58

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Я.Фишер, С.Чулли

D-482

РЕКУРЕНТНОЕ ПОСТРОЕНИЕ УГЛОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

/2. Введение целого спина и произвольного орбитального момента/.

ЖЭТФ, 1960, т 39, в5, с1349-1356.

Дубна 1960 год

Я.Фишер[x/], С.Чулли[xx/]

РЕКУРЕНТНОЕ ПОСТРОЕНИЕ УГЛОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

/2. Введение целого спина и произвольного орбитального момента/.

x/ Командирован из Физического института Чехословацкой Академии наук в Праге, Чехословакия.

xx/ Командирован из Института атомной физики в Бухаресте, Румыния.

А н н о т а ц и я

Настоящая статья является второй частью работы, в которой дан практический метод построения угловых операторов. В этом методе используются только дифференциальные операции и можно обойтись без сложных суммирований, связанных с вычислениями с помощью коэффициентов Клебша-Гордана и с преобразованиями Рака или Фано.

В этой части изучены изменения вида угловых операторов, вызванные добавлением в процесс нового орбитального момента или целого спина. Даны формулы для практических вычислений и приведены примеры.

В в е д е н и е

Настоящая статья является продолжением статьи [1]. В этих статьях решается проблема нахождения в явном виде полного набора угловых операторов, по которым можно разложить S - матрицу данного процесса с целью проведения фазового анализа экспериментальных данных или с целью получения уравнений для фазовых сдвигов из динамических уравнений для S-матрицы. Относительно определения угловых операторов и их роли при решении таких задач можно сослаться на более ранние работы /1-3/.

При изучении процессов, в которых участвует больше чем 4 частицы, вычисление угловых операторов становится очень сложным и длительным. Поэтому возникает практический вопрос о получении полного набора угловых операторов данного процесса в предположении, что известны угловые операторы более простого процесса. В самой простой форме эту задачу можно записать в виде соотношения[1/]

$$\Omega_0 \mathcal{J}\left(a_1 + a_2 \to \sum_1^m a_i'\right) = \mathcal{J}\left(a_1 + a_2 \to \sum_1^m a_i' + s\right) \qquad /1/$$

или

$$\Omega_0 \mathcal{J}\left(a \to \sum_1^m a_i'\right) = \mathcal{J}\left(a + s \to \sum_1^m a_i'\right).$$

Другими словами, оператор Ω_0 "добавляет" в процесс новую скалярную частицу. Однако, нетрудно показать, что эту задачу можно сформулировать как частный случай задачи о нахождении оператора Ω, который меняет квантовое число одного из имеющихся в реакции моментов количества движения с ℓ до ℓ_i', не меняя количества частиц, участвующих в процессе. Это позволяет получить полный набор угловых операторов процесса, если известен только один член этого набора. Поэтому сначала мы найдем явный вид оператора Ω, а в 4-м разделе выразим Ω_0 через Ω.

Так же покажем, что предложенный метод можно использовать и для нахождения угловых операторов процесса, в котором, по сравнению с исходным, заменена одна скалярная частица векторной или тензорной.

1/ Символы a, a_i, a_i' означают любые частицы или ядра, s есть частица со спином нуль. $\mathcal{J}$ есть угловой оператор процесса, указанного в скобках.

Читатель, которого интересуют только практические результаты без математических выводов, может опустить часть I-го раздела от теоремы Джонсона до формулы /10/ включительно, и разделы 2-й и 3-й, кроме конечных формул /15/, /16/ и /15'/, /16'/, которые важны для практических вычислений.

§ 1. Изменение значения квантового числа момента количества движения

Будем рассматривать реакции типа

$$a_1 + a_2 \rightarrow a_1' + a_2' + \ldots + a_k' \tag{2а}$$

и распады типа

$$a \rightarrow a_1' + a_2' + \ldots + a_k' . \tag{2б}$$

В процессах типа /2а/ имеется один начальный и $k-1$ конечных независимых орбитальных моментов /в системе центра инерции/; в распадах /2б/ начальных орбитальных моментов нет и число конечных тоже равно $k-1$. Если учесть также спины всех частиц процессов /2а/, /2б/, то существует всего M начальных и N конечных независимых моментов количества движения, причем

$$0 \leq M \leq 3, \qquad k-1 \leq N \leq 2k-1,$$

в зависимости от того, сколько частиц имеют отличный от нуля спин. Если M или N больше единицы, то эти моменты можно складывать друг с другом в суммарные моменты; при этом число начальных квантовых чисел будет $2M-1$ и число конечных будет $2N-1$. Все эти моменты и соответствующие им квантовые числа будут обозначаться /без различия орбитальных, спиновых и суммарных/ буквой ℓ с разными индексами.

Рассмотрим любой процесс типа /2а/ или /2б/. Допустим, что его конечное и начальное состояния характеризуются полными наборами квантовых чисел моментов количества движения. Рассмотрим три момента

$\vec{l}_a$, $\vec{l}_b$, $\vec{l}_{ab}$ набора конечного состояния[2] и допустим, что они связаны соотношением

$$\vec{l}_a + \vec{l}_b = \vec{l}_{ab} . \qquad /3/$$

О природе моментов $\vec{l}_a$ и $\vec{l}_b$ не делаем пока никаких предположений. Угловой оператор $\mathcal{J}(\dots l_a, l_b, l_{ab}, \dots)$ с квантовыми числами l_a, l_b и l_{ab} может быть записан в виде

$$\mathcal{J}(\dots l_a l_b l_{ab} \dots) = \sum_{M=-l_{ab}}^{l_{ab}} \sum_{m=-l_a}^{l_a} \chi_{l_{ab}M}\, C_{l_{ab}M}^{l_a m\, l_b M-m}\, \psi_{l_a m} \cdot \varphi_{l_b M-m} , \qquad /4/$$

где $\chi_{l_{ab}M}$ – функции остальных переменных процесса, не зависящие от $\vec{l}_a$ и $\vec{l}_b$. Если в правой части /4/ подставить вместо функций

$$\Psi_{l_{ab}M}^{l_a l_b} = \sum_{m=-l_a}^{l_a} C_{l_{ab}M}^{l_a m\, l_b M-m}\, \psi_{l_a m}\, \varphi_{l_b M-m} , \qquad M = -l_{ab}, \dots, l_{ab}$$

функции $\Psi_{l_{ab}M}^{l'_a l'_b}$ с теми же значениями l_{ab} и M, но с другими l'_a и l'_b, то выражение

$$\sum_M \chi_{l_{ab}M}\, \Psi_{l_{ab}M}^{l'_a l'_b} = \mathcal{J}(\dots l'_a l'_b l_{ab} \dots)$$

представляет собой другой угловой оператор <u>того же самого</u> процесса. Поэтому переход от $\mathcal{J}(\dots l_a l_b l_{ab})$ к $\mathcal{J}(\dots l'_a l'_b l_{ab})$ эквивалентен переходу в правой части /4/ от $\Psi_{l_{ab}M}^{l_a l_b}$ к $\Psi_{l_{ab}M}^{l'_a l'_b}$ и может быть формально записан следующим образом:

$$\Omega \mathcal{J}(\dots l_a l_b l_{ab} \dots) = \mathcal{J}(\dots l'_a l'_b l_{ab} \dots) \qquad /5/$$

$$\Omega \Psi_{l_{ab}M}^{l_a l_b} = \Psi_{l_{ab}M}^{l'_a l'_b} , \qquad /5'/$$

---

[2] Сначала предполагаем, что $\vec{l}_a$ и $\vec{l}_b$ – динамические переменные конечного состояния. Поэтому ψ_{l_a} и φ_{l_b} в /4/ представляют собой кет – векторы в пространстве Гильберта.

где оператор Ω зависит от $\vec{l}_a$ и $\vec{l}_b$ и является скаляром относительно одновременных вращений пространств, характеризующих $\vec{l}_a$ и $\vec{l}_b$ [3/].

Сначала найдем явный вид Ω для случая $l'_a = l_a + r$, $l'_b = l_b + s$, где $r, s = 1, 0, -1$. Воспользуемся теоремой М.Г.Джонсона [4], которую можно сформулировать следующим образом. Если существуют векторные операторы $\vec{A}$, $\vec{B}$ с перестановочными соотношениями

$$[l_{a_i}, A_j] = i \sum_k \varepsilon_{ijk} A_k \quad ; \quad [l_{b_i}, A_j] = 0 \qquad /6а/$$

$$i, j, k = x, y, z$$

$$[l_{a_i}, B_j] = 0 \quad ; \quad [l_{b_i}, B_j] = i \sum_k \varepsilon_{ijk} B_k \qquad /6б/$$

$$\varepsilon_{xyz} = 1$$

то матричные элементы их скалярного произведения равны /см. например, [5/], формула /3.101//

$$\langle l_a + r, l_b + s, l'_{ab}, M' | \vec{A} \cdot \vec{B} | l_a, l_b, l_{ab}, M \rangle =$$

$$= \langle l_a + r \vdots A \vdots l_a \rangle \langle l_b + s \vdots B \vdots l_b \rangle \chi^{rs} \delta_{l'_{ab} l_{ab}} \delta_{M'M} , \qquad /7/$$

где χ^{rs} - численные коэффициенты, приведенные в таблице 1. Символ $\langle l_a + r \vdots A \vdots l_a \rangle$ определяется соотношениями

$$\langle l_a + 1 \vdots A \vdots l_a \rangle = \frac{1}{\sqrt{(l_a+1)^2 - m_a^2}} \langle l_a + 1, m_a | A_z | l_a, m_a \rangle$$

$$\langle l_a \vdots A \vdots l_a \rangle = \frac{1}{m_a} \langle l_a, m_a | A_z | l_a, m_a \rangle \qquad /8/$$

$$\langle l_a - 1 \vdots A \vdots l_a \rangle = \frac{1}{\sqrt{l_a^2 - m_a^2}} \langle l_a - 1, m_a | A_z | l_a, m_a \rangle .$$

3/ Угловые операторы $\mathcal{J}$ - скаляры относительно одновременных вращений <u>всех</u> орбитальных и спиновых динамических переменных процесса.

Т а б л и ц а   1

$$\chi^{11} = -\frac{1}{2}\sqrt{(l_a+l_b+l+3)(l_a+l_b+l+2)(l_a+l_b+2-l)(l_a+l_b+1-l)}$$

$$\chi^{10} = -\frac{1}{2}\sqrt{(l+l_a-l_b+1)(l+l_b-l_a)(l+l_a+l_b+2)(l_a+l_b-l+1)}$$

$$\chi^{1-1} = \frac{1}{2}\sqrt{(l+l_a-l_b+1)(l+l_a-l_b+2)(l-l_a+l_b-1)(l-l_a+l_b)}$$

$$\chi^{0-1} = \frac{1}{2}\sqrt{(l-l_a+l_b)(l+l_a-l_b+1)(l+l_a+l_b+1)(l_a+l_b-l)}$$

$$\chi^{-1-1} = -\frac{1}{2}\sqrt{(l_a+l_b+l+1)(l_a+l_b-l)(l_a+l_b-l)(l_a+l_b-l-1)}$$

свойства симметрии : $\chi^{rs}(l_a, l_b, l) = (-1)^{r+s}\,\chi^{sr}(l_b, l_a, l)$.

Аналогичные соотношения имеют место для $\langle l_b+s \,\vdots\, B \,\vdots\, l_b \rangle$.

Для увеличения или уменьшения l_a и l_b нам нужны такие операторы Ω^{rs}, матричные элементы которых все равны нулю, за исключением того, у которого слева стоит $\langle l_a+r, l_b+s, l_{ab}\, m |$ и справа $| l_a l_b l_{ab}\, m \rangle$. Мы запишем их в виде скалярного произведения двух векторов A^r, B^s типа /6/, которые согласно теореме Джонсона должны иметь вид

$$\langle l_a + r' \,\vdots\, A^{(r)} \,\vdots\, l_a \rangle = \langle l_a + r \,\vdots\, A^{(r)} \,\vdots\, l_a \rangle\, \delta_{rr'} \qquad /9а/$$

$$\langle l_b + s' \,\vdots\, B^{(s)} \,\vdots\, l_b \rangle = \langle l_b + s \,\vdots\, B^{(s)} \,\vdots\, l_b \rangle\, \delta_{ss'}\,. \qquad /9б/$$

Тогда матричные элементы $(\vec{A}^{(r)} \cdot \vec{B}^{(s)})$ будут согласно /7/

$$\langle l_a+r' \; l_b+s' \; l'_{ab} M' | \vec{A}^{(r)} \cdot \vec{B}^{(s)} | l_a l_b l_{ab} M \rangle = \qquad /10/$$

$$= \langle l_a + r \,\vdots\, A^{(r)} \,\vdots\, l_a \rangle \langle l_b + s \,\vdots\, B^{(s)} \,\vdots\, l_b \rangle \chi^{rs} \delta_{rr'} \delta_{ss'} \delta_{l'_{ab} l_{ab}} \delta_{M'M} .$$

Следовательно, операторы

$$\Omega^{rs}(l_a l_b l_{ab}) = \frac{1}{\chi^{rs}} \; \frac{\vec{A}^r \cdot \vec{B}^s}{\langle l_a + r \,\vdots\, A^r \,\vdots\, l_a \rangle \langle l_b + s \,\vdots\, B^s \,\vdots\, l_b \rangle} \qquad /11/$$

обладают требуемыми свойствами /см. /5/, /5'// :

$$\Omega^{rs}(l_a l_b l_{ab}) \Upsilon^{l_a l_b}_{l_{ab} M} = \Upsilon^{l_a + r,\, l_b + s}_{l_{ab}} ,$$

то есть

$$\Omega^{rs}(l_a l_b l_{ab}) \mathcal{J}(\ldots l_a, l_b, l_{ab} \ldots) = \mathcal{J}(\ldots l_a + r, l_b + s, l_{ab} \ldots), \qquad /12/$$

причем

$$r, s = 1, 0, -1 .$$

Для того, чтобы формулы /12/ и /11/ имели практический смысл, необходимо найти явный вид векторов A^r и B^s, обладающих свойствами /6аб/ и /9аб/. Этому посвящены разделы 2 и 3.

Наконец, сделаем два замечания. Во-первых, если формулу /12/ применить повторно, можно l_a и l_b увеличить или уменьшить на любые величины:

$$\Omega^{r_m s_m}\Big(l_a + \sum_{k=1}^{m-1} r_k ,\; l_b + \sum_{k=1}^{m-1} s_k ,\; l_{ab}\Big) \ldots \Omega^{r_1 s_1}(l_a l_b l_{ab}) \mathcal{J}(\ldots l_a l_b l_{ab} \ldots) = \qquad /13/$$

$$= \mathcal{J}\Big(\ldots l_a + \sum_{k=1}^{m} r_k ,\; l_b + \sum_{k=1}^{m} s_k ,\; l_{ab} \ldots\Big) .$$

Во -вторых , если $\vec{l}_a$ и $\vec{l}_b$ -переменяые начального состояния, то ψ , φ и Υ представляют собой бра-векторы, и при выводе /12/ следует соответствующие формулы заменить эрмитово-сопряженными. Тогда вместо /12/ будем иметь

$$\mathcal{J}(\ldots l_a l_b l_{ab} \ldots)\left(\Omega^{rs}(l_a l_b l_{ab})\right)^+ = \mathcal{J}(\ldots l_a + r, l_b + s, l_{ab} \ldots) \qquad /12'/$$

и, аналогично, вместо /13/ -

$$\mathcal{J}(\ldots l_a l_b l_{ab} \ldots)\left(\Omega^{r_1 s_1}(l_a l_b l_{ab})\right)^+ \ldots \left(\Omega^{r_n s_n}\left(l_a + \sum_{k=1}^{n-1} r_k, l_b + \sum_{k=1}^{n-1} s_k, l_{ab}\right)\right)^+ = \qquad /13'/$$

$$= \mathcal{J}\left(\ldots l_a + \sum_{k=1}^{n} r_k, l_b + \sum_{k=1}^{n} s_k, l_{ab} \ldots\right).$$

§ 2. Явный вид векторов $\vec{A}^r$ в случае орбитального момента или целого спина

Явный вид векторов $\vec{A}^r$ зависит от того, является ли момент $\vec{l}_a$ суммой двух /или нескольких/ моментов или нет. Поэтому случай, когда $\vec{l}_a = \vec{l}_{a_1} + \vec{l}_{a_2}$ рассмотрим в следующем разделе[4/].

В настоящем разделе мы предположим, что собственная функция $\psi_{l_a m_a}$ равна шаровой функции:

$$\psi_{l_a m_a} = Y_{l_a m_a}(\vec{p}).$$

Если $\vec{l}_a$ - орбитальный момент, то $\vec{p}$ будет единичный импульс, $\vec{p} = \frac{\vec{P}}{P}$; если же $\vec{l}_a$ означает целый спин, то $\vec{p}$ будет спиновая переменная $\vec{\alpha}$. В обоих случаях имеет место соотношение

$$\vec{l}_a = -i\left[\vec{p}\,\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right].$$

4/ Все формулы 2-го и 3-го разделов получены только для векторов $\vec{A}^r$. Соответствующие формулы для $\vec{B}^s$ получаются тривиальными заменами $\vec{A} \to \vec{B}$, $r \to s$, $\vec{l}_a \to \vec{l}_b$, $l_a \to l_b$, $m_a \to m_b$, $\psi \to \varphi$.

Для нахождения операторов $\vec{A}^{r}$ в данном случае целесообразно применить, так называемую, градиентную формулу (см., например, [6], формула /2.58/ или [7], формула /5.8.17/):

$$\frac{\partial}{\partial \vec{P}} \phi(P) Y_{lm}(\vec{p}) = -\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}\left(\frac{d\phi}{dP} - \frac{l}{P}\phi\right)\vec{T}^{l+1}_{lm} + \sqrt{\frac{l}{2l+1}}\left(\frac{d\phi}{dP} + \frac{l+1}{P}\phi\right)\vec{T}^{l-1}_{lm} \qquad /14/$$

причем[5/]

$$\vec{T}^{l\pm 1}_{lm} = \sum_{\mu} C^{l\pm 1\ m-\mu\ 1\mu}_{lm}\ Y_{l\pm 1, m-\mu}(\vec{p})\vec{\xi}_{\mu} \qquad /14a/$$

и $\quad \xi_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y\right), \quad \vec{\xi}_0 = \vec{e}_z,$

где $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ и $\vec{e}_z$ образуют декартову систему единичных векторов. Если подставить в /14/ за $\phi(P)$ функцию P^{l} или P^{-l-1}, то исчезнет первый или второй член справа, соответственно. Имея еще в виду общеизвестное соотношение

$$l_z Y_{lm}(\vec{p}) = m Y_{lm}(\vec{p}), \qquad /14'/$$

мы приходим к заключению, что из матричных элементов векторов

$$\vec{\nabla}^{+1} = P^{l+2}\frac{\partial}{\partial \vec{P}} P^{-l-1} \qquad /15a/$$

$$\vec{\nabla}^{0} = \vec{l} = -i\left[\vec{P}\frac{\partial}{\partial \vec{P}}\right] \qquad /15в/$$

$$\vec{\nabla}^{-1} = P^{-l+1}\frac{\partial}{\partial \vec{P}} P^{l} \qquad /15c/$$

отличны от нуля только те, которые соответствуют переходу от l к $l+1$, l и $l-1$ соответственно. Таким образом, векторы /15/ обладают свой-

5/ Здесь и в дальнейшем опускаем индекс a у l_a, m_a и т.д.

ством /9/. Кроме того можно убедиться прямым вычислением, что они удовлетворяют перестановочным соотношениям /6/. Из /14/, /14'/ и /8/ следует тоже, что

$$\langle l+1 \vdots \nabla^{+1} \vdots l \rangle = -\sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} \qquad /16a/$$

$$\langle l \vdots \nabla^{0} \vdots l \rangle = 1 \qquad /16в/$$

$$\langle l-1 \vdots \nabla^{-1} \vdots l \rangle = \sqrt{\frac{2l+1}{2l-1}} \,. \qquad /16c/$$

§ 3. Явный вид векторов $\vec{A}^{r}$ в случае суммарного момента

Предположим теперь, что функция ψ_{lm} является комбинацией двух или нескольких шаровых функций:

$$\Psi_{lm} = \sum C_{lm}^{l_1 \mu\, l_2\, m-\mu} \chi_{l_1 \mu}\, \varkappa_{l_2\, m-\mu}$$

/индекс a опять опускаем/. Это соответствует сложению моментов $\vec{l} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$. Если теперь подействуем на ψ_{lm} векторным оператором l_{1i} $(i = x, y, z)$, то согласно общей теории /см. [5] / получим смесь состояний ψ_{l+1}, ψ_l и ψ_{l-1}. Затем достаточно применить произведения проекционных операторов

$$P_0 = \vec{l}^{\,2} - l(l+1)$$

$$P_+ = \vec{l}^{\,2} - l(l-1) \qquad /17/$$

$$P_- = \vec{l}^{\,2} - (l+1)(l+2)$$

чтобы получить чистые состояния ψ_{l+1}, ψ_l и ψ_{l-1}. Таким образом, легко видеть, что операторы $\vec{A}^{\pm 1}$ будут иметь вид

$$\vec{V}^{\pm 1} = P_\pm P_0 \vec{l}_1 .$$

Оператором $\vec{A}^0$ является, очевидно, полный момент:

$$\vec{V}^0 = \vec{l} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \qquad /15'в/$$

/см. /15в//.

Вычислим теперь $\vec{V}^{\pm 1}$ в явном виде, Имеем

$$P_\pm P_0 l_{1i} = P_\pm l_{1i} P_0 + P_\pm [\vec{l}^2 ; l_{1i}] \qquad i = x, y, z$$

Первый член, действуя на ψ_{lm}, очевидно, даст нуль. Второй член запишем в виде

$$[\vec{l}^2, l_{1i}] P_\pm + [\vec{l}^2, [\vec{l}^2, l_{1i}]] .$$

Действуя на ψ_{lm}; $P_\pm$ даст
$$P_+ = 2l$$
$$P_- = -2(l+1).$$

С помощью соотношений

$$[l_{1i}, l_{1j}] = i \sum_k \varepsilon_{ijk} l_{1k}$$

$$\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

можно доказать, что

$$[\vec{l}^2, l_{1i}] = 2i \, (l_1 \times l_2)_i$$

$$[\vec{l}^2, [\vec{l}^2, l_{1i}]] = 2 l_{1i} \Big(l(l+1) - l_1(l_1+1) + l_2(l_2+1) \Big) -$$

$$-2 l_{2i} \Big(l(l+1) + l_1(l_1+1) - l_2(l_2+1) \Big) + 4i \, (l_1 \times l_2)_i .$$

Таким образом, $\vec{V}^{\pm 1}$ имеют следующий вид:

$$\vec{V}^{\pm 1} = 2\vec{l}_1 \Big(l(l+1) - l_1(l+1) + l_2(l_2+1)\Big) - 2\vec{l}_2 \Big(l(l+1) + l_1(l_1+1) - l_2(l_2+1)\Big) + 4i\left(\pm l + \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\right)\left[\vec{l}_1 \times \vec{l}_2\right]. \qquad /15'ac/$$

Для вычисления матричных элементов

$$\langle l_1 l_2\, l+r' \vdots V^r \vdots l_1 l_2 l \rangle$$

применим формулу

$$\langle l_1 l_2\, l-1 \vdots l_1 \vdots l_1 l_2 l \rangle = \langle l_1 l_2 l \vdots l_1 \vdots l_1 l_2\, l-1 \rangle = -\langle l_1 l_2\, l-1 \vdots l_2 \vdots l_1 l_2 l \rangle =$$

$$= -\langle l_1 l_2 l \vdots l_2 \vdots l_1 l_2\, l-1 \rangle = \sqrt{\frac{(l-l_1+l_2)(l+l_1-l_2)(l_1+l_2+1+l)(l_1+l_2+1-l)}{4l^2(2l-1)(2l+1)}} \qquad /18/$$

/см. [5], формула /3.86а// и, кроме того, формулы

$$\langle l_1 l_2\, l+1 \vdots [\vec{l}_1 \times \vec{l}_2] \vdots l_1 l_2 l \rangle = -i(l+1)\langle l_1 l_2\, l+1 \vdots l_1 \vdots l_1 l_2 l \rangle$$

$$\langle l_1 l_2\, l-1 \vdots [\vec{l}_1 \times \vec{l}_2] \vdots l_1 l_2 l \rangle = il\langle l_1 l_2\, l-1 \vdots l_1 \vdots l_1 l_2 l \rangle, \qquad /18'/$$

которые выведены в Приложении. С их помощью найдем

$$\langle l_1 l_2\, l+1 \vdots V^1 \vdots l_1 l_2 l \rangle = 2\sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}}\sqrt{(l+1-l_1+l_2)(l+1+l_1-l_2)(l_1+l_2+l+2)(l_1+l_2-l)}$$

$$\langle l_1 l_2 l \vdots V^0 \vdots l_1 l_2 l \rangle = 1 \qquad /16'/$$

$$\langle l_1 l_2\, l-1 \vdots V^{-1} \vdots l_1 l_2 l \rangle = 2\sqrt{\frac{2l+1}{2l-1}}\sqrt{(l-l_1+l_2)(l+l_1-l_2)(l_1+l_2+1)(l_1+l_2+1-l)}.$$

Все остальные матричные элементы равны нулю, как и должно быть согласно формуле /θ/.

§ 4. Анализ результатов

1. Формула /11/ определяет оператор Ω^{rs} , с помощью которого можно, согласно /12/ и /13/, произвольно менять квантовые числа, характеризующие угловые операторы $\mathcal{J}$ данного процесса. Векторы $\vec{A}^r$ имеют вид или векторов $\vec{V}^r$ / формулы /15'// или векторов $\vec{\nabla}^r$ /формулы /15// в зависимости от того, можно ли соответствующий момент $\vec{\ell}_a$, квантовое число которого следует изменить, записать в виде суммы других двух моментов $\vec{\ell}_{a_1}$, $\vec{\ell}_{a_2}$, или нет. Таким образом, если известен один угловой оператор данного процесса, то с помощью операторов Ω^{rs} можно получить все остальные.

2. Как было уже сказано во введении, оператор Ω можно тоже использовать для перехода к более сложному процессу, содержащему на одну скалярную частицу больше, чем имеет исходный процесс /см.формулу (1)/. Это связано с тем, что шаровая функция Y_{00} равна постоянной $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, так что введение в процесс нового орбитального момента $\vec{\ell}$ с квантовым числом ℓ, равным нулю, сводится к умножению всего набора угловых операторов на $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$. Например

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{J}\left(a_1 + a_2 \longrightarrow \sum_1^m a_i'\right) = \mathcal{J}\left(a_1 + a_2 \longrightarrow \sum_1^m a_i' + s'\right),$$

где $\ell_{s'} = 0$.

Получив таким образом угловые операторы нового процесса для $\ell_{s'} = 0$ можно с помощью $\Omega^{10}(0, \ell, \ell)$ увеличить значение $\ell_{s'}$ до 1 и с помощью /13/ – до любого целого значения.

Возьмем, например, процесс $s_1 + s_2 \longrightarrow s_1' + s_2'$, характеризуемый следующими угловыми операторами

$$\mathcal{J}_\ell\left(s_1 + s_2 \longrightarrow s_1 + s_2\right) = \frac{2\ell+1}{4\pi} \mathcal{P}_\ell\left(\vec{p}\vec{q}\right) \qquad /19/$$

$$\ell = 0, 1, 2, \ldots$$

Умножив на $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, получим, очевидно,

$$\frac{2\ell+1}{(4\pi)^{3/2}} \mathcal{P}_\ell(\vec{p}\vec{q}) = \mathcal{J}_{0\ell}(s_1 + s_2 \to s_1' + s_2' + s_3') \qquad \ell_{s_3'} = 0, \quad \ell = 0,1,2\ldots$$

Согласно /11/ и /15/, оператор

$$\Omega^{1r}(0,\ell,\ell) = \frac{(\vec{\nabla}_R^{+1}\vec{\nabla}_Q^{r})}{\chi^{1r}\langle 1 \vdots \nabla_R^{+1} \vdots 0\rangle\langle \ell+r \vdots \nabla_Q^{r} \vdots \ell\rangle}$$

преобразует

$$\mathcal{J}_{0\ell}(s_1+s_2 \to s_1' + s_2' + s_3') \quad \text{с } \ell_{s_3'} = 0 \quad \text{в}$$

$$\Omega^{1r}(0,\ell,\ell)\,\mathcal{J}_{0\ell} = \mathcal{J}_{1,\ell+r,\ell}(s_1+s_2 \to s_1' + s_2' + s_3'),$$

причем

$$\nabla_R^{+1}(\ell_{s_3'} = 0) = R^2 \frac{\partial}{\partial R} R^{-1}.$$

Для удобства приведем следующие общие формулы, полезные при конкретных вычислениях:

$$\vec{\nabla}_R^{\,0}(\ell) f(\vec{p}\vec{r}) = -i\overrightarrow{\left[R\frac{\partial}{\partial R}\right]} f(\vec{p}\vec{r}) = i\overrightarrow{[pr]} f'$$

$$\vec{\nabla}_R^{+1}(\ell) f(\vec{p}\vec{r}) = R^{\ell+2}\frac{\partial}{\partial R} R^{-\ell-1} f(\vec{p}\vec{r}) = -(\ell+1)\vec{r} f + (\vec{p} - \vec{r}(\vec{p}\vec{r})) f' \qquad /20/$$

$$\vec{\nabla}_R^{-1}(\ell) f(\vec{p}\vec{r}) = R^{-\ell+1}\frac{\partial}{\partial R} R^{\ell} f(\vec{p}\vec{r}) = \ell\vec{r} f + (\vec{p} - \vec{r}(\vec{p}\vec{r})) f'$$

и заметим, что действие ∇_l^{+1} при $l = 0$ сводится к умножению на $-\vec{r}$. С помощью этих формул получим, наконец,

$$\mathcal{Y}_{1,l+1,l} = \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \frac{\sqrt{3}\sqrt{2l+1}}{\sqrt{l+1}} \left(-(l+1)(\vec{p}\vec{r})\,\mathcal{P}_l + \left((\vec{p}\vec{r}) - (\vec{q}\vec{r})(\vec{p}\vec{q})\right)\mathcal{P}_l'\right)$$

$$\mathcal{Y}_{1,l,l} = -\frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \frac{i\,(2l+1)\sqrt{3}}{\sqrt{l\,(l+1)}}\; \vec{r}\,[\vec{p}\vec{q}]\,\mathcal{P}_l' \qquad /21/$$

$$\mathcal{Y}_{1,l-1,l} = \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \frac{\sqrt{3}\sqrt{2l+1}}{\sqrt{l}} \left(l\,(\vec{p}\vec{r})\,\mathcal{P}_l + \left((\vec{p}\vec{r}) - (\vec{q}\vec{r})(\vec{p}\vec{q})\right)\mathcal{P}_l'\right),$$

где $\mathcal{P}_l$ зависит от $(\vec{p}\,\vec{q})$.

Продолжая дальше, можно получить $\mathcal{Y}_{l_{s_3},\,l',\,l}$ для $l_{s_3} = 2, 3 \ldots$ и т.д., например,

$$\mathcal{Y}_{2,l,l} = -\frac{\sqrt{5}}{(4\pi)^{3/2}} \frac{2l+1}{\sqrt{l(l+1)(2l-1)(2l+3)}} \left\{ l(l+1)\mathcal{P}_l - 3\left((\vec{p}\vec{q}) - (\vec{p}\vec{r})(\vec{q}\vec{r})\right)\mathcal{P}_l' - 3\left(\vec{r}\,[\vec{p}\vec{q}]\right)^2 \mathcal{P}_l'' \right\}.$$

3. Введение целого спина может быть проведено аналогичным образом. При этом можно использовать все полученные только что результаты, если в них провести формальную замену

$$Y_{1m}(r) \longrightarrow \vec{\xi}_{1m}$$

или, что эквивалентно,

$$r_i \longrightarrow \vec{e}_i \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{3}}. \qquad /22/$$

$$i = x, y, z$$

Таким путем получим угловые операторы процессов типа

$$S_1 + S_2 \longrightarrow S_1' + v_2',$$

где v_2' - векторная частица.

Например, согласно /21/

$$\vec{\mathcal{Y}}_{ll} = -\frac{1}{(4\pi)} \frac{i\,(2l+1)}{\sqrt{l\,(l+1)}} \overrightarrow{[pq]}\, \mathcal{P}_l', \qquad /21'/$$

где
$$\overrightarrow{[pq]} = [pq]_x \vec{e}_x + [pq]_y \vec{e}_y + [pq]_z \vec{e}_z = \varepsilon^{ijk} \vec{e}_i \, p_j \, q_k .$$

Аналогично можно получить угловые операторы для $s_1 + s_2 \longrightarrow s_1' + t'$ где t' -тензорная частица, и т. д.

Заметим наконец, что если нас интересует только случай спина 1, то можно получить угловые операторы более простым способом, причем основная формула /7/ не нужна. С помощью /14/ и формулы

$$\vec{l}\, Y_l^m = \sqrt{l(l+1)}\; \vec{T}^{\,l}_{lm}$$

/см. [7] , /5.9.14/ / можно легко вывести следующие соотношения:

$$\frac{1}{\sqrt{(l+1)(2l+1)}}\, \vec{\nabla}^{+1} Y_l^m = \vec{T}^{\,l+1}_{l,m}$$

$$\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\, \vec{\nabla}^{0} Y_l^m = \vec{T}^{\,l}_{lm} \qquad /23/$$

$$\frac{1}{\sqrt{l(2l+1)}}\, \vec{\nabla}^{-1} Y_l^m = \vec{T}^{\,l-1}_{lm} .$$

Отсюда видно, что действие стоящих слева операторов приводит к замене функции Y_l^m на шаровой вектор $\vec{T}^{\,l+1}_{lm}$ в угловом операторе, т.е. к замене спина 0 на спин 1 у соответствующей частицы.

Например, пользуясь соотношениями /20/ , можно из /19/ получить угловые операторы для

$$\frac{1}{\sqrt{(l+1)(2l+1)}}\, \vec{\nabla}^{+1}_Q \left(\frac{2l+1}{4\pi}\, \mathcal{P}_l(\vec{p}\vec{q})\right) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{2l+1}{l+1}}\left(-(l+1)\vec{p}\,\mathcal{P}_l + \left(\vec{p} - \vec{q}\,(\vec{p}\vec{q})\right)\mathcal{P}_l'\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\, \vec{\nabla}^{0}_Q \left(\frac{2l+1}{4\pi}\, \mathcal{P}_l(\vec{p}\vec{q})\right) = i\,\frac{1}{4\pi}\,\frac{2l+1}{\sqrt{l(l+1)}}\, \overrightarrow{[pq]}\, \mathcal{P}_l' \qquad /21''/$$

$$\frac{1}{\sqrt{\ell(2\ell+1)}}\,\vec{\nabla}_Q^{-1}\left(\frac{2\ell+1}{4\pi}\,\mathcal{P}_\ell(\vec{p}\vec{q})\right)=\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{2\ell+1}{\ell}}\left(\ell\vec{p}\,\mathcal{P}_\ell+\left(\vec{p}-\vec{q}(\vec{p}\vec{q})\right)\mathcal{P}_\ell'\right).$$

Если провести соответствующие замены /22/, эти формулы совпадут с /21/[6/].

Если спин 1 складывается с суммой двух или нескольких моментов количества движения, нужно операторы в левых частях /23/ определить с помощью векторов $\vec{V}$ /см. /15'авс//. Здесь, однако, этот способ не ведет к большим упрощениям, и поэтому мы его приводить не будем. Всегда можно применить обычный метод с помощью операторов Ω .

§ 5. Примеры

Покажем на несколвких примерах, как можно с помощью описанного метода получить из операторов реакпии

$$s+N \rightarrow s'+N' \qquad /24/$$

угловые операторы реакпии

$$s+N \rightarrow s_1+s_2+N',$$

которые приведены в таблицах I, II и III статьи [3] . Как известно, угловые операторы процесса /24/ имеют вид[7/]

$$\frac{1}{4\pi}\left\{(\ell'+1)\,\mathcal{P}_{\ell'}+i\,\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_Y\,\mathcal{P}_{\ell'}'\right\} \quad \text{для} \quad j'=\ell'+\tfrac{1}{2}=\ell+\tfrac{1}{2}=j \qquad /25.1/$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{-(\ell'+1)\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\mathcal{P}_{\ell'}+\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_x\,\mathcal{P}_{\ell'}'\right\} \quad \text{для} \quad j'=\ell'+\tfrac{1}{2}=\ell-\tfrac{1}{2}=j \qquad /25.2/$$

6/ Первый и третий угловые операторы совпадают точно, второй-с точностью до знака. Это связано с выбором фазы при определении $\vec{T}$ в (14а). Если при вычислении /21/ применить Ω^{r1} вместо Ω^{1r}, то знаки /21/ и /21"/ совпадут.

7/ В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями, введенными в [3] и использованными тоже в 5-м разделе статьи [1]. В частности напомним, что $\vec{P}_Y=[\vec{p}\times\vec{r}]$, $\vec{P}_x=\vec{r}-\vec{p}(\vec{p}\cdot\vec{r})$.

$$\frac{1}{4\pi}\left\{-\ell'\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\mathcal{P}_{\ell'}-\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_x\,\mathcal{P}'_{\ell'}\right\} \quad \text{для} \quad j'=\ell'-\tfrac{1}{2}=\ell+\tfrac{1}{2}=j \qquad /25.3/$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\ell'\mathcal{P}_{\ell'}-i\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_y\,\mathcal{P}'_{\ell'}\right\} \quad \text{для} \quad j'=\ell'-\tfrac{1}{2}=\ell-\tfrac{1}{2}=j_1 \qquad /25.4/$$

где ℓ' есть орбитальный момент конечного состояния, и полиномы Лежандра $\mathcal{P}_{\ell'}$ зависят от $\vec{p}\cdot\vec{r}=\cos\vartheta$. Заметим, что s, s', s_1 и s_2 есть частицы со спином нуль без определенной четности; если четность s и s' одинакова $(s, s'=\pi)$, то разрешен только первый и четвертый каналы.

1. Четыре угловых оператора таблицы 1 в [3] , соответствующие квантовым числам $\ell_1=0$, $\ell_2=\ell'$, можно получить из /25.1/ –/25.4/ путем умножения на $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$:

$$(\mathrm{I}\,1)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}(25.1)\ ,\quad (\mathrm{I}\,2)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}(25.2) \qquad \text{и т.д.} \qquad /26/$$

2. Двенадцать угловых операторов /II I/ - /II I2/ таблицы II в [3] можно получить из /I I/–/I 4/, согласно формуле /12/ настоящей статьи, с помощью следующих соотношений:

$$\Omega^{1,-1}(\ell_1=0,\ell_2+1,L=\ell=\ell_2+1)\frac{1}{(4\pi)^{1/2}}\left\{(\ell_2+2)\mathcal{P}_{\ell_2+1}+i\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_y\,\mathcal{P}'_{\ell_2+1}\right\}=(\mathrm{II}\,1)$$

$$\Omega^{10}(\ell_1=0,\ell_2,L=\ell=\ell_2)\frac{1}{(4\pi)^{1/2}}\left\{(\ell_2+1)\mathcal{P}_{\ell_2}+i\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_y\,\mathcal{P}'_{\ell_2}\right\}=(\mathrm{II}\,5)$$

$$\Omega^{11}(\ell_1=0,\ell_2-1,L=\ell=\ell_2-1)\quad(\mathrm{I}\,1)_{\ell_2\to\ell_2-1}=(\mathrm{II}\,9) \qquad /27/$$

$$\Omega^{1,-1}(\ell_1=0,\ell_2+1,L=\ell_2+1)\,(\mathrm{I}\,2;3;4)_{\ell_2\to\ell_2+1}=(\mathrm{II}\,2;3;4)$$

$$\Omega^{10}(\ell_1=0,\ell_2,L=\ell_2)\,(\mathrm{I}\,2;3;4)=(\mathrm{II}\,6;7;8)$$

$$\Omega^{11}(\ell_1=0,\ell_2-1,L=\ell_2-1)\,(\mathrm{I}\,2;3;4)_{\ell_2\to\ell_2-1}=(\mathrm{II}\,10;11;12).$$

Символ $/\mathrm{I}\ 1/_{l_2 \to l_2 - 1}$ означает, что в $/\mathrm{I}\ 1/$ нужно подставить значение $l_2 - 1$ вместо l_2, т.е.

$$(\mathrm{I}\,1)_{l_2 \to l_2 - 1} = \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \left\{ l_2 \mathcal{P}_{l_2-1} + i\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_y\, \mathcal{P}'_{l_2-1} \right\}.$$

Заметим, что в частном случае реакции $\pi N \to \pi\pi N$ существуют, из-за сохранения четности, только угловые операторы /I2; 3;4/и /II 2;3;5; 8; 10;11/.

В качестве примера проверим соотношение

$$\Omega^{10}(l_1 = 0, l_2, L = l + 1 = l_2)\ /\mathrm{I}\ 3/ = /\mathrm{II}\ 7/,$$

причем

$$\Omega^{10} = \frac{\vec{\nabla}^1_Q \cdot \vec{\nabla}^0_R}{\chi^{10}\langle 1 \vdots \nabla^1 \vdots 0\rangle\langle l_2 \vdots \nabla^0 \vdots l_2\rangle} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{l_2(l_2+1)}}\ \vec{\nabla}^1_Q \cdot \vec{\nabla}^0_R$$

/см. /16/ и таб. 1/. Запишем /I 3/ в виде

$$\frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \left\{ -l_2 \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\, \mathcal{P}_{l_2} - \vec{w}\cdot\vec{r}\, \mathcal{P}'_{l_2} \right\},$$

где $\vec{w} = \vec{\sigma} - (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\vec{p}$, и $\mathcal{P}_{l_2}$ зависит от $\vec{p}\cdot\vec{r}$. С помощью /20/ получим

$$\vec{\nabla}^0_R \left\{ -l_2 \vec{\sigma}\vec{p}\, \mathcal{P}_{l_2} - \vec{w}\cdot\vec{r}\, \mathcal{P}'_{l_2} \right\} = -i l_2 [\vec{p}\,\vec{r}](\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\, \mathcal{P}'_{l_2} - i[\vec{w}\,\vec{r}]\, \mathcal{P}'_{l_2} - i(\vec{w}\cdot\vec{r})[\vec{p}\,\vec{r}]\, \mathcal{P}''_{l_2} =$$

$$= -i(l_2 - 1)\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\ \vec{P}_y\, \mathcal{P}'_{l_2} - i[\vec{\sigma}\,\vec{r}]\, \mathcal{P}'_{l_2} - i\vec{P}_y\ \vec{\sigma}\cdot\vec{P}_x\, \mathcal{P}''_{l_2}.$$

Действие оператора $\vec{\nabla}^1_Q$ сводится, как и раньше /см.текст под /20//, к умножению на $-\vec{q}$. Таким образом, получим

$$\Omega^{10}(\mathrm{I}3) = \frac{-i\sqrt{3}}{(4\pi)^{3/2}\sqrt{l_2(l_2+1)}} \left\{ (l_2 - 1)\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\ \vec{P}_y\cdot\vec{q}\ \mathcal{P}'_{l_2} - \vec{\sigma}[\vec{q}\,\vec{r}]\, \mathcal{P}'_{l_2} + \vec{P}_y\cdot\vec{q}\ \vec{\sigma}\cdot\vec{P}_x\ \mathcal{P}''_{l_2} \right\},$$

что и совпадает с оператором /II 7/.

Заметим, что с угловыми операторами /I3/ и /II 7/ можно сопоставить диаграммы, которые наглядно показывают связь моментов количества движения /см.рис.1/. Моменты начального состояния стоят справа, конечного - слева. Каждому моменту соответствует одна линия, причем спин 1/2 обозначен стрелкой. Из диаграмм также видно, как действуют операторы Ω.

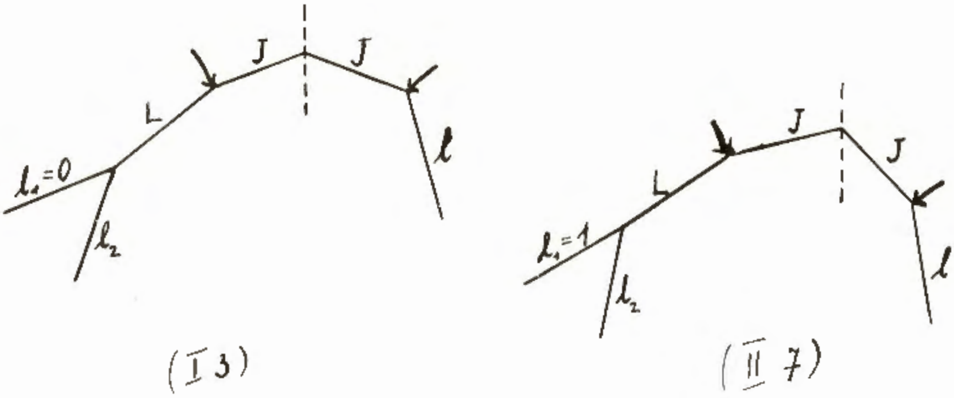

Рис. 1

3. Четыре первых угловых оператора / III 1; 2; 3; 4/ таблицы [11] в [3] можно получить из /I 1; 2; 3; 4/ следующим образом:

$$\Omega^{10}\left(l_1=0,\ \tfrac{1}{2},\ j=\tfrac{1}{2}\right)\left(\mathrm{I}\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\right) = \left(\mathrm{III}\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\right), \qquad /28/$$

где[8/]

$$\Omega^{10} = \frac{\vec{\nabla}^{1}_{Q}\cdot\vec{\nabla}^{0}_{\sigma}}{\chi^{10}\langle 1 \vdots \nabla^{1} \vdots 0\rangle\langle \tfrac{1}{2} \vdots \nabla^{0} \vdots \tfrac{1}{2}\rangle} = \frac{(-\vec{q})\cdot(\tfrac{1}{2}\vec{\sigma})}{-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = -\vec{\sigma}\cdot\vec{q}$$

/см.рис.2/.

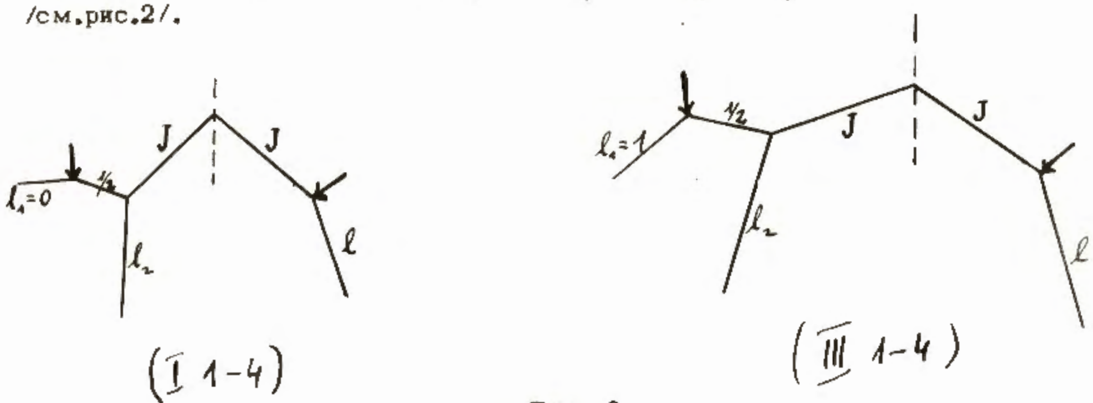

Рис. 2.

8/ Результаты § 2 верны для орбитального момента и целого спина, но аналогичное соотношению /15в/ соотношение $\vec{\nabla}^{0} = \tfrac{1}{2}\vec{\sigma}$ тоже верно, так как оно вытекает из уравнения $\tfrac{1}{2}\sigma_z\chi_{1/2\,\mu} = \mu\,\chi_{1/2\,\mu}$ /см. /14'//. Аналогично следует также

$$\langle \tfrac{1}{2} \vdots \tfrac{1}{2}\sigma \vdots \tfrac{1}{2}\rangle = 1 \qquad \text{/см. /16в//.}$$

Проверим, например, второе из соотношений /28/. Имеем

$$-\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\,(\mathrm{I}\,2) = \frac{1}{(4\pi)^{3/4}}\left\{(l_2+1)\,\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\;\mathcal{P}_{l_2} - \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_x\;\mathcal{P}'_{l_2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{3/4}}\left\{(l_2+1)\left(\vec{p}\cdot\vec{q} - i\vec{\sigma}[\vec{p}\vec{q}]\right)\mathcal{P}_{l_2} - \left(\vec{P}_x\cdot\vec{q} - i\vec{\sigma}\cdot[\vec{P}_x\vec{q}]\right)\mathcal{P}'_{l_2}\right\} = (\overline{\underline{\mathrm{III}}}\;2).$$

4. Восемь угловых операторов / $\overline{\underline{\mathrm{III}}}$ 5-12/ можно получить из ($\overline{\underline{\mathrm{III}}}$ 1-4) с помощью следующих соотношений:

$$\Omega^{1,-1}\left(j=\tfrac{1}{2},\,l_2,\,l_2+\tfrac{1}{2}\right)(\overline{\underline{\mathrm{III}}}\;1;2) = (\overline{\underline{\mathrm{III}}}\;5;6)_{l_2\to l_2-1}$$

$$\Omega^{10}\left(j=\tfrac{1}{2},\,l_2,\,l_2+\tfrac{1}{2}\right)(\overline{\underline{\mathrm{III}}}\;1;2) = (\overline{\underline{\mathrm{III}}}\;7;8)$$

/29/

$$\Omega^{10}\left(j=\tfrac{1}{2},\,l_2,\,l_2-\tfrac{1}{2}\right)(\overline{\underline{\mathrm{III}}}\;3;4) = (\overline{\underline{\mathrm{III}}}\;9;10)$$

$$\Omega^{11}\left(j=\tfrac{1}{2},\,l_2,\,l_2-\tfrac{1}{2}\right)(\overline{\underline{\mathrm{III}}}\;3;4) = (\overline{\underline{\mathrm{III}}}\;11;12)_{l_2\to l_2+1}$$

/см. рис.3/.

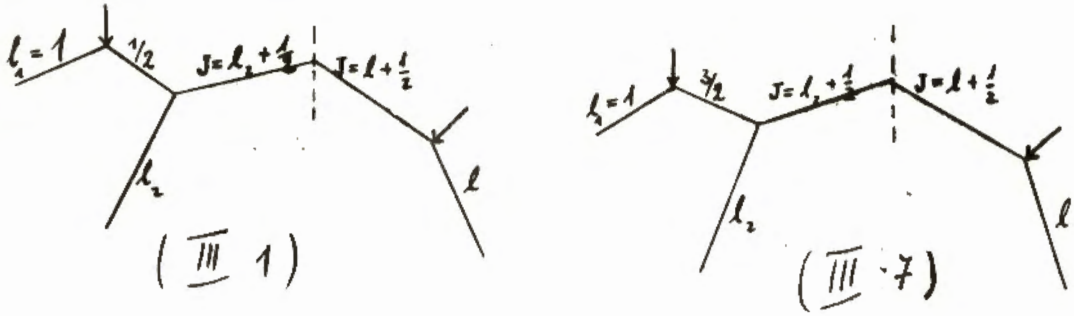

Рис. 3.

В качестве примера вычислим угловой оператор /III 7/ с помощью /III 1/. Имеем

$$\Omega^{10} = \frac{\vec{V}^{1}_{j} \cdot \vec{\nabla}^{0}_{\ell_2}}{\chi^{10}\langle \tfrac{3}{2} \vdots V^{1} \vdots \tfrac{1}{2}\rangle \langle \ell_2 \vdots \vec{\nabla}^{0} \vdots \ell_2\rangle} = -\frac{1}{4\sqrt{\ell_2(2\ell_2+3)}}\; \vec{V}^{1}_{j} \cdot \vec{\nabla}^{0}_{\ell_2},$$

где $\vec{V}^{1}_{j}$ и $\vec{\nabla}^{0}_{\ell_2}$ равны, согласно /15'а/ и /15в/, следующим выражениям

$$\vec{V}^{1}_{j} = -\vec{\ell}_1 - 2\vec{\sigma} - 3i[\vec{\sigma}\,\vec{\ell}_1]$$

$$\vec{\nabla}^{0}_{\ell_2} = \vec{\ell}_2 = -i\left[\vec{R}\,\frac{\partial}{\partial\vec{R}}\right] \qquad \text{где} \quad \vec{\ell}_1 = -i\left[\vec{Q}\,\frac{\partial}{\partial\vec{Q}}\right].$$

Запишем /III 1/ в виде произведения двух выражений,

$$-\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{q})\left\{(\ell_2+1)\,\mathcal{P}_{\ell_2} + i[\vec{\sigma}\,\vec{p}]\cdot\vec{r}\;\mathcal{P}'_{\ell_2}\right\},$$

из которых первое, $\vec{\sigma}\cdot\vec{q}$, не зависит от $\vec{R}$, а второе, стоящее в фигурных скобках, не зависит от $\vec{Q}$. Поэтому оператор $\vec{V}^{1}_{j}$ действует только на $\vec{\sigma}\cdot\vec{q}$, а оператор $\vec{\nabla}^{0}_{\ell_2}$ –только на выражение в фигурных скобках:

$$\vec{V}^{1}_{j}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{q} = -4\left(2\vec{q} - i[\vec{\sigma}\,\vec{q}]\right)$$

$$\vec{\nabla}^{0}_{\ell_2}\{\dots\} = i(\ell_2+1)\,\vec{P}_{y}\,\mathcal{P}'_{\ell_2} - \left[[\vec{\sigma}\,\vec{p}]\,\vec{r}\right]\mathcal{P}'_{\ell_2} - (\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_{y})\,\vec{P}_{y}\,\mathcal{P}''_{\ell_2} =$$

$$= \left(i(\ell_2+1)\,\vec{P}_{y} - \vec{p}\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{r}) + \vec{\sigma}\,(\vec{p}\cdot\vec{r})\right)\mathcal{P}'_{\ell_2} - \vec{P}_{y}\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_{y})\,\mathcal{P}''_{\ell_2}.$$

Собирая результаты отдельных вычислений, получим

$$\Omega^{10}(\overline{III}\;1) =$$

$$= -\frac{1}{(4\pi)^{3/2}\sqrt{\ell_2(2\ell_2+3)}}\Big[\Big(i(2\ell_2+3)\,\vec{P}_{y}\cdot\vec{q} - (\ell_2+3)\,\vec{\sigma}\cdot\vec{r}\;\vec{p}\cdot\vec{q} + \qquad /30/$$

$$+\ell_2\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\;\vec{r}\cdot\vec{q} + \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\;\vec{p}\cdot\vec{r}\Big)\mathcal{P}'_{\ell_2} - \Big(3\,\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_{y}\;\vec{P}_{y}\cdot\vec{q} + \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\,((\vec{p}\cdot\vec{r})^2 - 1)\Big)\mathcal{P}''_{\ell_2}\Big].$$

Заметим, что угловой оператор /III 7/ удалось получить в более простой форме, чем он записан в [3], таблица III.

Из приведенных примеров видно, что предложенный метод вычисления угловых операторов проще обычно используемых алгебраических методов. В частности, он проще чем метод, приведенный в [3], и, кроме того, он имеет общую применимость.

Доказательство равенства полученного выражения /30/ и выражения /III 7/ в таблице III статьи [3] более сложно, чем само вычисление оператора /30/, так как в [3] угловой оператор приведен в громоздком виде. Для сравнения обоих выражений необходимо в /III 7/ вектор $\vec{P}_\kappa$ записать как $\vec{r}-\vec{p}\,(\vec{p}\cdot\vec{r})$ и, упростив полученный результат, применить следующую формулу для полиномов Лежандра:

$$(x^2-1)\,P_l''(x) + 2x\,P_l'(x) = l(l+1)\,P_l(x).$$

Приложение

Докажем соотношения /18'/. Выражение

$$\langle l_1 l_2\, l+1 \,\vdots\, [\vec{l}_1 \times \vec{l}_2] \,\vdots\, l_1 l_2\, l \rangle \qquad /A.1/$$

можно определить следующим соотношением

$$\langle l_1, l_2, l+1, m \,|\, [\vec{l}_1 \times \vec{l}_2]_x \,|\, l_1, l_2, l, m+1 \rangle =$$

$$= \langle l_1 l_2\, l+1 \,\vdots\, [\vec{l}_1 \times \vec{l}_2] \,\vdots\, l_1 l_2\, l \rangle\, \frac{i}{2} \sqrt{(l+1-m)(l-m)} \qquad /A.2/$$

/см. [5], формула /3.83//. Это дальше равно[9]

$$\sum_{l',m'} \langle l+1\, m \,|\, l_{1y} \,|\, l' m' \rangle \langle l' m' \,|\, l_{2z} \,|\, l\, m+1 \rangle -$$

$$- \sum_{l',m'} \langle l+1\, m \,|\, l_{1z} \,|\, l' m' \rangle \langle l' m' \,|\, l_{2y} \,|\, l\, m+1 \rangle .$$

В первом члене l' принимает значения $l, l+1$ и m' – только $m+1$, а во втором $l' = l, l+1$ и $m' = m$. Таким образом, имеем дальше

$$\langle l+1\, m \,|\, l_{1y} \,|\, l+1\, m+1 \rangle \langle l+1\, m+1 \,|\, l_{2z} \,|\, l\, m+1 \rangle +$$

$$+ \langle l+1\, m \,|\, l_{1y} \,|\, l\, m+1 \rangle \langle l\, m+1 \,|\, l_{2z} \,|\, l\, m+1 \rangle -$$

$$- \langle l+1\, m \,|\, l_{1z} \,|\, l+1\, m \rangle \langle l+1\, m \,|\, l_{2y} \,|\, l\, m+1 \rangle -$$

$$- \langle l+1\, m \,|\, l_{1z} \,|\, l\, m \rangle \langle l\, m \,|\, l_{2y} \,|\, l\, m+1 \rangle =$$

$$= \langle l+1 \,\vdots\, l_1 \,\vdots\, l+1 \rangle \langle l+1 \,\vdots\, l_2 \,\vdots\, l \rangle\, \frac{i}{2} \left(\sqrt{(l+1-m)(l+2+m)}\, \sqrt{(l+1)^2-(m+1)^2} - m \sqrt{l+1-m}\, \sqrt{l-m} \right) +$$

$$+ \langle l+1 \,\vdots\, l_1 \,\vdots\, l \rangle \langle l \,\vdots\, l_2 \,\vdots\, l \rangle\, \frac{i}{2} \left((m+1) \sqrt{l+1-m}\, \sqrt{l-m} - \sqrt{(l+1)^2-m^2}\, \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \right),$$

---

[9] Так как в дальнейшем все матричные элементы будут диагональны по l_1 и l_2, мы будем эти индексы часто опускать.

где опять были использованы соотношения /3.83/ в [5] . Полученное выражение можно тоже записать в виде

$$\langle l+1 \vdots l_1 \vdots l+1\rangle\langle l+1 \vdots l_2 \vdots l\rangle \frac{i}{2}\sqrt{(l+1-m)(l-m)}\,(l+2+m-m)+$$

$$+\langle l+1 \vdots l_1 \vdots l\rangle\langle l \vdots l_2 \vdots l\rangle \frac{i}{2}\sqrt{(l+1-m)(l-m)}\,(m+1-l-m-1). \qquad /A.3/$$

Из сравнения /A.3/ с /A.2/ вытекает, что матричный элемент /A.1/ можно записать в следующем виде

$$i(l+2)\langle l+1 \vdots l_1 \vdots l+1\rangle\langle l+1 \vdots l_2 \vdots l\rangle - i\,l\langle l+1 \vdots l_1 \vdots l\rangle\langle l \vdots l_2 \vdots l\rangle =$$

$$= -i\langle l+1 \vdots l_1 \vdots l\rangle \frac{(l+1)(l+2)+l(l+1)}{2(l+1)} \quad , \qquad /A.4/$$

где последнее равенство следует с помощью формулы [10]

$$\langle l \vdots l_1 \vdots l\rangle = \frac{l_1(l_1+1)-l_2(l_2+1)+l(l+1)}{2l(l+1)} \qquad /A.5/$$

(см. /3.36/ в [5]) , причем учтено соотношение /18/

$$\langle l+1 \vdots l_1 \vdots l\rangle = -\langle l+1 \vdots l_2 \vdots l\rangle .$$

Если упростить правую часть /A.4/, мы получим соотношение

$$\langle l_1 l_2\, l+1 \vdots [\vec{l}_1\times\vec{l}_2] \vdots l_1 l_2\, l\rangle = -i(l+1)\langle l+1 \vdots l_1 \vdots l\rangle ,$$

которое совпадает с первым из соотношений /18'/ . Совершенно аналогично можно доказать и второе соотношение.

---

[10] Заметим, что элемент $\langle l \vdots l_2 \vdots l\rangle$ получается перестановкой значков 1 и 2 в /A.5/.

Л и т е р а т у р а

1. Я.Фишер и С.Чулли. ЖЭТФ /в печати/; препринт ОИЯИ "Рекурентное построение угловых операторов. 1. Введение спина 1/2". 1959 г. Р-383

2. В.И.Ритус. ЖЭТФ, 32, 1536, /1957/.

3. S. Ciulli and J. Fişcher. Nuovo Cimento 12, 264, (1959).

4. M.H. Johnson, Phys.Rev. 38, 1635, (1931).

5. Е.Кондон, Г.Шортли. Теория атомных спектров, Москва, 1949.

6. М.Е.Роуз. Поля мультиполей. Москва, 1957г.

7. A.R.Edmonds. Angular momentum in quantum mechanics, Princeton University, Press, 1957.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 февраля 1960 года.