получаются в виде рядов, для которых известен конкретный вид n-го члена. Получены S-матрицы для скалярной заряженной и симметричной теории с фиксированным источником, а также для модели, предложенной Бялыницким-Бируля. Рассмотрены константы ренормировок. Перенормированный заряд в этих моделях при переходе к точечному взаимодействию не содержит логарифмических расходимостей.

Введение

Предположение о слабой связи и применение теории возмущения к уравнениям мезодинамики приводят к результатам, противоречащим опыту. Поэтому желательно создать метод, в котором постоянная связи не использовалась бы как параметр итераций, а приближения строились по другому принципу. В этом отношении метод Тамма-Данкова оказался неудачным из-за трудностей с перенормировками. В последнее время успешно развивается метод дисперсионных соотношений; однако, основанный на самых общих принципах ковариантности, причинности, унитарности и спектральности, он заключает в себе более бедную информацию, чем конкретный гамильтониан взаимодействующих полей. Ввиду того, что при исследовании уравнений квантовой теории поля встречаются большие математические трудности, известную популярность приобрело изучение различных моделей теории.

Особое внимание привлекает класс моделей с "фиксированным источником" т.е. когда фермионное поле характеризуется лишь спиновыми и изотопическими степенями свободы. То обстоятельство, что экспериментальные факты по взаимодействию π -мезонов и нуклонов при низких энергиях были объяснены моделью Чу-Лоу /1/, относящейся к этому классу, говорит о том, что данная модель в какой-то степени описывает реальное взаимодействие. Поэтому следует ожидать, что ряд проблем точной теории поля сохраняется при этих упрощающих предположениях. В связи с этим, знание точных решений таких моделей поможет понять происхождение трудностей в теории. Однако даже для рассматриваемого класса моделей /за исключением тривиального случая взаимодействия скалярных нейтральных мезонов с покоящимся нуклоном /2// не существует методов решений, отличных от вышеперечисленных.

В настоящей работе на примере взаимодействующей системы заряженных скалярных мезонов с покоящимся источником излагается новый метод решения уравнений мезодинамики для этого класса моделей. Предлагаемый формализм не связан с величиной константы связи, а основан на матричных методах решений линейных дифференциальных уравнений, развитых И.А.Лаппо-

Данилевским [3]. Говоря общепринятым языком, новый формализм эквивалентен теории возмущения, когда в качестве невозмущенного гамильтониана выбирается гамильтониан системы нейтральных мезонов и покоящегося нуклона. Однако, преимущество заключается в том, что выписывается n-ый член приближения в замкнутой форме, в то время как в теории возмущения можно лишь найти любой конкретный член ряда, но не n-ый. Это обстоятельство позволяет, в принципе, исследовать сходимость рядов.

Метод решения уравнения для S-матрицы скалярной заряженной теории излагается в разделах 1-3. В разделе 4 обсуждаются константы перенормировок в этой модели. Раздел 5 посвящен распространению метода на скалярную симметричную теорию. В разделе 6 новый метод применяется к модели, предложенной Бялыницким-Бируля [4]. Все расчеты помещены в приложении.

1. Представление S-матрицы в виде континуального интеграла

Рассмотрим систему скалярных заряженных мезонов, взаимодействующих с фиксированным протяженным нуклоном. В этой модели нуклон имеет только две изотопические степени свободы /протон и нейтрон/. Система описывается гамильтонианом:

$$H = m_0(\psi^+\psi) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int d\bar{x} :\left[\pi_i^2(\bar{x}) + (\nabla\varphi_i(\bar{x}))^2 + \mu^2\varphi_i^2(\bar{x})\right]: + \\ + g\sum_{i=1}^{2}\int d\bar{x}\,(\psi^+\tau_i\psi)\varphi_i(\bar{x})\rho(\bar{x}), \qquad /1.1/$$

где $\psi = v_p c_p + v_n c_n$ - оператор нуклонного поля, $c_N\ (N=p,n)$ - оператор уничтожения нуклона, v_N - спинор, описывающий нуклон $\left(v_p = \binom{1}{0},\ v_n = \binom{0}{1}\right)$; $\pi_i(\bar{x})$ и $\varphi_i(\bar{x})$ - операторы мезонного поля, $\rho(x) = \sum_k v(k) e^{ik\bar{x}}$ - форм-фактор нуклона; τ_i - матрицы изотопического спина 1/2.

В представлении взаимодействия S-матрица удовлетворяет следующему уравнению:

$$i\frac{\partial}{\partial t}S(t,t_0)=H_I(t)S(t,t_0)$$
$$S(t,t_0)/_{t=t_0}=1, \qquad /1.2/$$

где
$$H_I(t)=g\sum_{i=1}^{2}(\psi^+(t)\tau_i\psi(t))\hat{\varphi}_i(t)$$
$$\hat{\varphi}_i(t)=\sum_k\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}\left[a_{i\bar{k}}e^{-i\omega_k t}+a^+_{i\bar{k}}e^{i\omega_k t}\right]=\int d\bar{x}\,\varphi_i(\bar{x})\rho(\bar{x})$$
$$\psi(t)=\psi e^{-im_0 t}.$$

В символической форме решение уравнения /1.2/ имеет вид :

$$S(t,t_0)=T_\psi T_\varphi \exp\left\{-i\int_{t_0}^{t}d\tau H_I(\tau)\right\}. \qquad /1.3/$$

Основная задача теории - представление S -матрицы в виде нормальных произведений - частично может быть выполнена в общем виде /5, 6/ Именно, можно так преобразовать выражение S матрицы, чтобы оно было упорядоченным по мезонным операторам $\hat{\varphi}$. При этом, однако, нуклонные операторы ψ и ψ^+ остаются неупорядоченными /т.е. под знаком T -произведения/. Такое частичное упорядочение достигается путем представления S -матрицы в виде континуального интеграла.

Следуя Фейнману /5/ , предположим, что любой функционал $\mathcal{F}[\Lambda]$, определенный на множестве скалярных функций $\Lambda(s)$, заданных на интервале $[t_0,t]$, может быть представлен как суперпозиция экспоненциальных функционалов /аналогично интегралу Фурье для обычных функций/:

$$\mathcal{F}[\Lambda]=\int\delta\Phi(s)\exp\left\{i\int_{t_0}^{t}ds\Lambda(s)\Phi(s)\right\}\bar{\mathcal{F}}[\Phi], \qquad /1.4/$$

где $\bar{\mathcal{F}}[\Phi]$ - новый функционал, являющийся функциональным образом $\mathcal{F}[\Lambda]$. $\int\delta\Phi G[\Phi]$ - означает функциональное интегрирование по пространству действительных скалярных функций $\Phi(s)$. Не касаясь математических трудностей при определении этой операции /например, определение меры в пространстве функций $\Phi(s)$ /, будем понимать под $\int\delta\Phi G[\Phi]$ предел

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\phi_{s_1}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} d\phi_{s_n}\, G(\phi_{s_1},\phi_{s_2},\ldots,\phi_{s_n}),$$

где n число точек разбиения отрезка $[t_0,t]$. Если $\mathcal{F}[\Lambda]$ задан, то $\bar{\mathcal{F}}[\phi]$ может быть определен из обратного преобразования:

$$\bar{\mathcal{F}}[\phi]=C\int\delta\Lambda\exp\Big\{-i\int_{t_0}^{t}ds\,\Lambda(s)\,\phi(s)\Big\}\mathcal{F}[\Lambda], \qquad /1.5/$$

где C - нормировочная постоянная.

Тогда оператор $\mathcal{F}[\hat{\varphi}]$ определяется как

$$\mathcal{F}[\hat{\varphi}]=\int\delta\phi\exp\Big\{i\int_{t_0}^{t}ds\,\phi(s)\hat{\varphi}(s)\Big\}\bar{\mathcal{F}}[\Phi], \qquad /1.6/$$

где $\bar{\mathcal{F}}[\phi]$ задан соотношениями /1.4/ и /1.5/, а под оператором $\hat{G}(t,t_0)=\exp\{i\int_{t_0}^{t}ds\,\hat{\varphi}(s)\phi(s)\}$ понимается решение операторного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{G}(t,t_0)=i\hat{\varphi}(t)\phi(t)\hat{G}(t,t_0) \qquad /1.7/$$
$$\hat{G}(t,t_0)\big|_{t=t_0}=1.$$

Основываясь на этих результатах, S -матрицу уравнения /1.2/ можно представить в виде:

$$S(t,t_0)=\iint\delta\phi_1\,\delta\phi_2\exp\Big\{i\int_{t_0}^{t}ds\,\hat{\varphi}_i(s)\phi_i(s)\Big\}\times \qquad /1.8/$$
$$\times C^2\iint\delta\Lambda_1\,\delta\Lambda_2\exp\Big\{-i\int_{t_0}^{t}ds\,\Lambda_i(s)\phi_i(s)\Big\}\tilde{S}(t,t_0|\Lambda_1\Lambda_2).$$

Здесь $\hat{S}(t,t_0|\Lambda_1\Lambda_2)$ имеет смысл S - матрицы системы классического заряженного мезонного поля $\Lambda_1(t),\Lambda_2(t)$ и квантованного нуклонного поля $\psi(t)$ и подчиняется уравнению:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{S}(t,t_0|\Lambda_1\Lambda_2)=g\sum_{i=1}^{2}(\psi^+\tau_i\psi)\,\Lambda_i(t)\,\hat{S}(t,t_0|\Lambda_1\Lambda_2) \qquad /1.9/$$
$$\tilde{S}(t,t_0|\Lambda_1\Lambda_2)\big|_{t=t_0}=1.$$

Оператор $\exp\{i\int_{t_0}^{t}ds\,\hat{\varphi}(s)\phi(s)\}$, так как он по определению удовлетворяет уравнению /1.7/, должен рассматриваться как упорядоченный по времени /обычное T - произведение/. Хронологическое произведение мезонных операторов можно выразить через нормальное произведение согласно теореме Вика /7/.

$$T_\varphi \exp\{i\int_{t_0}^{t} ds\,\hat\varphi_i(s)\} = N_{\hat\varphi}\Big[\exp\{\frac{i}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} d\xi d\eta\,\Delta(\xi-\eta)\frac{\delta^2}{\delta\hat\varphi_i(\xi)\delta\hat\varphi_i(\eta)}\}\times$$
$$\times\exp\{i\int_{t_0}^{t} ds\,\hat\varphi_i(s)\phi_i(s)\}\Big] = \exp\{-\frac{i}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} d\xi d\eta\,\Delta(\xi-\eta)\phi_i(\xi)\phi_i(\eta)\}\times \qquad /1.10/$$
$$\times :\exp\{i\int_{t_0}^{t} ds\,\hat\varphi_i(s)\phi_i(s)\}:$$

где причинная функция $\Delta(\xi-\eta)$ определяется соотношением

$$\langle 0|T\{\hat\varphi_i(\xi)\hat\varphi_j(\eta)\}|0\rangle = i\delta_{ij}\Delta(\xi-\eta) = i\delta_{ij}\sum_k \frac{v^2(k)}{2i\omega_k} e^{-i\omega_k|\xi-\eta|} \qquad /1.11/$$

Окончательно S -матрица, нормально упорядоченная по мезонным операторам $\hat\varphi$, может быть записана в виде:

$$S(t,t_0) = \iint\delta\phi_1\delta\phi_2 \exp\{-\frac{i}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} d\xi d\eta\,\Delta(\xi-\eta)\phi_i(\xi)\phi_i(\eta)\}\times$$
$$\times :\exp\{i\int_{t_0}^{t} ds\,\hat\varphi_i(s)\phi_i(s)\}: c^2\iint\delta\Lambda_1\delta\Lambda_2 \exp\{-i\int_{t_0}^{t} ds\,\Lambda_i(s)\phi_i(s)\}\,\tilde S(\Lambda_1\Lambda_2) \qquad /1.12/$$

Таким образом, задача нахождения S -матрицы гамильтониана /1.1/ разбивается на две: во-первых, нахождение классической $\tilde S$ -матрицы, как решения уравнения /1.9/ с произвольными коэффициентными функциями $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$ и, во вторых, функционального интегрирования ее по формуле /1.12/.

2. Нахождение "классической" $\tilde S$ -матрицы

Так как нуклонное поле имеет лишь две степени свободы и операторы этого поля антикоммутируют между собой, то оператор $\tilde S(t,t_0|\Lambda_1\Lambda_2)$ можно представить в виде следующего разложения по нуклонным операторам ψ и ψ^+, которое, как легко показать, является наиболее общим:

$$\tilde S(t,t_0|\Lambda_1\Lambda_2) = 1 + [2(\psi^+\psi) - (\psi^+\psi)^2]\,f(t,t_0|\Lambda_1\Lambda_2) + \qquad /2.1/$$
$$+ \sum_{j=1}^{3}(\psi^+\tau_j\psi)\,h_j(t,t_0|\Lambda_1\Lambda_2),$$

где f и h_j являются обычными скалярными функциями. Это непосредственно следует из легко проверяемых соотношений:

$$(\psi^+\tau_i\psi)(\psi^+\tau_j\psi) = i\varepsilon_{ijl}(\psi^+\tau_l\psi) + \delta_{ij}[2(\psi^+\psi) - (\psi^+\psi)^2]$$

$$(\psi^+\tau_i\psi)[2(\psi^+\psi) - (\psi^+\psi)^2] = (\psi^+\tau_i\psi).$$

Подставляя /2.1./ в уравнение /1.8/ и приравнивая коэффициенты у одинаковых структур, получим систему уравнений на f и h_j, которую можно записать в матричной форме:

$$i\frac{\partial}{\partial t}Y(t,t_0) = g[\tau_1\Lambda_1(t) + \tau_2\Lambda_2(t)]Y(t,t_0) \qquad /2.2/$$

$$Y(t,t_0)\big|_{t=t_0} = I,$$

где

$$Y(t,t_0) = \begin{pmatrix} 1+f+h_3, & h_1 - ih_2 \\ h_1 + ih_2, & 1+f-h_3 \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения /2.2/ представляет собой значнтельные трудности, поскольку оно сводится к решению линейного дифференцнального уравнения второго порядка с двумя произвольными функциями. Обычно такие уравнения решаются методом теории возмущения, т.е. разложением по параметру g, который предполагается малым. Если же параметр g велик, то уравнение /2.2/ можно приближенно решить, пользуясь "квазиклассическим" методом. Однако в последнем случае получающиеся выражения не удается функционально проинтегрировать.

Лаппо-Данилевским был развит метод решения систем дифференциальных уравнений, использующий теорию функций от матриц. Метод базируется на том, что функция от матриц может быть представлена конечной суммой основных композиций матриц с коэффициентами, которые можно разложить в ряды по некоторым характеристическим параметрам матриц. Таким образом, параметром разложения оказывается не константа g, а некоторые инварианты матриц, входящих в уравнение. Мы не будем останавливаться на процедуре получения решения, за всеми подробностями отсылаем читателя к обширной монографии И.А.Лаппо-Данилевского /3/. Опуская очень громоздкие и длинные преобразования рекурентных соотношений Лаппо-Данилевского для уравнения /2.2/, сразу приведем окончательное выражение

$$
\begin{aligned}
y(t,t_0) = \sum_{q=0}^{\infty} \Bigg\{ & \frac{(ig)^{2q}}{(2q)!} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots \int_{t_0}^{t} d\tau_{2q} \prod_{i=1}^{2q} \Lambda_1(\tau_i) \times \\
& \times \Big[\operatorname{ch}\Big(ig \int_{t_0}^{t} ds\, \Lambda_2(s) \prod_{j=1}^{2q} \varepsilon(s-\tau_j)\Big) - \tau_2 \operatorname{sh}\Big(ig \int_{t_0}^{t} ds\, \Lambda_2(s) \prod_{j=1}^{2q} \varepsilon(s-\tau_j)\Big)\Big] - \\
& - \frac{(ig)^{2q+1}}{(2q+1)!} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots \int_{t_0}^{t} d\tau_{2q+1} \prod_{i=1}^{2q+1} \Lambda_1(\tau_i) \times \\
& \times \Big[\tau_1 \operatorname{ch}\Big(ig \int_{t_0}^{t} ds\, \Lambda_2(s) \prod_{j=1}^{2q+1} \varepsilon(s-\tau_j)\Big) + i\tau_3 \operatorname{sh}\Big(ig \int_{t_0}^{t} ds\, \Lambda_2(s) \prod_{j=1}^{2q+1} \varepsilon(s-\tau_j)\Big)\Big],
\end{aligned}
\qquad /2.3/
$$

где

$$
\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x>0 \\ -1 & \text{при } x<0. \end{cases}
$$

Читатель может убедиться непосредственной подстановкой, что решение /2.3/ удовлетворяет уравнению /2.2/ с требуемым начальным условием.

Функции $\Lambda_1(s)$ и $\Lambda_2(s)$ входят в решение /2.3/ совершенно симметрично, так как, разлагая гиперболические косинус и синус в ряды и меняя последовательность суммировании, получим другое выражение для $y(t,t_0)$, где $\Lambda_1(s)$ и $\Lambda_2(s)$, τ_1 и τ_2 меняются местами:

$$
\begin{aligned}
y(t,t_0) = \sum_{q=0}^{\infty} & \frac{(ig)^{2q}}{(2q)!} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots \int_{t_0}^{t} d\tau_{2q} \prod_{i=1}^{2q} \Lambda_2(\tau_i) \times \\
& \times \Big[\operatorname{ch}\Big(ig \int_{t_0}^{t} ds\, \Lambda_1(s) \prod_{j=1}^{2q} \varepsilon(s-\tau_j)\Big) - \tau_1 \operatorname{sh}\Big(ig \int_{t_0}^{t} ds\, \Lambda_1(s) \prod_{j=1}^{2q} \varepsilon(s-\tau_j)\Big)\Big] -
\end{aligned}
$$

$$- \frac{(ig)^{2q+1}}{(2q+1)!} \int_{t_0}^{t} d\xi_1 \dots \int_{t_0}^{t} d\xi_{2q+1} \prod_{i=1}^{2q+1} \Lambda_2(\xi_i) \times$$

/2.4/

$$\times \left[\tau_2 \, Ch\left(ig \int_{t_0}^{t} ds\, \Lambda_1(s) \prod_{j=1}^{2q+1} \varepsilon(s-\xi_j)\right) - i\tau_3 \, Sh\left(ig \int_{t_0}^{t} ds\, \Lambda_1(s) \prod_{j=1}^{2q+1} \varepsilon(s-\xi_j)\right) \right].$$

Для рядов /2.3/ и /2.4/ легко может быть выписан мажорирующий функционал, так как ввиду действительности Λ_1 и Λ_2 косинус и синус не превышают единицы, а остающиеся ряды легко суммируются.

$$Y(t,t_0) \leq (1+\tau_1) \min \left\{ exp\left[g \int_{t_0}^{t} ds |\Lambda_1(s)| \right], exp\left[g \int_{t_0}^{t} ds |\Lambda_2(s)| \right] \right\}. \quad /2.5/$$

Таким образом, решение уравнения /2.2/ представляется рядами /2.3/ и /2.4/, которые сходятся равномерно и абсолютно на отрезке $[t,t_0]$, если, по крайней мере, один из интегралов $g\int_{t_0}^{t} ds|\Lambda_1(s)|$ и $g\int_{t_0}^{t} ds|\Lambda_2(s)|$ ограничен на $[t,t_0]$.

О связи между методом Лаппо-Данилевского и теорией возмущения для уравнений типа /2.2/ смотри приложение А.

Зная $Y(t,t_0)$, легко написать выражение для "классической" $\tilde{S}$ - матрицы, даваемой равенством /2.1/:

$$\tilde{S}(t,t_0|\Lambda_1\Lambda_2) = 1 - \left[2(\psi^+\psi) - (\psi^+\psi)^2 \right] +$$

$$+ \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \frac{(ig)^{2q}}{(2q)!} \int_{t_0}^{t} d\xi_1 \dots \int_{t_0}^{t} d\xi_{2q} \prod_{i=1}^{2q} \Lambda_2(\xi_i) \times \right.$$

/2.6/

$$\times \left[Ch\left(ig \int_{t_0}^{t} ds\, \Lambda_2(s) \prod_{j=1}^{2q} \varepsilon(s-\xi_j)\right) \times \left[2(\psi^+\psi) - (\psi^+\psi)^2\right] - (\psi^+\tau_2\psi) \, Sh\left(ig \int_{t_0}^{t} ds \Lambda_2(s) \prod_{j=1}^{2q} \varepsilon(s-\xi_j)\right) \right]$$

$$- \frac{(ig)^{2q+1}}{(2q+1)!} \int_{t_0}^{t} d\xi_1 \dots \int_{t_0}^{t} d\xi_{2q+1} \prod_{i=1}^{2q+1} \Lambda_1(\xi_i) \times$$

$$\times \left[(\psi^+\tau_1\psi) \, Ch\left(ig \int_{t_0}^{t} ds\, \Lambda_2(s) \prod_{j=1}^{2q+1} \varepsilon(s-\xi_j)\right) + i(\psi^+\tau_3\psi) \, Sh\left(ig \int_{t_0}^{t} ds\, \Lambda_2(s) \prod_{j=1}^{2q+1} \varepsilon(s-\xi_j)\right) \right]$$

Формула симметрична относительно перестановки индексов 1 и 2.

Заметим, что полученный таким способом критерий равномерной и абсолютной сходимости не является достаточным для проведения функционального интегрирования, так как при интегрировании всегда найдутся такие функции $\Lambda_1(s)$ и $\Lambda_2(s)$, которые не удовлетворяют полученному критерию. Тем не менее мы оставим в стороне вопрос о корректности процедуры функционального интегрирования, тем более, что пока доказано существование функциональных интегралов только для очень узкого класса функционалов. Мы предположим, что ряд можно интегрировать почленно. Эта недоказанная операция может быть оправдана тем обстоятельством, что S -матрица, полученная в результате интегрирования, удовлетворяет исходному уравнению /1.2/, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой.

3. Нахождение квантовой S -матрицы

Функциональное интегрирование "классической" $\tilde{S}$ -матрицы может быть проведено без труда, так как решение классического уравнения имеет "гауссовский" вид. Способ вычисления подобных функциональных интегралов известен еще из работ Винера /8/, а в применении к квантовым задачам развит Фейнманом /5/. Приведем окончательный вид S -матрицы /см. приложение Б /.

$$S(t,t_0) = 1 - \left[2(\psi^+\psi) - (\psi^+\psi)^2\right] +$$

$$+ \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{q} \left\{ \frac{(ig)^{2q} i^m}{(2q-2m)!\,2^m\,m!} \int_{t_0}^{t} d\zeta_1 \ldots \int_{t_0}^{t} d\zeta_{2q} \prod_{i=1}^{2m-1} \Delta(\zeta_i - \zeta_{i+1}) : \prod_{j=2m+1}^{2q} \hat{\varphi}_1(\zeta_j) : \times \right.$$

$$\times \left[\left(2(\psi^+\psi) - (\psi^+\psi)\right) : Ch\left(ig \int_{t_0}^{t} ds\, \hat{\varphi}_2(s) \prod_{k=1}^{2q} \varepsilon(s-\zeta_k)\right) : - \right.$$

$$\left. - (\psi^+\tau_2\psi) : Sh\left(ig \int_{t_0}^{t} ds\, \hat{\varphi}_2(s) \prod_{k=1}^{2q} \varepsilon(s-\zeta_k)\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{i}{2} g^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} ds_1\, ds_2 \prod_{e=1}^{2q} \varepsilon(s_1-\zeta_e)\, \Delta(s_1-s_2)\, \varepsilon(s_2-\zeta_e)\right\} - \qquad /3.1/$$

$$- \frac{(ig)^{2q+1} i^m}{(2q+1-2m)!\,2^m\,m!} \int_{t_0}^{t} d\zeta_1 \ldots \int_{t_0}^{t} d\zeta_{2q+1} \prod_{i=1}^{2m-1} \Delta(\zeta_i - \zeta_{i+1}) : \prod_{j=2m+1}^{2q+1} \hat{\varphi}_1(\zeta_j) : \times$$

$$\times \left[(\psi^+\tau_1\psi) : Ch\left(ig \int_{t_0}^{t} ds\, \hat{\varphi}_2(s) \prod_{k=1}^{2q+1} \varepsilon(s-\zeta_k)\right) : + \right.$$

$$\left. + i(\psi^+\tau_3\psi) : Sh\left(ig \int_{t_0}^{t} ds\, \hat{\varphi}_2(s) \prod_{k=1}^{2q+1} \varepsilon(s-\zeta_k)\right)\right] \times$$

$$\left. \times \exp\left\{-\frac{i}{2} g^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} ds_1\, ds_2 \prod_{e=1}^{2q+1} \varepsilon(s_1-\zeta_e)\, \Delta(s_1-s_2)\, \varepsilon(s_2-\zeta_e)\right\} \right\}$$

Выражение /3.1/ симметрично относительно перестановки индексов один и два, что соответствует симметрии в классической функции $y(t,t_0)$, отраженной в записи /2.3/ и /2.4/.

Полученное выражение для S -матрицы гамильтониана /1.1/ записано в нормальной форме как по нуклонным, так и по мезонным операторам. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что S -матрица удовлетворяет уравнению /1.2/ с требуемым начальным условием.

Таким образом, операция функционального интегрирования, не являясь обоснованной с математической стороны, приводит в данном случае к правильному результату, что подтверждается непосредственной подстановкой. Это обстоятельство может служить одним из подтверждений справедливости предложенного Фейнманом метода.

При разложении по константе связи g получаются ряды обычной теории возмущения с тем, однако, преимуществом, что здесь мы имеем явный вид n -го члена этого ряда, в то время как существующий аппарат теории возмущений позволяет получить любой конкретный член ряда, но не n -ый. Этот недостаток теории возмущения, по нашему мнению, является основной трудностью при изучении вопроса о сходимости рядов теории возмущения.

Для выяснения физического смысла итераций в S - матрице /3.1/ вернемся снова к уравнению /1.2/:

$$i\frac{\partial}{\partial t}S = g\left[(\psi^+\tau_1\psi)\hat{\varphi}_1(t) + (\psi^+\tau_2\psi)\hat{\varphi}_2(t)\right]S. \qquad /3.2/$$

Операторами заряженных мезонов являются выражения $\hat{\varphi}_1 \pm i\hat{\varphi}_2$, в то время как операторы $\hat{\varphi}_1$ и $\hat{\varphi}_2$ приводят к рождению или уничтожению определенной комбинации положительных и отрицательных мезонов, например, оператор $\hat{\varphi}_1$ соответствует комбинации $\frac{1}{2}(\pi^- + \pi^+)$. Теперь вместо основных нуклонных состояний v_p и v_n, введем $v_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_p + v_n)$ и $v_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_p - v_n)$. Это преобразование означает переход к новым ортам в изотопическом пространстве. В новых ортах уравнение /3.2/ запишется так:

$$i\frac{\partial}{\partial t}S = g\left[(\psi'^{+}\tau_3\psi')\hat{\varphi}_1(t) + (\psi'^{+}\tau_2\psi)\hat{\varphi}_2(t)\right]S. \qquad /3.3/$$

Здесь $\psi' = v_+ C_+ + v_- C_-$, $C_\pm$ - оператор уничтожения частиц $\frac{(v_+ \pm v_-)}{\sqrt{2}}$

В уравнение /3.3/ оператор $\hat{\varphi}_1$ входит вместе с диагональной матрицей τ_3 и, следовательно, он ответственен за испускание и поглощение такой комбинации отрицательных и положительных мезонов, которая не вызывает переходов нуклона из состояния v_+ в v_- и обратно. Если бы не было в правой части /3.3/ второго члена, мы имели бы нейтральную теорию, когда испускание и поглощение мезона не вызывает изменения изотопических координат нуклона. Решение /3.1/ эквивалентно решению методом теории возмущения, когда за возмущение принято выражение $(\psi'^{+}\tau_2\psi')\hat{\varphi}_2(t)$, вызывающее переходы между состояниями v_+ и v_- . Отметим, что другим поворотом в изотопическом пространстве $v_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_p + i v_n)$; $v_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_p - i v_n)$ можно диагонализировать матрицу τ_2, стоящую при операторе $\hat{\varphi}_2$, тогда "возмущающим" членом будет $(\psi'^{+}\tau_2\psi')\hat{\varphi}_1(t)$. Эта ситуация соответствует уже отмечавшейся ранее симметрии S -матрицы относительно операторов $\hat{\varphi}_1$ и $\hat{\varphi}_2$. Однако, если ограничиться конечным числом членов в ряду /3.1/, то симметрия будет нарушена /один оператор стоит в показателе экспоненты, при разложении которой появляется любая степень этого оператора, а другой будет входить в конечной степени/. При работе с оборванным рядом для S - матрицы могут возникнуть процессы, нарушающие закон сохранения заряда. Это произойдет , если для процессов, включающих больше $2n$ мезонов, ограничиться n членами ряда. Поэтому необходимо вычислять матричный элемент от полного ряда S -матрицы и только в ряду матричного элемента можно ограничиться тем или иным числом членов. Говоря языком теории возмущения, отдельный член ряда /3.1/ включает в себя такие графы, для которых не выполняется закон сохранения заряда, например, $n \to p + \pi^{+}$. Для полной S -матрицы закон сохранения заряда выполнен точно и при правильном вычислении матричных элементов, как указывалось выше, нарушение этого закона не возникает. Поэтому в развитом формализме можно говорить о невыполнении закона сохранения заряда в виртуальных процессах, аналогично тому, как в нековариантной формулировке теории возмущения для виртуальных процессов не выполняется закон сохранения энергии.

4. Константы перенормировок

Для получения собственных функций и собственных значений гамильтониана[x/] /1.1/ воспользуемся гипотезой адиабатического включения взаимодействия /10/, которую можно сформулировать следующим образом:

Пусть Φ_n есть собственная функция свободного гамильтониана H_0. Если далее известно решение уравнения для S -матрицы с адиабатически нарастающим взаимодействием:

$$i\frac{\partial}{\partial t} S^{\alpha}(t,t_0) = H_I(t)\, e^{-\alpha|t|} S^{\alpha}(t,t_0) \qquad /4.1/$$

$$S^{\alpha}(t,t_0)\Big|_{t=t_0} = 1,$$

то тогда собственными функциями оператора $H = H_0 + H_I$ будут:

$$C_n \Psi_n^{(\pm)} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{S^{\alpha}(0,\pm\infty)\varphi_n}{(\varphi_n,\, S^{\alpha}(0,\pm\infty)\varphi_n)}, \qquad /4.2/$$

где C_n - нормировочная постоянная, а знаки - /$\pm$/ соответствуют "расходящейся" и "сходящейся" волнам. Собственное значение энергии в состоянии $\psi_n^{(\pm)}$ определяется равенством:

$$E_n = \lim_{\alpha\to 0} \frac{(\varphi_n,\, H S^{\alpha}(0,\pm\infty)\,\phi_n)}{(\varphi_n,\, S^{\alpha}(0,\pm\infty)\,\phi_n)}. \qquad /4.3/$$

Предельный переход позволяет корректно определить частное, так как числитель и знаменатель не определены из-за наличия фазового множителя $e^{i A/\alpha}$.

---

x/ Функция Грина гамильтониана /1.1/ была получена в работе 9 .

"Адиабатическую" S^{α} - матрицу, являющуюся решением уравнения /4.1/, легко получить из /3.1/ путем замены там всех дифференциалов $d\xi_i$, ds_i на выражения $d\xi_i e^{-\alpha|\xi_i|}$ и $ds_i e^{-\alpha|s_i|}$.

Заметим, что введение контрчленов в исходный гамильтониан приводит к автоматическому исключению бесконечных фаз. Хотя такое введение контрчленов считается более корректной процедурой, нам удобнее пользоваться при вычислении матричных элементов теоремами /4.2/-/4.3/ адиабатической гипотезы.

Так как S^{α} -матрица задана в виде ряда, то матричные элементы будут представлены в виде предела при $\alpha \to 0$ от отношения двух рядов. Оказывается, что если разделить один ряд на другой и собрать члены при одинаковых степенях константы связи, стоящей перед подинтегральной экспонентой, то в полученных таким способом членах фаза сокращается и, следовательно, можно переходить к пределу при $\alpha \to 0$ в каждом члене отдельно. В приложении B эта процедура иллюстрируется на примере вычисления перенормированной константы связи. Для других матричных элементов вычисления проводятся аналогично.

Получающиеся выражения оказываются довольно громоздкими. n -ый член, хотя и можно выписать, но исследовать до конца пока не удалось. Поэтому мы выпишим только второе и третье приближение. Вычисление интегралов значительно упрощается в предельном случае точечного взаимодействия, когда форм-фактор $v(k)$ стремится к единице. Мы выберем форм-фактор в следующем виде:

$$v(k) = exp\left\{-\frac{\omega_k - \mu}{L}\right\},$$

где L - имеет смысл максимального импульса обрезания. Переход к точечному взаимодействию будет осуществляться при стремлении L к бесконечности.

Рассмотрим прежде всего собственную энергию однонуклонного состояния. По теореме /4.3/ получим:

$$E_N = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\langle 0|C_N H S^{\alpha}(0,-\infty) C_N^{+}|0\rangle}{\langle 0|C_N S^{\alpha}(0,-\infty) C_N^{+}|0\rangle} = m_0 + \delta m, \tag{4.4}$$

где
$$\delta m = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\langle 0|C_N H_I S^{\alpha}(0,-\infty) C_N^{+}|0\rangle}{\langle 0|C_N S^{\alpha}(0,-\infty) C_N^{+}|0\rangle} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \int_{-\infty}^{0} d\sigma\, e^{\alpha\sigma}\, 2g^2 \Delta(\sigma) \frac{\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!}\left(-\frac{i}{2}g^2\right)^q A_q^{\alpha}}{\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!}\left(-\frac{i}{2}g^2\right)^q a_q^{\alpha}} = \tag{4.5}$$

$$= -g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{v^2(k)}{\omega_k^2} + 2g^2 \int_{-\infty}^{0} d\sigma\, \Delta(\sigma) \exp\left\{-g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{v^2(k)}{\omega_k^3}\left[1 - e^{i\omega_k\sigma}\right]\right\} + \ldots$$

где
$$A_q^{\alpha} = \int_{-\infty}^{0} d\zeta_1 \ldots \int_{-\infty}^{0} d\zeta_{2q}\, e^{\alpha\sum_{i=1}^{2q}\zeta_i}\, \Delta(\zeta_1 - \zeta_2)\ldots\Delta(\zeta_{2q-1} - \zeta_{2q}) \cdot \mathcal{E}(\sigma - \zeta_1)\ldots\mathcal{E}(\sigma - \zeta_{2q}) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{i}{2}g^2 \iint_{-\infty}^{0} ds_1 ds_2\, e^{\alpha(s_1+s_2)} \prod_{j=1}^{2q} \mathcal{E}(s_1 - \zeta_j)\Delta(s_1 - s_2)\mathcal{E}(s_2 - \zeta_j)\right\}$$

$$a_q^{\alpha} = \int_{-\infty}^{0} d\zeta_1 \ldots \int_{-\infty}^{0} d\zeta_{2q}\, e^{\alpha\sum_{i=1}^{2q}\zeta_i} \prod_{i=1}^{2q-1} \Delta(\zeta_i - \zeta_{i+1}) \exp\left\{-\frac{ig^2}{2} \iint_{-\infty}^{0} ds_1 ds_2\, e^{\alpha(s_1+s_2)} \prod_{j=1}^{2q} \mathcal{E}(s_1 - \zeta_j)\Delta(s_1 - s_2) \times \mathcal{E}(s_2 - \zeta_j)\right\}$$

В пределе точечного взаимодействия перенормировка массы записывается в виде:

$$\delta m \underset{L\to\infty}{\to} -g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega_k^2}\left[1 + \frac{1}{2\left(1 + \frac{g^2}{\pi^2}\right)} + \ldots\right]. \tag{4.6}$$

Константа перенормировки фермионного поля Z_2 определяется, согласно ее вероятностному смыслу, выражением:

$$Z_2 = |\langle 0|C_N S^{\alpha}(0,-\infty)C_N^{+}|0\rangle|^2 = \left|\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!}\left(-\frac{ig^2}{2}\right)^q a_q^{\alpha}\right|^2 =$$

$$= \exp\left\{-g^2\sum_{k}\frac{v^2}{2\omega^3}\right\}\cdot\left[1 - g^2 \operatorname{Re}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} d\eta\, dv\, \Delta(\eta)\, \times\right. \qquad /4.7/$$

$$\left.\times \exp\left\{g^2\sum\frac{v^2}{\omega^3}\left[-1+e^{-i\omega\eta}+e^{-i\omega v}-e^{-i\omega(\eta+v)}\right]\right\}+\ldots\right].$$

Ряд, стоящий внутри прямых скобок, содержит неопределенный фазовый множитель $e^{i\frac{M}{\alpha}}$, который исчезает при возведении этого ряда по модулю в квадрат. Ограничиваясь первыми двумя членами, в пределе, когда $L\to\infty$, имеем:

$$Z_2 = \left(\frac{1}{L}\right)^{g^2/4\pi^2}\left[1 + \frac{g^2/2\pi^2}{1+g^2/\pi^2}\ln L + \ldots\right]. \qquad /4.8/$$

Наиболее интересной с точки зрения физических следствий является связь перенормированной /наблюдаемой/ константы связи g_r с затравочной константой g. Эта связь определяется соотношением:

$$\frac{g_r}{g} = \left(\Psi_p^{(+)}, (\psi^+\tau_+\psi)\Psi_n\right) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\langle 0|C_p S^{\alpha}(\infty,0)(\psi^+\tau_+\psi)S^{\alpha}(0,-\infty)C^+|0\rangle}{\langle 0|C_p S^{\alpha}(\infty,-\infty)C_p^+|0\rangle} \qquad /4.8/$$

Для удобства дальнейшего анализа будем считать, что поле $\hat\varphi_1$ входит в гамильтониан взаимодействия с константой связи g_1, а поле $\hat\varphi_2$ с константой g_2.

После некоторых вычислений /см. приложение B /, ограничиваясь несколькими членами ряда, имеем:

$$\frac{g_r}{\sqrt{g_1 g_2}} = 1 + g_1^2 \int_0^\infty dx \cdot x \left(\sum_k \frac{v^2(k)}{\omega_k} e^{-i\omega_k x} \right) \exp\left\{ -2g_2^2 \sum_k \frac{v^2(k)}{\omega_k^3} \left[1 - e^{-i\omega x} \right] \right\} -$$

$$- g_1^4 \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \int_0^\infty dx_3 \, (x_1 + x_2) \left(\sum_{k_1} \frac{v^2(k_1)}{\omega_1} e^{-i\omega_1 x_1} \right) \left(\sum_{k_2} \frac{v^2(k_2)}{\omega_2} e^{-i\omega_2 x_2} \right) \times$$

$$\times \exp\left\{ -2g_2^2 \sum_k \frac{v^2(k)}{\omega_k^3} \left[2 - e^{-i\omega x_1} - e^{-i\omega x_2} \right] \right\} \times$$

$$\times \left[\exp\left\{ -2g_2^2 \sum_k \frac{v^2(k)}{\omega^3} \left[e^{-i\omega(x_1+x_3)} + e^{-i\omega(x_2+x_3)} - e^{-i\omega(x_1+x_2+x_3)} - e^{-i\omega x_3} \right] \right\} - 1 \right] \qquad /4.10/$$

$$- g_1^4 \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \int_0^\infty dx_3 \, (x_1 + x_2) \left[\left(\sum_{k_1} \frac{v^2(k_1)}{\omega_1} e^{-i\omega_1 (x_1+x_3)} \right) \left(\sum_{k_2} \frac{v^2(k_2)}{\omega_2} e^{-i\omega_2 (x_2+x_3)} \right) + \left(\sum_{k_1} \frac{v^2(k_1)}{\omega_1} e^{-i\omega_1 (x_1+x_2+x_3)} \right) \left(\sum \frac{v^2(k_2)}{\omega_2} e^{-i\omega_2 x_2} \right) \right] \times$$

$$\times \exp\left\{ -2g_2^2 \sum_k \frac{v^2(k)}{\omega^3} \left[2 - e^{-i\omega x_1} - e^{-i\omega x_2} + e^{-i\omega(x_1+x_3)} + e^{-i\omega(x_2+x_3)} - e^{-i\omega(x_1+x_2+x_3)} - e^{-i\omega x_3} \right] \right\} + \ldots$$

Заметим, что константы g_1 и g_2 можно поменять местами – это есть следствие симметрии S -матрицы по операторам $\hat{\varphi}_1$ и $\hat{\varphi}_2$, как это уже неоднократно подчеркивалось.

Формула /4.10/ замечательна тем, что существует конечный предел при снятии обрезания, т.е. при $L \to \infty$ /см.приложение B /.

$$\frac{g_r}{g}=1-\frac{1}{g^2/\pi^2+1}-\frac{g^4}{2\pi^4}\int_0^\infty dx_1\int_0^\infty dx_2\int_0^\infty dx_3\,\frac{x_1+x_2}{(1+x_1)^{g^2/\pi^2}(1+x_2)^{g^2/\pi^2}}\times$$

$$\times\left(1+\frac{x_1x_2}{(1+x_1+x_2+x_3)(1+x_3)}\right)^{g^2/\pi^2}\left[\frac{1}{(1+x_1+x_2)^2(1+x_2+x_3)^2}+\frac{1}{(1+x_1+x_2+x_3)^2(1+x_3)^2}\right] \qquad /4.11/$$

$$-\frac{g^4}{2\pi^4}\int_0^\infty dx_1\int_0^\infty dx_2\int_0^\infty dx_3\,\frac{x_1+x_2}{(1+x_1)^{2+g^2/\pi^2}(1+x_2)^{2+g^2/\pi^2}}\left[\left(1+\frac{x_1 x_2}{(1+x_3)(1+x_1+x_2+x_3)}\right)^{g^2/\pi^2}-1\right]$$

здесь $g_1=g_2=g$.

Рассмотрим подробнее первый член выражения /4.10/

$$g_1^2\int_0^\infty dx\cdot x\sum_K\frac{v^2(K)}{\omega}e^{-i\omega x}\exp\left\{-2g_2^2\sum_K\frac{v^2(K)}{\omega^3}\left[1-e^{-i\omega_K x}\right]\right\}. \qquad /4.12/$$

Легко заметить, что при разложении подинтегральной функции по g_2^2 получается ряд, содержащей члены, логарифмически расходящиеся по L. Главная расходящаяся часть этого ряда имеет вид:

$$g_1^2\ln L\sum_{n=0}^\infty\frac{(-g_2^2\ln L)^n}{(n+1)!} \qquad /4.13/$$

в полном соответствии с результатом теории возмущения. В то же время выражение /4.12/ имеет предел при $L\to\infty$, равный

$$-\frac{g_1^2}{\pi^2}\,\frac{1}{g_2^2/\pi^2\,(1+g_2^2/\pi^2)}.$$

Таким образом интеграл /4.12/ как функция g_2^2, имеет полюс в точке $g_2^2=0$ и, следовательно, не может быть разложен в ряд Тейлора в окрестности $g_2=0$. Такая ситуация имеет место и в следующих членах ряда, но ограничения на g_2^2/π^2, при котором интегралы оказываются сходящимися, меняются при переходе от одного порядка к другому. Именно, третий интеграл в /4.10/ сходится уже при $g_2^2/\pi^2>1$, а в n-ом порядке интегралы сходятся для $g_2^2/\pi^2>(n-1)$. Следовательно, для того, чтобы все члены ряда /4.9/ при снятии обрезания $L \to \infty$ были конечны, необходимо предположить g_2^2/π^2 бесконечно большой величиной. Эти ограничения на константу g_2, разные в каждом члене ряда, кажутся довольно бессмысленными. Для того, чтобы найти объяснение этому факту, вспомним, что выражение для перенормированной константы /4.9/ симметрично относительно замены $g_1 \rightleftarrows g_2$. Следовательно, все выводы, относящиеся к g_2 верны и для g_1 /так как можно представить /4.9/ в виде ряда по g_2, а g_1 будет входить только в показатель экспоненты/, т.е. верно утверждение, что и по g_1 имеется особенность в нуле. Таким образом, $g_r = f(g_1, g_2)$ не может быть представлена разложением в окрестности $g_1 = 0$ или $g_1 = 0$. Но ряд /4.11/ представляет разложение именно около $g_1 = 0$. Этим, по-видимому, объясняется тот бессмысленный результат, о котором говорилось выше.

Таким образом, напрашиваются следующие выводы, которые еще нельзя считать доказанными: во-первых, точное решение, по всей видимости, имеет особенность как в точке $g_1 = 0$, так и в точке $g_2 = 0$, так что искать решение в виде разложения около точки $g = g_1 = g_2 = 0$ нельзя; во-вторых, ряд Лаппо-Данилевского все же плох, хотя и лучше ряда теории возмущения, потому что представляет решение частично разложенным по константе связи; в-третьих, логарифмических расходимостей, связанных с точечностью взаимодействия в выражении для перенормированной константы связи, по-видимому, не существует.

Для окончательного выяснения этих вопросов необходимо более детальное изучение интегралов в ряде Лаппо-Данилевского.

5. Скалярная симметричная теория

Метод, изложенный в предыдущих разделах, может быть непосредственно применен к скалярной симметричной теории, описываемой гамильтонианом:

$$H = m_0(\psi^+\psi) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \int dx : \left[\pi_i^2(x) + (\nabla\varphi_i(x))^2 + \mu^2\varphi_i^2(x)\right] : + \qquad /5.1/$$

$$+ g\sum_{i=1}^{3} \int d\bar{x}\, (\psi^+\tau_i\psi)\varphi_i(x)\rho(x),$$

где $\varphi_i(x)$ - три действительных скалярных мезонных поля.

В представлении взаимодействия уравнение для S -матрицы имеет вид

$$i\frac{\partial}{\partial t} S(t,t_0) = H_I(t)\, S(t,t_0) \qquad /5.2/$$

$$S(t,t_0)/_{t=t_0} = 1,$$

где

$$H_I(t) = g\sum_{i=1}^{3} (\psi^+\tau_i\psi)\hat{\varphi}_i(t)$$

$$\hat{\varphi}_i(t) = \sum_k \frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}\left[a_{i\bar{k}}e^{-i\omega_k t} + a^+_{i\bar{k}}e^{i\omega_k t}\right].$$

Представив S -матрицу в виде континуального интеграла

$$S(t,t_0) = \iiint \delta\varphi_1\delta\varphi_2\delta\varphi_3 \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} d\zeta\, d\eta\, \Delta(\zeta-\eta)\varphi_i(\zeta)\varphi_i(\eta)\right\} \times \qquad /5.3/$$

$$\times :\exp\left\{i\int_{t_0}^{t} ds\, \hat{\varphi}_i(s)\varphi_i(s)\right\} c^3 \iiint \delta\Lambda_1\delta\Lambda_2\delta\Lambda_3 \exp\left\{-i\int_{t_0}^{t} ds\, \Lambda_i(s)\varphi_i(s)\right\}\tilde{S}(t,t_0/\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3)$$

получим следующее уравнение для "классической" $\tilde{S}$ -матрицы

$$i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{S}(t,t_0/\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3) = g\sum_{i=1}^{3}(\psi^+\tau_i\psi)\Lambda_j(t)\,\tilde{S}(t,t_0/\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3) \qquad /5.4/$$

$$\tilde{S}(t,t_0/\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3)/_{t=t_0} = 1.$$

Применение к этому уравнению метода Лаппо-Данилевского дает следующий результат

$$\widetilde{S}(t,t_0|\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3) = 1 - [2(\psi^+\psi) - (\psi^+\psi)^2] +$$

$$+\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\Big\{\frac{(ig)^{2q}}{(2q)!}\frac{(ig)^{2p}}{(2p)!}\int_{t_0}^{t}d\xi_1\cdots\int_{t_0}^{t}d\xi_{2q}\int_{t_0}^{t}d\gamma_1\cdots\int_{t_0}^{t}d\gamma_{2p}\prod_{i=1}^{2p}\prod_{j=1}^{2q}\Lambda_1(\xi_i)\times$$

$$\times\Lambda_2(\gamma_j)\,\varepsilon(\xi_i-\gamma_j)\big(2(\psi^+\psi)-(\psi^+\psi)^2\big)\exp\Big\{-ig(\psi^+\tau_3\psi)\int_{t_0}^{t}ds\prod_{i=1}^{2q}\prod_{j=1}^{2p}\Lambda_3(s)\times$$

$$\times\varepsilon(s-\xi_i)\,\varepsilon(s-\gamma_j)\Big\} - \frac{(ig)^{2q+2p+1}}{(2q)!(2p+1)!}\int_{t_0}^{t}d\xi_1\cdots\int_{t_0}^{t}d\xi_{2q}\int_{t_0}^{t}d\gamma_1\cdots\int_{t_0}^{t}d\gamma_{2p+1}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{2q}\prod_{j=1}^{2p+1}\Lambda_1(\xi_i)\,\varepsilon(\xi_i-\gamma_j)\,\Lambda_2(\gamma_j)\times(\psi^+\tau_2\psi)\exp\Big\{ig(\psi^+\tau_3\psi)\times \qquad /5.5/$$

$$\times\int_{t_0}^{t}ds\prod_{i=1}^{2q}\prod_{j=1}^{2p+1}\varepsilon(s-\xi_i)\,\varepsilon(s-\gamma_j)\Lambda_3(s)\Big\} - \frac{(ig)^{2q+1+2p}}{(2q+1)!(2p)!}\int_{t_0}^{t}d\xi_1\cdots\int_{t_0}^{t}d\xi_{2q+1}\times$$

$$\times\int_{t_0}^{t}d\gamma_1\cdots\int_{t_0}^{t}d\gamma_{2p}\prod_{i=1}^{2q+1}\prod_{j=1}^{2p}\Lambda_1(\xi_i)\,\varepsilon(\xi_i-\gamma_j)\,\Lambda(\gamma_j)\,(\psi^+\tau_1\psi)\times$$

$$\times\exp\Big\{ig(\psi^+\tau_3\psi)\int_{t_0}^{t}ds\prod_{i=1}^{2q+1}\prod_{j=1}^{2p}\varepsilon(s-\xi_i)\,\varepsilon(s-\gamma_j)\Lambda_3(s)\Big\} +$$

$$+\frac{(ig)^{2q+1+2q+1}}{(2q+1)!(2p+1)!}\int_{t_0}^{t}d\xi_1\cdots\int_{t_0}^{t}d\xi_{2q+1}\int_{t_0}^{t}d\gamma_1\cdots\int_{t_0}^{t}d\gamma_{2p+1}\prod_{i=1}^{2q+1}\prod_{j=1}^{2p+1}\Lambda_1(\xi_i)\,\varepsilon(\xi_i-\gamma_j)\Lambda_2(\gamma_j)$$

$$\times i(\psi^+\tau_3\psi)\exp\Big\{-ig(\psi^+\tau_3\psi)\int_{t_0}^{t}ds\prod_{i=1}^{2q+1}\prod_{j=1}^{2p+1}\varepsilon(s-\xi_i)\,\varepsilon(s-\gamma_j)\,\Lambda_3(s)\Big\}\Big\}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что полученная $\tilde{S}$ - матрица удовлетворяет уравнению /5.4/. Формула /5.5/ симметрична относительно циклических перестановок индексов 1,2,3.

Функциональное интегрирование "классической" $\tilde{S}$ -матрицы не представляет трудностей, так как получающиеся интегралы имеют гауссовский вид. Результат интегрирования есть:

$$S(t,t_0) = 1 - [2(\psi^+\psi) - (\psi^+\psi)^2] +$$

$$+ \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{q}\sum_{n=0}^{p}\left\{\frac{(ig)^{2q} i^m}{(2q-2m)!\,2^m m!}\cdot\frac{(ig)^{2p} i^n}{(2p-2n)!\,2^n n!}\right. \times$$

$$\times \int_{t_0}^{t} d\xi_1 \ldots \int_{t_0}^{t} d\xi_{2q} \int_{t_0}^{t} d\gamma_1 \ldots \int_{t_0}^{t} d\gamma_{2p} \prod_{i=1}^{2q}\prod_{j=1}^{2p} \varepsilon(\xi_i - \gamma_j) \prod_{k=1}^{2m-1} \Delta(\xi_k - \xi_{k+1}) \prod_{e=1}^{2n-1} \Delta(\gamma_e - \gamma_{e+1}) \times$$

$$\times :\prod_{\tau=2m+1}^{2q} \hat{\varphi}_2(\xi_\tau) \prod_{f=2n+1}^{2p} \hat{\varphi}_3(\gamma_f):\times:[2(\psi^+\psi) - (\psi^+\psi)^2] \exp\left\{-ig(\psi^+\tau_1\psi)\int_{t_0}^{t} ds \prod_{i=1}^{2q}\prod_{j=1}^{2p} \varepsilon(s-\xi_i) \times\right.$$

$$\left.\varepsilon(s-\xi_j)\hat{\varphi}_1(s)\right\}: \exp\left\{-\frac{ig^2}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} ds_1 ds_2 \prod_{i=1}^{2q}\prod_{j=1}^{2p} \varepsilon(s_1-\xi_i)\varepsilon(s_2-\gamma_j)\Delta(s_1-s_2)\varepsilon(s_2-\xi_i)\varepsilon(s_2-\gamma_j)\right\} -$$

$$- \frac{(ig)^{2q} i^m}{(2q-2m)!\,2^m m!}\;\frac{(ig)^{2p+1} i^n}{(2p+1-2n)!\,2^n n!} \int_{t_0}^{t} d\xi_1 \ldots \int_{t_0}^{t} d\xi_{2q} \int_{t_0}^{t} d\gamma_1 \ldots \int d\gamma_{2p+1} \prod_{i=1}^{2q}\prod_{j=1}^{2p+1} \varepsilon(\xi_i - \gamma_j) \cdot \quad /5.6/$$

$$\times \prod_{k=1}^{2m-1} \Delta(\xi_k - \xi_{k+1}) \prod_{e=1}^{2n-1} \Delta(\gamma_e - \gamma_{e+1}) :\prod_{\tau=2m+1}^{2q} \hat{\varphi}_2(\xi_\tau) \prod_{f=2n+1}^{2p+1} \hat{\varphi}_3(\gamma_f): \times$$

$$\times (\psi^+\tau_3\psi) : \exp\left\{ig(\psi^+\tau_1\psi)\int_{t_0}^{t} ds \prod_{i=1}^{2q}\prod_{j=1}^{2p+1} \varepsilon(s-\xi_i)\varepsilon(s-\gamma_j)\hat{\varphi}_1(s)\right\}: \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{ig^2}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} ds_1 ds_2 \prod_{i=1}^{2q}\prod_{j=1}^{2p+1} \varepsilon(s_1-\xi_i)\varepsilon(s_1-\gamma_j)\Delta(s_1-s_2)\varepsilon(s_2-\xi_i)\varepsilon(s_2-\gamma_j)\right\} -$$

$$-\frac{(ig)^{2q+1}i^m}{(2q+1-2m)!\,2^m m!}\cdot\frac{(ig)^{2p}i^n}{(2p-2n)!\,2^n n!}\int_{t_0}^{t}d\xi_1\ldots\int_{t_0}^{t}d\xi_{2q+1}\int_{t_0}^{t}d\gamma_1\ldots\int_{t_0}^{t}d\gamma_{2p}\prod_{i=1}^{2q+1}\prod_{j=1}^{2p}\varepsilon(\xi_i-\gamma_j)$$

$$\times\prod_{k=1}^{2m-1}\prod_{e=1}^{2n-1}\Delta(\xi_k-\xi_{k+1})\Delta(\gamma_e-\gamma_{e+1}):\prod_{\tau=2m+1}^{2q+1}\hat{\varphi}_2(\xi_\tau)\prod_{f=2n+1}^{2p}\hat{\varphi}_3(\gamma_f):\times$$

$$\times(\psi^+\tau_2\psi):\exp\Big\{ig(\psi^+\tau_1\psi)\int_{t_0}^{t}ds\prod_{i=1}^{2q+1}\prod_{j=1}^{2p}\varepsilon(s-\xi_i)\varepsilon(s-\gamma_j)\hat{\varphi}_1(s)\Big\}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{ig^2}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}ds_1\,ds_2\prod_{i=1}^{2q+1}\prod_{j=1}^{2p}\varepsilon(s_1-\xi_i)\varepsilon(s_1-\gamma_j)\Delta(s_1-s_2)\varepsilon(s_2-\xi_i)\varepsilon(s_2-\gamma_j)\Big\}+$$

$$+\frac{(ig)^{2q+1}i^m}{(2q+1-2m)!\,2^m m!}\cdot\frac{(ig)^{2p+1}i^n}{(2p+1-2n)!\,2^n n!}\int_{t_0}^{t}d\xi_1\ldots\int_{t_0}^{t}d\xi_{2q+1}\int_{t_0}^{t}d\gamma_1\ldots\int_{t_0}^{t}d\gamma_{2p+1}\prod_{i=1}^{2q+1}\prod_{j=1}^{2p+1}\varepsilon(\xi_i-\gamma_j)$$

$$\times\prod_{k=1}^{2m-1}\prod_{e=1}^{2n-1}\Delta(\xi_k-\xi_{k+1})\Delta(\gamma_e-\gamma_{e+1}):\prod_{\tau=2m+1}^{2q+1}\hat{\varphi}_2(\xi_\tau)\prod_{f=2n+1}^{2p+1}\hat{\varphi}_3(\gamma_f)\times$$

$$\times(\psi^+\tau_3\psi):\exp\Big\{-ig(\psi^+\tau_1\psi)\int_{t_0}^{t}ds\prod_{i=1}^{2q+1}\prod_{j=1}^{2p+1}\varepsilon(s-\xi_i)\varepsilon(s-\gamma_j)\hat{\varphi}_1(s)\Big\}:\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{ig^2}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}ds_1\,ds_2\prod_{i=1}^{2q+1}\prod_{j=1}^{2p+1}\varepsilon(s_1-\xi_i)\varepsilon(s_1-\gamma_j)\Delta(s_1-s_2)\varepsilon(s_2-\xi_i)\varepsilon(s_2-\gamma_j)\Big\}\Big\}.$$

В этом выражении сохраняется симметрия относительно перестановок индексов 1, 2, 3.

Имея S -матрицу, можно вычислить перенормировочные константы при $L\to\infty$. Перенормировка массы однонуклонного состояния равна:

$$\delta m=-g^2\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\omega_k^2}\cdot\frac{3}{2}\Big[1+\frac{1}{g^2/\mu^2+1}+\cdots\Big]. \qquad /5.7/$$

Перенормировка нуклонного поля Z_2 есть

$$Z_2 = \left(\frac{1}{L}\right)^{g^2/2\pi^2}\left[1+\frac{g^2/\pi^2}{1+g^2/\pi^2}\ln L+\dots\right]. \qquad /5.8/$$

Перенормировка константы связи определяется обычным способом и записывается в виде:

$$\frac{g_r}{g} = 1-\frac{2}{g^2/\pi^2+1} - 2\frac{g^4}{\pi^4}\int_0^\infty dx_1\int_0^\infty dx_2\int_0^\infty dx_3\,(x_1+x_2)\times$$

$$\times\left\{\frac{x_3^3}{\left[(1+x_1x_3)(1+x_2x_3)\right]^{2+g^2/\pi^2}}\left[\left(\frac{(1+x_1)(1+x_2)}{1+x_1+x_2}\right)^{g^2/\pi^2}-1\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(1+x_1)(1+x_2)}{x_3(1+x_3x_1)(1+x_3x_2)}\right]^{g^2/\pi^2}\cdot\left(\frac{1}{1+x_1+x_2}\right)^{2+g^2/\pi^2}\right\}. \qquad /5.9/$$

Относительно поведения ряда для g_r можно точно повторить все то, что было сказано про перенормированную константу связи заряженной теории /см.раздел 4/.

Заметим, что в скалярной симметричной теории не появляется ничего принципиально нового по сравнению со скалярной заряженной теорией.

6. Об одной модели в теории поля

В недавней работе Бялыницкого-Бируля [4] была рассмотрена модель локальной теории поля с фиксированным нуклоном, в которой нуклон может находиться в двух состояниях, отличающихся друг от друга по массе /мы условно будем называть эти состояния протоном и нейтроном/.

Гамильтониан системы имеет вид:

$$H = m_0(\psi^+\psi) + \frac{1}{2}\int d\bar{x} : [\pi^2(x) + (\nabla\varphi(x))^2 + \mu^2\varphi^2(x)] : +$$
$$+ g\int d\bar{x}(\psi^+\tau_1\psi)\varphi(x)\rho(x) + \Delta m_0(\psi^+\tau_3\psi). \qquad /6.1/$$

Заметив, что при $\Delta m_0 = 0$ получается точно решаемый случай скалярных мезонов с фиксированным источником, можно применить теорию возмущения по константе Δm_0, не ограничивая силы взаимодействия между нуклоном и мезонами. Этим способом в работе /4/ был получен интересный результат, заключающийся в том, что перенормировка заряда оказалась конечной, не содержащей логарифмических особенностей.

С точки зрения метода, развитого выше, гамильтониан /6.1/ интересен тем, что ряд Лаппо-Данилевского совпадает здесь с рядом теории возмущения по константе Δm_0; однако, как уже отмечалось выше, новый метод позволяет получить n член ряда, чего не дает теория возмущения. В данном случае это преимущество позволяет точно найти спектр собственных значений полного гамильтониана /5.1/.

Итак, рассмотрим уравнение для S -матрицы. Будем искать сразу $S^\alpha(t,t_0)$ - матрицу, чтобы воспользоваться формулами /4.2/ и /4.3/.

В представлении взаимодействия имеем:

$$i\frac{\partial}{\partial t}S^\alpha(t,t_0) = H_I(t)e^{-\alpha|t|}S^\alpha(t,t_0)$$
$$S^\alpha(t,t_0)/_{t=t_0} = 1,$$

где

$$H_I = g(\psi^+\tau_1\psi)\hat{\varphi}(t) + \Delta m_0(\psi^+\tau_3\psi)$$
$$\hat{\varphi}(t) = \sum_k \frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_{\bar{k}}e^{-i\omega_k t} + a^+_{\bar{k}}e^{i\omega_k t}\right). \qquad /6.2/$$

Повторяя полностью процедуру, изложенную в разделах 1-3, получим следующее выражение для $S^\alpha(t,t_0)$-матрицы:

$$S^{\alpha}(t,t_0) = 1 - \left[2(\psi^+\psi) - (\psi^+\psi)^2\right] +$$

$$+ \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \frac{(i\Delta m_0)^{2q}}{(2q)!} \int_{t_0}^{t} d\xi_1 \ldots \int_{t_0}^{t} d\xi_{2q}\, e^{-\alpha(|\xi_1| + \ldots + |\xi_{2q}|)} \right. \times$$

$$\times \left[2(\psi^+\psi) - (\psi^+\psi)^2\right] : \exp\left\{ -ig(\psi^+\tau_1\psi) \int_{t_0}^{t} ds\, e^{-\alpha|s|} \hat{\varphi}(s) \prod_{i=1}^{2q} \varepsilon(s-\xi_i) \right\} : \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{i}{2} g^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} ds_1 ds_2\, e^{-\alpha(|s_1|+|s_2|)} \prod_{i=1}^{2q} \varepsilon(s_1-\xi_i) \Delta(s_1-s_2) \varepsilon(s_2-\xi_i) \right\} - \qquad /6.3/$$

$$- \frac{(i\Delta m_0)^{2q+1}}{(2q+1)!} \int_{t_0}^{t} d\xi_1 \ldots \int_{t_0}^{t} d\xi_{2q+1}\, e^{-\alpha(|\xi_1| + \ldots + |\xi_{2q+1}|)} \times$$

$$\times (\psi^+\tau_3\psi) : \exp\left\{ ig(\psi^+\tau_1\psi) \int_{t_0}^{t} ds\, e^{-\alpha|s|} \prod_{i=1} \varepsilon(s-\xi_i) \hat{\varphi}(s) \right\} \times$$

$$\left. \times \exp\left\{ -\frac{i}{2} g^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} ds_1 ds_2\, e^{-\alpha(|s_1|+|s_2|)} \prod_{i=1}^{2q+1} \varepsilon(s_1-\xi_i) \Delta(s_1-s_2) \varepsilon(s_2-\xi_i) \right\} \right\}.$$

Имея S -матрицу, легко вычислить константы перенормировок.

Собственное значение энергии однофермионного состояния равно /см. приложение Γ /.

$$E_N = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\langle 0 | C_N H S^{\alpha}(0,-\infty) C_N^+ | 0 \rangle}{\langle 0 | C_N S^{\alpha}(0,-\infty) C_N^+ | 0 \rangle} = \qquad /6.4/$$

$$= m_0 - \frac{1}{2} g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{v^2(k)}{\omega_k^2} + \delta_N \cdot \Delta m_0 \cdot \exp\left\{ -g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{v^2(k)}{\omega_k^2} \right\}.$$

где $\delta_N = \begin{cases} +1 & \text{для протона} \\ -1 & \text{для нейтрона.} \end{cases}$

Определим перенормированные /физические/ величины

$$m = m_0 - \frac{1}{2} g^2 \sum_{\bar{k}} \frac{v^2(k)}{\omega_k^2} \qquad /6.5а/$$

$$\Delta m = \Delta m_0 \exp\left\{-g^2 \sum_{\bar{k}} \frac{v^2(k)}{\omega_k^3}\right\}. \qquad /6.5в/$$

Перенормировка δm точно совпадает со случаем скалярных мезонов в поле фиксированного источника. Интересно отметить, что в этой модели собственное значение энергии однофермионного состояния перенормируется двумя константами перенормировок, вместо одной, как обычно.

В случае перехода к точечному взаимодействию требование конечности наблюдаемых m и Δm приводит к тому, что затравочные величины m_0 и Δm_0 необходимо считать бесконечными, причем порядок роста при снятии "обрезания" у них различный:

$$\left.\begin{aligned} m_0 &\to \frac{g^2}{4\pi^2} L \\ \Delta m_0 &\to \Delta m\, L^{g^2/2\pi^2} \end{aligned}\right\} \text{при } L \to \infty \quad ,$$

где L - импульс обрезания.

Выразив Δm_0 через Δm согласно /5.5в/ и подставив в /6.3/, получим выражение для S^α -матрицы, представленное рядом по наблюдаемому параметру Δm .

Собственное значение энергии системы нуклона и n -мезонов с импульсами $\bar{p}_1, \dots \bar{p}_n$ равно, как и следовало ожидать:

$$E_{N\pi_1\dots\pi_n} = E_N + \omega_{\bar{p}_1} + \dots + \omega_{\bar{p}_n},$$

где E_N дается формулой /6.4/.

Такой спектр собственных значений является естественным для гамильтониана с фиксированным нуклоном.

Константа перенормировки фермионного поля Z_2 определяется так:

$$Z_2 = \left|\langle 0| c_N S^{\alpha}(0,-\infty) c_N^+ |0\rangle\right|^2 =$$

$$= \left| \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-i\Delta m_0)^q}{q!} \int_{-\infty}^{0} d\tau_1 \ldots \int_{-\infty}^{0} d\tau_q\, e^{\alpha(\tau_1+\ldots+\tau_q)} \exp\left\{-\frac{ig^2}{2} \iint_{-\infty}^{0} ds_1 ds_2 \prod_{i=1}^{q} \varepsilon(s_1-\tau_i)\Delta(s_1-s_2)\varepsilon(s_2-\tau_i)\right\}\right|^2 \qquad /6.6/$$

$$= \exp\left\{-g^2 \sum_k \frac{v^2(k)}{2\omega^3}\right\}\left[1 + i\Delta m \int_{-\infty}^{0} d\tau \left(e^{g^2 \sum \frac{v^2}{\omega^3} e^{-i\omega\tau}} - e^{g^2 \sum \frac{v^2}{\omega^3} e^{i\omega\tau}}\right) + \ldots\right.$$

При $g^2/2\pi^2 < 1$ все интегралы в квадратных скобках сходятся, когда $v(k) \to 1$ /т.е. $L \to \infty$ /. Таким образом, при снятии обрезания Z_2 стремится к нулю как $(1/L)^{g^2/2\pi^2}$. Согласно вероятному смыслу Z_2 равенство этой константы нулю означает, что физический нуклон не может быть обнаружен в "голом" состоянии.

Перенормированная константа связи вводится обычным способом

$$\frac{g_r}{g} = \left(\psi_p^{(+)}, (\psi^+\tau_1\psi)\psi_n^{(-)}\right) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\langle 0|c_p S^{\alpha}(\infty,0)(\psi^+\tau_1\psi) S^{\alpha}(0,-\infty) c_n^+|0\rangle}{\sqrt{\langle 0|c_p S^{\alpha}(0,-\infty) c_p^+|0\rangle \langle 0|c_n S^{\alpha}(0,-\infty) c_n^+|0\rangle}} \qquad /6.7/$$

Ограничиваясь двумя членами в ряду /6.7/ (исключение бесконечной фазы из /6.7/ производится так же, как в /4.3/) будем иметь:

$$\frac{g_r}{g} = 1 - 2(i\Delta m)^2 \int_0^{\infty} dx \cdot x \left[\exp\left\{2g^2 \sum_k \frac{v^2(k)}{\omega^3} e^{-i\omega x}\right\} - 1\right] + \ldots \qquad /6.8/$$

При переходе к точечному взаимодействию / $v(k) \to 1$, $L \to \infty$ / все интегралы в ряду /6.8/ сходятся[x] для $g^2/2\pi^2 < 1$.

---

x/ В работе /4/ приведено неточное условие сходимости $g^2/2\pi^2 < \frac{2}{e}$.

Ситуация в этой модели существенно отличается от той, которая возникла для заряженной теории (см. /4.10/ и далее).

Для выражений /6.7/ и /6.8/ точка $g=0$ не является особой, так как в этой точке интегралы ограничены, в противоположность выражению /4.12/. Поэтому здесь при применении теории возмущения, т.е. при представлении решения в виде ряда по g^2, не возникает логарифмических расходимостей по L, характорных для современной теории поля. В этой связи, данная модель, на наш взгляд, не отражает некоторых фундаментальных трудностей, свойственных точным уравнениям мезодинамики.

В заключение приведем выражение матричного элемента рассеяния мезона на нуклоне в этой модели

$$S_{f\leftarrow i} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\langle 0 | C_N a_{\vec p_f} S^{\alpha}(\infty,-\infty)\, a^+_{\vec p_i} C^+_N | 0\rangle}{\langle 0 | C_N S^{\alpha}(\infty,-\infty) C^+_N | 0\rangle} =$$

$$= \delta_{\vec p_i \vec p_f} - 2\pi\delta(\omega_f-\omega_i)\, M_{f\leftarrow i}(\omega_f)$$

где

$$M_{f\leftarrow i}(\omega_f) = g^2 \frac{v^2(p_f)}{2\omega_f}\,\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-i\omega_f\tau} \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sum\limits_{q=0}^{\infty}\frac{(-i\delta_N\Delta m_0)^q}{q!} B_q^{\alpha}}{\sum\limits_{q=0}^{\infty}\frac{(-i\delta_N\Delta m_0)^q}{q!} b_q^{\alpha}}$$

/6.9/

$$B_q^{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_q\, e^{-\alpha(|\xi_1|+\ldots+|\xi_q|)} \prod_{i=1}^{q} \varepsilon(\xi_i)\varepsilon(\xi_i-\tau) \exp\Big\{-\frac{ig^2}{2}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(|s_1|+|s_2|)} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{q} \varepsilon(s_1-\xi_j)\Delta(s_1-s_2)\varepsilon(s_2-\xi_j)\, ds_1\, ds_2\Big\}$$

$$b_q^{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_q\, e^{-\alpha\sum\limits_{\ell=1}^{q}|\xi_\ell|} \exp\Big\{-\frac{ig^2}{2}\iint_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2\, e^{-\alpha(|s_1|+|s_2|)} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{q} \varepsilon(s_1-\xi_j)\Delta(s_1-s_2)\varepsilon(s_2-\xi_j)\Big\}$$

Используя, как обычно, деление ряд на ряд для исключения бесконечной фазы и ограничиваясь двумя членами получающегося после этой процедуры выражения, будем иметь:

$$M_{f\leftarrow i}(\omega_f) = -2\delta_N g^2 \frac{v^2(k)}{\omega_f^2}\frac{\Delta m}{\omega_f}\left[1 - i\delta_N \frac{4\Delta m}{\omega_f}\int_0^\infty dx \sin^2\frac{x}{2}\left\{e^{2g^2\sum_k \frac{v^2}{\omega^3} e^{i\frac{\omega}{\omega_f}x}} - 1\right\}\right] + \dots \qquad /6.9/$$

З а к л ю ч е н и е

Развитый метод решения задач теории поля с фиксированным нуклоном позволяет находить решения в виде рядов, для которых известен n -ый член. При этом константа связи не является параметром разложения, и, следовательно, не требуется предположения о ее малости. Можно надеяться, что знание явного вида n -ого члена ряда, представляющего решение, позволит в дальнейшем дать ответ на проблему сходимости рядов, по крайней мере, для отдельных моделей этого класса. Однако изучение перенормированной константы связи приводит, по-видимому, к выводу о существовании в точном решении для некоторых моделей полюса в точке $g=0$. Это утверждение ставит под серьезное сомнение все методы, использующие разложение по константе g . Во всяком случае из формулы /4.12/ следует, что логарифмически расходящиеся члены, отсутствующие в нашем решении, неизбежно появляются при разложении по g . Отметим еще следующее: применение мало разработанного метода функционального интегрирования, дающего в данном случае верные результаты, позволяет надеяться, что при дальнейшей разработке этот метод найдет более эффективное применение при решении точных уравнений теории поля.

В заключение считаем своим приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. Д.И. Блохинцеву и академику Н.Н. Боголюбову за весьма полезные и стимулирующие обсуждения настоящей работы.

Приложение А

На примере простого дифференциального уравнения колебаний можно выяснить смысл итераций в методе Лаппо-Данилевского. Рассмотрим систему уравнений, записанную в матричной форме:

$$i\frac{\partial}{\partial t}Y(t) = (g_1\tau_1 + g_2\tau_2)Y(t)$$
$$Y(0) = I. \qquad /А.1/$$

Здесь g_1 и g_2 - постоянные коэффициенты. $Y(t)$ - двухрядная матрица. Система /А,1/ решается точно и ее решение записывается в виде:

$$Y(t) = Ch\left(i\sqrt{g_1^2+g_2^2}\,t\right) - \frac{g_1\tau_1+g_2\tau_2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}\,Sh\left(i\sqrt{g_1^2+g_2^2}\,t\right). \qquad /А.2/$$

С другой стороны, метод Лаппо-Данилевского дает решение в виде:

$$Y(t) = \sum_{q=0}^{\infty}\left\{\frac{(ig_2)^{2q}}{(2q)!}\int_0^t d\zeta_1\ldots\int_0^t d\zeta_{2q}\left[Ch\left(ig_1\int_0^t ds\,\varepsilon(s-\zeta_1)\ldots\varepsilon(s-\zeta_{2q})\right)-\right.\right. \qquad /А.3/$$

$$\left.-\tau_1\,Sh\left(ig_1\int_0^t ds\,\varepsilon(s-\zeta_1)\ldots\varepsilon(s-\zeta_{2q})\right)\right] -$$

$$-\frac{(ig_2)^{2q+1}}{(2q+1)!}\int_0^t d\zeta_1\ldots\int_0^t d\zeta_{2q+1}\left[\tau_2\,Ch\left(ig_1\int_0^t ds\,\varepsilon(s-\zeta_1)\ldots\varepsilon(s-\zeta_{2q+1})\right)+\right.$$

$$\left.+(\tau_2\tau_1)\,Sh\left(ig_1\int_0^t ds\,\varepsilon(s-\zeta_1)\ldots\varepsilon(s-\zeta_{2q+1})\right)\right]$$

Вычисляя интегралы в /A.3/, можно убедиться, что полученный ряд является разложением Тейлора для функции /A.2/ в окрестности точки $g_2 = 0$. Например:

$$Ch\left(i\sqrt{g_1^2+g_2^2}\right) = \sum \frac{(ig_2)^{2q}}{(2q)!} \int_0^t d\tau_1 \ldots \int_0^t d\tau_{2q}\, Ch\left(ig_1 \int_0^t ds \prod_{i=1}^{2q} \varepsilon(s-\tau_i)\right) = \qquad /A.4/$$

$$= Ch(ig_1 t) + \frac{1}{2}(ig_2 t)\frac{g_2}{g_1} sh(ig_1 t) + \ldots$$

Решение в форме /A.3/ можно получить, применяя к уравнению /A.1/ теорию возмущения по константе g_2, однако метод Лаппо-Данилевского дает в этом случае возможность выписать n -ый член ряда, что не тривиально в теории возмущения.

Приложение Б

Интегрирование "классической" $\tilde{S}$ -матрицы /2.6/ по классическим полям Λ_1 и Λ_2 основано на следующих соотношениях:

$$C\int \delta\Lambda_2 \exp\left\{-i\int_{t_0}^t ds\, \Lambda_2(s)\,\varphi_2(s)\right\} \exp\left\{ig\int_{t_0}^t ds\, \rho(s)\,\Lambda_2(s)\right\} = \qquad /Б.1/$$

$$= \prod_s \delta\left(\varphi_2(s) - g\rho(s)\right),$$

где $\rho(s)$ некоторая действительная функция от s.

$$C\int \delta\Lambda_1 \exp\left\{-i\int_{t_0}^t ds\, \Lambda_1(s)\,\varphi_1(s)\right\} \Lambda_1(\tau_1)\ldots\Lambda_1(\tau_n) = \qquad /Б.2/$$

$$= i\frac{\delta}{\delta\varphi_1(\tau_1)} \ldots i\frac{\delta}{\delta\varphi_1(\tau_n)} \prod_s \delta(\varphi_1(s))$$

Дальнейшее интегрирование по функциям φ_1 и φ_2 также может быть выполнено без труда:

$$\int \delta\varphi_2 \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t d\tau\, d\eta\, \Delta(\tau-\eta)\,\varphi_2(\tau)\,\varphi_2(\eta) + i\int_{t_0}^t ds\, \hat{\varphi}_2(s)\,\varphi_2(s)\right\} \prod_s \delta(\varphi_2(s) - g\rho(s)) = \qquad /Б.3/$$

$$= \exp\left\{-\frac{i}{2}g^2 \int_{t_0}^t\int_{t_0}^t d\tau\, d\eta\, \Delta(\tau-\eta)\,\rho(\tau)\,\rho(\eta) + ig\int_{t_0}^t ds\, \hat{\varphi}_2(s)\,\rho(s)\right\}$$

и $$I_n = I_n(\tau_1,\tau_2,\dots\tau_n) = \int \delta\phi_1 \exp\Big\{-\frac{i}{2}\iint_{t_0 t_0}^{t\,t} d\tau\, d\eta\, \Delta(\tau-\eta)\varphi_1(\tau)\varphi_1(\eta) + i\int_{t_0}^{t} ds\, \hat{\varphi}_1(s)\varphi_1(s)\Big\} \times$$

$$\times\, i\frac{\delta}{\delta\phi_1(\tau_1)} \dots i\frac{\delta}{\delta\phi_1(\tau_n)} \prod_s \delta(\varphi_1(s)) = \qquad /Б.4/$$

$$= (-)^n \Big[i\frac{\delta}{\delta\phi_1(\tau_1)} \dots i\frac{\delta}{\delta\phi_1(\tau_n)} \exp\Big\{-\frac{i}{2}\iint_{t_0 t_0}^{t\,t} d\tau\, d\eta\, \Delta(\tau-\eta)\varphi_1(\tau)\varphi_1(\eta) + i\int ds\, \hat{\varphi}_1(s)\varphi_1(s)\Big\}\Big]_{\phi_1=0}$$

Преобразуем функцию I_n к более удобному виду. В /Б.4/ вариационные производные можно заменить на частные, тогда

$$I_n = (-i)^n \Big[\frac{\partial^n}{\partial Z_1 \dots \partial Z_n} \exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \Delta_{ij} Z_i Z_j + \sum_{j=1}^{n} Z_j a_j\Big]_{Z_1=\dots=Z_n=0} \qquad /Б.5/$$

где
$$\Delta_{ij} = i\Delta(\tau_i - \tau_j)$$
$$a_j = i\hat{\varphi}_2(\tau_j).$$

Дифференцируя по Z_n и полагая $Z_n = 0$, получим

$$I_n = (-i)^n \Big[\frac{\partial^{n-1}}{\partial Z_1 \dots \partial Z_{n-1}} \Big(-\sum_{j=1}^{n-1} \Delta_{j,n} Z_j\Big) \exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n-1} \Delta_{ij} Z_i Z_j + \sum_{j=1}^{n-1} Z_j a_j\Big\}\Big]_{Z_1=\dots=Z_{n-1}=0} \qquad /Б.6/$$
$$+ (-i)\, a_n I_{n-1}$$

Заметим, что $I_n(\tau_1 \dots \tau_n)$ является полностью симметричной функцией относительно перестановок $\tau_1 \dots \tau_n$, причем она интегрируется по $\tau_1 \dots \tau_n$ в одинаковых пределах также с полностью симметричной функцией. Поэтому можно считать, что перед экспонентой в /Б.6/ стоит не $\sum_{j=1}^{n-1} \Delta_{jn} Z_j$, а $(n-1)\Delta_{n-1,n} Z_{n-1}$. Этим мы нарушаем симметрию функции /Б.4/, однако это не влияет на результат интегрирования по $\tau_1 \dots \tau_n$. Таким образом, получится следующее рекуррентное соотношение

$$I_n = (n-1)\Delta_{n-1,n} I_{n-2} - i a_n I_{n-1}. \qquad /Б.7/$$

Зная I_1 и I_2 (их легко получить непосредственно из /Б.4/), нетрудно доказать методом математической индукции, что

$$I_n = (-i)^n \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!\, i^m}{2^m m!(n-2m)!} \Delta_{1,2} \ldots \Delta_{2m-1,2m} a_{2m+1} \ldots a_n$$

или

$$I_n(\xi_1 \ldots \xi_n) = (-)^n \Big[i \frac{\delta}{\delta\phi_1(\xi_1)} \cdots i \frac{\delta}{\delta\phi_1(\xi_n)} \exp\Big\{ -\frac{i}{2} \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} d\xi\, d\eta\, \Delta(\xi-\eta)\phi_1(\xi)\phi_1(\eta) + \qquad /Б.8/$$

$$+ i \int_{t_0}^{t} ds\, \hat{\varphi}_1(s)\phi_1(s) \Big\} \Big]_{\phi(s)=0} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!\, i^m}{2^m m!(n-2m)!} \Delta(\xi_1-\xi_2) \ldots \Delta(\xi_{2m-1}-\xi_{2m}) \hat{\varphi}_1(\xi_{2m+1}) \ldots \hat{\varphi}_1(\xi_n)$$

где

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{если } n = 2k \\ \frac{n-1}{2} & \text{если } n = 2k+1 \end{cases}$$

П р и л о ж е н и е В

Перенормированная константа связи в заряженной скалярной теории определяется /4.8/. Рассмотрим сначала матричный элемент, стоящий в числителе:

$$M_1^\alpha = \langle 0 | C_p S^\alpha(\infty,0)(\psi^+ \tau_+ \psi) S^\alpha(0,-\infty) C_n^+ | 0 \rangle =$$

$$= \langle 0 | C_p S^\alpha(\infty,0) \frac{1}{2} \left[(\psi^+ \tau_1 \psi) + i(\psi^+ \tau_2 \psi) \right] S^\alpha(0,-\infty) C_n^+ | 0 \rangle = \qquad /В.1/$$

$$= \langle 0 | C_p \frac{i}{2g} \left[\frac{\delta}{\delta\hat{\varphi}_1(0)} + i \frac{\delta}{\delta\hat{\varphi}_2(0)} \right] S^\alpha(\infty,-\infty) C_n^+ | 0 \rangle .$$

Так как S - матрица симметрична относительно перестановок индексов 1 и 2, то

$$M_1^{\alpha} = \langle 0 | c_p \frac{i}{g} i \frac{\delta}{\delta \hat{\varphi}_1(0)} S^{\alpha}(\infty, -\infty) c_n^+ | 0 \rangle .$$

/B.2/

Подставляя в /B.2/ выражение для S -матрицы /3.1/, получим

$$M_1^{\alpha} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \left(-\frac{g^2}{2}\right)^q A_q^{\alpha} , \qquad /B.3/$$

где

$$A_q^{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_{2q} \, e^{-\alpha \sum_{i=1}^{2q} |\tau_i|} \prod_{j=1}^{2q-1} i\Delta(\tau_j - \tau_{j+1}) \varepsilon(\tau_j) \varepsilon(\tau_{2q}) \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{ig^2}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 \, e^{-\alpha(|s_1| + |s_2|)} \prod_{j=1}^{2q} \varepsilon(s_1 - \tau_j) \Delta(s_1 - s_2) \varepsilon(s_2 - \tau_j) \right\}.$$

Матричный элемент, стоящий в знаменателе формулы /4.8/, может быть записан в виде

$$M_2^{\alpha} = \langle 0 | c_p S^{\alpha}(\infty, -\infty) c_p^+ | 0 \rangle = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \left(-\frac{g^2}{2}\right)^q a_q^{\alpha} , \qquad /B.4/$$

где

$$a_q^{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_{2q} \, e^{-\alpha \sum_{i=1}^{2q} |\tau_i|} \prod_{j=1}^{2q-1} \Delta(\tau_j - \tau_{j+1}) \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{ig^2}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 \, e^{-\alpha(|s_1| + |s_2|)} \prod_{j=1}^{2q} \varepsilon(s_1 - \tau_j) \Delta(s_1 - s_2) \varepsilon(s_2 - \tau_j) \right\}.$$

Интеграл в экспоненте с точностью до первой степени α равен

$$J_n(\tau_1 \ldots \tau_n) = -\frac{ig^2}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 \, e^{-\alpha(|s_1| + |s_2|)} \prod_{j=1}^{2q} \varepsilon(s_1 - \tau_j) \Delta(s_1 - s_2) \varepsilon(s_2 - \tau_j) = \qquad /B.5/$$

$$= \frac{i}{\alpha} \frac{g^2}{2} \sum_{k} \frac{v^2(k)}{\omega_k^2} -$$

$$- g^2 \sum_{k} \frac{v^2(k)}{\omega_k^3} \left[n + 2 \sum_{e=1}^{n} \left\{ \prod_{j \neq e}^{n} \varepsilon(\tau_e - \tau_j) \right\} \sum_{m=1}^{e-1} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \varepsilon(\tau_m - \tau_i) \right\} e^{-i\omega|\tau_e - \tau_m|} \right]$$

Бесконечная фаза $\exp\left\{\frac{i}{\alpha}\frac{g^2}{2}\sum\frac{v^2}{\omega^2}\right\}$ одинакова во всех членах рядов M_1^α и M_2^α, поэтому ее можно сократить.

Если $\tau_1>\tau_2>\tau_3\ldots>\tau_n$, то формула /С.5/ упрощается:

$$J_n(\tau_1\ldots\tau_n)=-g^2\sum_k\frac{v^2(k)}{\omega_k^3}\left[n+2\sum_{\ell=2}^{n}\sum_{m=1}^{\ell-1}(-)^{\ell+m}e^{-i\omega(\tau_m-\tau_\ell)}\right]. \qquad /B.6/$$

Соотношение /4.8/ с учетом /С.3/ и /С.4/ может быть переписано в виде:

$$\frac{g_r}{g}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{M_1^\alpha}{M_2^\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sum\limits_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!}\left(-\frac{g^2}{2}\right)^q A_q^\alpha}{\sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(-\frac{g^2}{2}\right)^p a_p^\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\sum_n^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{g^2}{2}\right)\bar{A}_n^\alpha, \qquad /B.7/$$

где $\bar{A}_n^\alpha$, A_q^α, a_p^α связаны между собой соотношением

$$A_n^\alpha=\sum_{p+q=n}\frac{n!}{p!\,q!}a_p^\alpha\bar{A}_q^\alpha$$

откуда

$$\bar{A}_n^\alpha=(A_n^\alpha-a_n^\alpha)-\sum_{q=1}^{n-1}\frac{n!}{q!\,(n-q)!}\bar{A}_q^\alpha a_{n-q}^\alpha \qquad /B.8/$$

Это **рекуррентное** соотношение позволяет вычислить n -ый член, если известны все предыдущие.

Наличие бесконечной фазы в M_1^α и M_2^α проявляется в том, что в A_q^α и a_q^α часть интегралов расходится при $\alpha=0$. Однако в $\bar{A}_q^\alpha$ при $\alpha=0$ все интегралы сходятся. Это означает, что бесконечная фаза тем самым исключена, и поэтому в выражении для $\bar{A}_n^\alpha$ можно положить $\alpha=0$, т.е.

$$\bar{A}_n=\lim_{\alpha\to}\bar{A}_n^\alpha=(A_n-a_n)-\sum_{q=1}^{n-1}\frac{n!}{q!\,(n-q)!}\bar{A}_q\,a_{n-q}, \qquad /B.9/$$

где

$$A_q=A_q^\alpha\big|_{\alpha=0}\,;\quad a_p=a_p^\alpha\big|_{\alpha=0}$$

Окончательно получим
$$g_r/g = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!}\left(-\frac{g^2}{2}\right)^q \bar{A}_q, \qquad /B.10/$$
где $\bar{A}_q$ определяется из /B.9/, а A_q и a_p берутся из /B.3/ и /B.4/ при $\alpha = 0$.

Рассмотрим первый член $(\bar{A}_0 = 1)$
$$\bar{A}_1 = A_1 - a_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2\, i\,\Delta(\tau_1-\tau_2)\left[\varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)-1\right] \exp\{J_2(\tau_1,\tau_2)\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2\, 2i\,\Delta(\tau_1-\tau_2)\left[\varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)-1\right] \exp\left\{-g^2\sum_k \frac{v^2(k)}{\omega^3}\left[2-2e^{-i\omega|\tau_1-\tau_2|}\right]\right\}$$
Производя замену переменных $\tau_1 = \nu$ $\tau_1 - \tau_2 = \eta$ получим
$$\bar{A}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_0^{\infty} d\eta\, 2i\,\Delta(\eta)\left[\varepsilon(\nu)\varepsilon(\nu+\eta)-1\right] \exp\left\{-g^2\sum_k \frac{v^2}{\omega^3}2\left[1-e^{-i\omega\eta}\right]\right\} = \qquad /B.11/$$
$$= -2\int d\eta\cdot\eta \sum \frac{v^2}{\omega} e^{-i\omega\eta} \exp\left\{-2g^2\sum_k \frac{v^2}{\omega^3}\left[1-e^{-i\omega\eta}\right]\right\}$$
так как
$$\int_{-\infty}^{\infty} d\nu\left[\varepsilon(\nu)\varepsilon(\nu+\eta)-1\right] = -2\int_0^{\eta} d\nu = -2\eta .$$

Теперь перейдем к пределу в $\bar{A}_1$ при $L \to \infty$. Как известно, причинные функции имеют особенности при малых значениях аргумента. Выбирая форм-фактор в виде:
$$v(k) = \exp\left\{-\frac{\omega-\mu}{2L}\right\}$$
и считая L достаточно большим, получим поведение причинных функций при малых аргументах (при $\left|\frac{\mu}{L}+i\mu\eta\right| \ll 1$):
$$\sum_k \frac{v^2(k)}{\omega_k} e^{-i\omega\eta} \sim \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{L}+i\eta\right)^2} \qquad /B.12/$$
$$\sum_k \frac{v^2(k)}{\omega_k^3} e^{-i\omega\eta} \sim -\frac{1}{8\pi^2}\ln\left(\frac{\mu}{L}+i\mu\eta\right)$$

Далее представим причинные функции в виде

$$\sum_k \frac{v^2(k)}{\omega_k} e^{-i\omega\eta} = \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{(\frac{1}{L}+i\eta)^2}\mathcal{F}_1(\eta)$$

$$\sum_k \frac{v^2(k)}{\omega_k^3} e^{-i\omega\eta} = -\frac{1}{2\pi^2}\ln\left(\frac{\mu}{L}+i\mu\eta\right)+\ln\mathcal{F}_2(\eta), \qquad /B.13/$$

где $\mathcal{F}_1(0)=\mathcal{F}_2(0)=1$.

Тогда интеграл /B.11/ с учетом /B.13/ равен:

$$\bar{A}_1 = -\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty d\eta\cdot\eta\,\frac{(\frac{1}{L})^{g^2/\pi^2}}{(\frac{1}{L}+i\eta)^{2+g^2/\pi^2}}\mathcal{F}(\eta), \qquad /B.14/$$

где $\mathcal{F}(\eta)=\mathcal{F}_1(\eta)[\mathcal{F}_2(\eta)]^{g^2/\pi^2}$, причем $\mathcal{F}(0)=1$.

Функция $\mathcal{F}(\eta)$ обеспечивает сходимость на бесконечности. Легко видеть, что при $L\to\infty$ интеграл расходится на нижнем пределе. Разобьем интеграл в/ B.14/ на два

$$\bar{A}_1 = -\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{L}\right)^{g^2/\pi^2}\int_0^1\frac{d\eta\cdot\eta}{(\frac{1}{L}+i\eta)^{2+g^2/\pi^2}}\mathcal{F}(\eta)-\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{L}\right)^{g^2/\pi^2}\int_1^\infty\frac{d\eta\cdot\eta\,\mathcal{F}(\eta)}{(\frac{1}{L}+i\eta)^{2+g^2/\pi^2}} \qquad /B.15/$$

В пределе $L\to\infty$ второй член исчезнет, так как интеграл сходится на всем интервале $[1,\infty]$, однако первый член дает конечный вклад. Действительно, производя замену $i\eta=\frac{y}{L}$, получим

$$\bar{A}_1 = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{iL}\frac{dy\,y}{(1+y)^{2+g^2/\pi^2}}\mathcal{F}\left(\frac{y}{L}\right)\xrightarrow[L\to\infty]{}\frac{2}{\pi^2}\int_0^{i\infty}\frac{dy\cdot y}{(1+y)^{2+\frac{g^2}{\pi^2}}} = \qquad /B.16/$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{dX\cdot X}{(1+X)^{2+g^2/\pi^2}}=\frac{2}{\pi^2}\frac{1}{g^2/\pi^2(1+g^2/\pi^2)}.$$

Здесь мы перешли от интегрирования по лучу $[0,i\infty]$ к $[0\ \infty]$ так как подинтегральная функция аналитична в области $0\le\arg Z\le\frac{\pi}{2}$.

Приведенные рассуждения при переходе к пределу при $L\to\infty$ в формулах /B.15/ и /B.16/ могут быть математически строго доказаны.

Аналогично можно получить A_2, A_3 и т.д.

Приложение Г

Согласно формуле /4.3/ собственное значение энергии однофермионного состояния определяется так:

$$E_N = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\langle 0|C_N H S^\alpha(0,-\infty) C_N^+|0\rangle}{\langle 0|C_N S^\alpha(0,-\infty) C_N^+|0\rangle} = m_0 + \delta_N \Delta m_0 + \delta E_N \qquad /Г.1/$$

где

$$\delta E_N = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\langle 0|C_N H_I S^\alpha(0,-\infty) C_N^+|0\rangle}{\langle 0|C_N S^\alpha(0,-\infty) C_N^+|0\rangle}.$$

Рассмотрим матричный элемент, стоящий в числителе:

$$M_1^\alpha = \langle 0| C_N H_I S^\alpha(0,-\infty) C_N^+|0\rangle = \langle 0|C_N g(\psi^+\tau_i\psi)\varphi^i(0) S^\alpha(0,-\infty)C_N^+|0\rangle$$

Подставляя в него S^α -матрицу из /6.3/ , получим

$$M_1^\alpha = -\sum_{q=0}^{\infty}(-i\delta_N \Delta m_0)^q \int_{-\infty}^{0} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{-\infty}^{\tau_{q-1}} d\tau_q \, e^{\alpha\sum_{i=1}^{q}\tau_i} \times$$

$$\times\, ig^2 \int_{-\infty}^{0} ds\, e^{\alpha s}\, i\Delta(s) \prod_{j=1}^{q} \varepsilon(s-\tau_j) \exp\left\{-\frac{ig^2}{2}\iint_{-\infty}^{0} ds_1 ds_2 e^{\alpha(s_1+s_2)} \prod_{i=1}^{q} \varepsilon(s_1-\tau_i) \times\right. \qquad /Г.2/$$

$$\left.\times\, \Delta(s_1-s_2)\varepsilon(s_2-\tau_i)\right\}.$$

Матричный элемент в знаменателе формулы /Г.1/ получается аналогично:

$$M_2^\alpha = \langle 0|C_N S^\alpha(0,-\infty) C_N^+|0\rangle = \sum_{q=0}^{\infty}(-i\delta_N \Delta m_0) \int_{-\infty}^{0} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{-\infty}^{\tau_{q-1}} d\tau_q \times \qquad /Г.3/$$

$$\times\, e^{\alpha\sum_1^q \tau_i} \exp\left\{-\frac{i}{2}g^2 \iint_{-\infty}^{0} ds_1 ds_2 e^{\alpha(s_1+s_2)} \prod_{i=1}^{q} \varepsilon(s_1-\tau_i)\Delta(s_1-s_2)\varepsilon(s_2-\tau_i)\right\}.$$

Интеграл, стоящий в показателе экспоненты, равен /при $\tau_1 > \tau_2 \cdots > \tau_q$/

$$I_q(\tau_1 \ldots \tau_q) = -\frac{i}{2}g^2 \iint_{-\infty}^{0} ds_1 ds_2 e^{\alpha(s_1+s_2)} \prod_{i=1}^{q} \varepsilon(s_1-\tau_i)\Delta(s_1-s_2)\varepsilon(s_2-\tau_i) =$$

$$= -\frac{g^2}{4}\sum_k \frac{v^2(k)}{\omega^2}\left(\frac{1}{i\alpha}+\frac{1}{\omega}\right) - g^2\sum_k \frac{v^2(k)}{\omega^3}\Big[q + \sum_{\ell=1}^{q}(-)^{\ell} e^{i\omega\tau_\ell} + \sum_{\ell=2}^{q}\sum_{m=1}^{\ell-1}(-)^{\ell+m} e^{i\omega(\tau_\ell-\tau_m)} \qquad /\Gamma.4/$$

Первое слагаемое в /Г.4/ одинаково для всех членов ряда как числителя, так и знаменателя и, следовательно, сокращается. Вычислив интеграл

$$i g^2\int_{-\infty}^{0} ds\, e^{\alpha s}\,\varepsilon(s-\tau_1)\ldots\varepsilon(s-\tau_q)\, i\Delta(s) = \frac{1}{2} g^2\sum_k \frac{v^2(k)}{\omega^2} + g^2\sum_k \frac{v^2(k)}{\omega^2}\sum_{\ell}^{q}(-)^{\ell} e^{i\omega\tau_\ell} \qquad /\Gamma.5/$$

и подставив его в /Г.2/, получим

$$M_1^\alpha = -\frac{1}{2} g^2\sum \frac{v^2(k)}{\omega^2}\cdot M_2^\alpha - \sum_{q=1}^{\infty}(-i\delta_N\Delta m_0)^q\int_{-\infty}^{0} d\tau_1\ldots\int_{-\infty}^{\tau_{q-1}} d\tau_q\, e^{\alpha\sum_1^q \tau_i}\times$$

$$\times g^2\sum_k \frac{v^2(k)}{\omega^2}\sum_{\ell=1}^{q}(-)^{\ell} e^{i\omega\tau_\ell}\exp\{I_q(\tau_1\ldots\tau_q)\} = \qquad /\Gamma.6/$$

$$= -\frac{1}{2} g^2\sum_k \frac{v^2(k)}{\omega^2}\cdot M_2^\alpha -$$

$$-\sum_{q=1}^{\infty}(-i\delta_N\Delta m_0)^q\int_{-\infty}^{0} d\tau_1\ldots\int_{-\infty}^{\tau_{q-1}} d\tau_q\, e^{\alpha\sum_1^q \tau_i}\, i\left(\frac{\partial}{\partial\tau_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial\tau_q}\right)\exp\{I_q(\tau_1\ldots\tau_q)\}.$$

Рассмотрим теперь q-й член ряда

$$R_q = \int_{-\infty}^{0} d\tau_1\ldots\int_{-\infty}^{\tau_{q-1}} d\tau_q\, e^{\alpha\sum^q \tau_i}\, i\left(\frac{\partial}{\partial\tau_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial\tau_q}\right)\exp\{I_q\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} d\tau_1\int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2\ldots\int_{-\infty}^{\tau_{q-2}} d\tau_{q-1}\, e^{\alpha\sum^q \tau_i}\Big[\int_{\tau_1}^{0} d\sigma\, e^{\alpha\sigma}\, i\frac{\partial}{\partial\sigma}\exp\{I_q(\tau_1\ldots\tau_{q-1},\sigma)\} +$$

$$+\sum_{j=q-2}^{1}\int_{\tau_{j+1}}^{\tau_j} d\sigma\, e^{\alpha\sigma}\, i\frac{\partial}{\partial\sigma}\exp\{I_q(\tau_q\ldots\tau_j,\sigma,\tau_{j+1}\ldots\tau_q)\}+$$

$$+\int_{-\infty}^{\tau_{q-1}} d\sigma\, e^{\alpha\sigma}\, i\frac{\partial}{\partial\sigma}\exp\{I_q(\sigma,\tau_{q-1}\ldots\tau_1)\}$$

Вычисляя с точностью до первого порядка по ε, получим

$$R_q=\int_{-\infty}^{0}d\tau_1\ldots\int_{-\infty}^{\tau_{q-2}}d\tau_{q-1}\, e^{\alpha\sum_1^{q-1}\tau_i}\, i\left[\exp\{I_q(\tau_{q-1}\ldots\tau_1,0)\}-\exp\{I_q(-\infty,\tau_{q-1}\ldots\tau_1)\}\right]$$

$$=i\left[1-\exp\left\{-g^2\sum_k\frac{v^2}{\omega^3}\right\}\right]\int_{-\infty}^{0}d\tau_1\ldots\int_{-\infty}^{\tau_{q-2}}d\tau_{q-1}\, e^{\alpha\sum^{q-1}\tau_i}\exp\{I_q(\tau_{q-1}\ldots\tau_1)\}$$

Подставляя полученное выражение в /Г.6/, получим

$$M_1^\alpha=-\frac{1}{2}g^2\sum_k\frac{v^2(k)}{\omega^2}M_2^\alpha-i\left[1-\exp\left\{-g^2\sum\frac{v^2(k)}{\omega^3}\right\}\right](-i\delta_N\Delta m_0)M_2^\alpha \qquad /Г.7/$$

Отсюда непосредственно следует формула /6.4/

$$E_N=m_0+\delta_N\Delta m_0-\frac{1}{2}g^2\sum_k\frac{v^2(k)}{\omega^3}-\delta_N\Delta m_0\left[1-\exp\left\{-g^2\sum\frac{v^2}{\omega^3}\right\}\right] \qquad /Г.8/$$

$$=m_0-\frac{1}{2}g^2\sum_k\frac{v^2(k)}{\omega^3}+\delta_N\Delta m_0\exp\left\{-g^2\sum_k\frac{v^2(k)}{\omega^3}\right\}.$$

Рукопись поступила в издательский отдел
2 марта 1960 года.

Литература

1. G.F. Chew, F.E. Low. Phys. Rev., 101, 1570 (1956).

2. S.F. Edwards, R.E. Peierls. Proc. Roy. Soc, 224, 24, (1954). ПСФ, № 3, /1955/

3. И.А. Лаппо-Данилевский. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1957 г.

4. I. Bialynicki - Birula. Nucl. Phys., 12, 309, (1959).

5. R.P. Feynman. Phys. Rev., 84, 108, (1951) ПСФ п.3, /1955/

6. Н.Н. Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957 г.

7. S. Hori. Progr. Theor. Phys., 7, 578, (1952) ПСФ, № 3 /1955/

8. N. Wiener. Proc. Nat. Acad. Sci., 7, 253, (1921), Proc. Nat. Acad. Sci., 7, 294, (1921).

9. Б.М. Барбашов, Г.В. Ефимов. ЖЭТФ, 38, 198 /1960/.

10. M. Gell-Mann, F. Low. Phys. Rev., 84, 350, (1951) ПСФ, №10, /1955/