ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Д.И. Блохинцев

Д-474

ФЛЮКТУАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ МЕТРИКИ

Nuovo Cim., 1961, v16, n2, p382-387.

Дубна 1960 год

Д.И. Блохинцев

D-474

ФЛЮКТУАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ МЕТРИКИ

В работе рассмотрены флюктуации метрического тензора в двух случаях:

а/ в макромире, когда эти флуктуации обуславлнваются турбулентным движением материи и б/ в микромире, когда эти флюктуации вызваны нулевыми колебаниями вакуума. В последнем случае показано, что эти флюктуации существенны для расстояний порядка $L_0 = \left(\frac{8\pi\gamma\hbar}{c}\right)^{1/2} \cong 10^{-32}$ см.
Здесь γ - постоянная Ньютона.

§ 1. Введение

В тех областях пространства, где имеются мощные турбулентные потоки вещества, сопровождающиеся значительными изменениями плотности вещества, или имеющие большие нерегулярные скорости движения / $\frac{v}{c}$ не мало!/ метрический тензор $g^{\mu\nu}$ является случайной величиной. Это означает, что промежуток времени t_{AB} и расстояние x_{AB}, отделяющие две физические мировые точки A и B, становятся также случайными величинами, так что можно говорить лишь о вероятности того, что $t_{AB} = t$, $x_{AB} = \ell$.

В микромире такой статистический характер метрики, естественно, может быть обусловлен статистическим характером вакуума, или иными словами "нулевыми" колебаниями квантованных полей.

Возникающая при этом проблема очень сложна и вполне может оказаться, что статистический характер метрики, обусловленный нулевыми колебаниями вакуума, существенен лишь в столь малых масштабах, которые скорее всего лежат за пределами компетенции квантовой теории.

Тем не менее представляется интересным сделать разведочный экскурс в эту область. При этом достаточно ограничиться наиболее простой постановкой задачи.

§ 2. Флюктуации метрики

Мы будем считать, что тензор материи $T^{\mu\nu}$ может быть разложен на две части

$$T^{\mu\nu} = T_0^{\mu\nu} + \delta T^{\mu\nu} \qquad /1/$$

таким образом, что $T_0^{\mu\nu}$ описывает глобальное движение материи, характеризуемое крупными масштабами L и большими периодами времени T, а часть $\delta T^{\mu\nu}$ представляет турбулентное движение материи, характеризуемое малыми масштабами λ и малыми периодами τ $(\lambda \ll L, \tau \ll T)$. Среднее значение $\delta T^{\mu\nu}$ по промежуткам времени, сравнимыми с T, или по масштабам, сравнимыми с L, будем считать равным нулю. Поэтому

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = T_0^{\mu\nu}, \langle \delta T^{\mu\nu} \rangle = 0, \qquad /2/$$

где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по турбулентному движению. Соответственно /1/ мы разложим и метрический тензор

$$g^{\mu\nu} = g_0^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} + \dots \qquad /3/$$

Величину турбулентных флюктуаций материи $\delta T^{\mu\nu}$ мы будем считать малой, так что величины $g^{\mu\nu}$ также малы в сравнении с $g_0^{\mu\nu}$, определяющими глобальную метрику пространства-времени. При этих предположениях гравитационное уравнение Эйнштейна может быть записано в виде

$$-\frac{1}{2} \Box^2 g^{\mu\nu} = \varkappa\, t^{\mu\nu}. \qquad /4/$$

Здесь $\varkappa = \frac{8\pi\gamma}{c^2}$, $\gamma = 6{,}7 \cdot 10^{-8}\ \frac{см^3}{г \cdot сек^2}$ – есть постоянная Ньютона; $\Box^2 = g_0^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}$ и тензор

$$t^{\mu\nu} = \delta T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_0^{\mu\nu} \delta T, \qquad /5/$$

где $\delta T = g_0^{\alpha\beta}\delta T_{\alpha\beta}$ есть инвариант.

Из /4/ находим:

$$g^{\mu\nu}(x) = -2\, æ\, \Box^{-2} t^{\mu\nu}(x), \qquad /6/$$

где $\Box^{-2}$ оператор, обратный $\Box^{2}$. На основании /6/ мы можем теперь написать для корреляций компонент метрического тензора в двух пространственно-временных точках x и x':

$$< g^{\alpha\beta}(x)\, g^{\mu\nu}(x') > = 4 æ^2 \Box_x^{-2} \Box_{x'}^{-2} < t^{\alpha\beta}_{(x)}\, t^{\mu\nu}_{(x')}. \qquad /7/$$

Ввиду малости $g^{\mu\nu}(x)$, интервал между двумя физическими точками A и B

$$S_{AB} = \int_A^B \sqrt{g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} \qquad /8/$$

может быть представлен в виде:

$$S_{AB} = S^0_{AB} + \frac{1}{2}\int_A^B \frac{g^{\mu\nu} dx_\mu\, dx_\nu}{\sqrt{g^0_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu}} + \cdots \qquad /9/$$

Среднее значение $< S_{AB} >$, в линейном приближении, равно S^0_{AB}, а среднее квадратичное отклонение $< (S_{AB} - S^0_{AB})^2 > = \Delta S^2_{AB}$ на основании /9/ можно написать в виде:

$$\Delta S^2_{AB} = \frac{1}{4}\int_A^B dx_\mu \int_A^B dx'_\mu < g_{\mu\mu}(x)\, g_{\mu\mu}(x') >. \qquad /10/$$

При этом направление интервала S^0_{AB} принято за ось OX_μ.

Пользуясь /7/ выразим теперь ΔS^2_{AB} через флюктуации материи:

$$\Delta S^2_{AB} = \frac{æ^2}{2}\int_A^B dx_\mu \int_A^B dx'_\mu\, \Box_x^{-2} \Box_{x'}^{-2} < t^{\mu\mu}(x)\, t^{\mu\mu}(x') + t^{\mu\mu}_{(x')}\, t^{\mu\mu}_{(x)} >. \qquad /11/$$

Таким образом, в линейном приближении, задача сводится к вычислению двойных корреляций тензора $t^{\mu\nu}(x)$.

§ 3. Оценка флюктуаций метрики в макромире

Движение материи будем рассматривать как движение идеальной, сжижаемой жидкости.

Тензор материи в этом случае гласит:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\frac{u^\mu u^\nu}{c^2} - \frac{P}{c^2} g^{\mu\nu}. \qquad /12/$$

Здесь ρ - плотность массы покоя среды, $P = f(\rho)$ - давление, u^μ - компоненты скорости среды. Из /5/ и /12/, получаем

$$t^{\mu\nu}(x) = A^{\mu\nu}(x)\delta\rho + B(x)\frac{\delta(u^\mu u^\nu)}{c^2}, \qquad /13/$$

где $$A^{\mu\nu}(x) = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\left(\frac{u^\mu u^\nu}{c^2} - \frac{1}{2} g_0^{\mu\nu}\right)$$

$$B(x) = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right),$$

и

$$V^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

- квадрат скорости звука. Заметим, что флюктуации плотности δ, по порядку величины, равны $\frac{\delta u^2}{V^2}\rho$.

Рассмотрим теперь корреляции тензора $g^{\mu\nu}$ вне объема Ω, занимаемого турбулентной материей. На основании /7/, получим

$$\langle g^{\nu\nu}(x) g^{\nu\nu}(x')\rangle = 4\varkappa^2 \iint_{\Omega\,\Omega} \frac{d^3y\, d^3z}{R(x,y)R(x',z)} \langle t^{\nu\nu}([t],y)\, t^{\nu\nu}([t']z)\rangle \qquad /14/$$

где $R(xy)$ и $R(x'z)$ есть расстояния между x и y, x' и z, а $[t]=t-\frac{R(xy)}{c}$, $[t']=t'-\frac{R(x'z)}{c}$ суть запаздывающие моменты времени.

Если δu^2 не мало в сравнении с V^2, но еще заметно меньше C^2, то среди компонент $t^{\nu\nu}$ важен лишь член t^{44}. При этом $A^{44} \cong 1/2$, $B^{44} << A^{44}$, поэтому $\langle t^{44}(y)t^{44}(z)\rangle \cong \langle\delta\rho(y)\delta\rho(z)\rangle$.
При достаточной однородности среды эта величина будет слабо зависеть от $\frac{1}{2}(y+z)$ и существенно зависеть от $/y-z/$. Переходя теперь в /14/ к координатам $\frac{1}{2}(y+z)$ и $(y-z)$, нетрудно получить оценку /14/ для $x=(\vec{x},t)$ и $x'=(\vec{x},t')$:

$$\langle g^{44}(t,\vec{x})g^{44}(t',\vec{x})\rangle \cong \frac{æ^2\Omega\omega(t'-t)\delta\rho^2}{R^2}. \qquad /15/$$

Здесь $\Omega=\frac{4\pi}{3}R^3$ - объем среды, $\omega(t'-t)$ корреляционная функция, при $t=t'$, равная объему флюктуации (λ^3), $\delta\rho$ - амплитуда флюктуации плотности среды. Как видно из /15/, флюктуации метрического тензора пропорциональны $\sim R^{1/2}\lambda^{3/2}$, где R - линейные размеры среды, λ - линейный маштаб турбулентности. Соответственно этому:

$$\Delta S^2_{AB} \cong \frac{æ^2\Omega\omega\tau\delta\rho^2}{R^2}t \cong æ^2\omega\tau\cdot\delta\rho^2\cdot R\cdot t, \qquad /16/$$

где τ - временной масштаб турбулентности.

§ 4. Оценка флюктуаций метрики в микромире

Вычислим теперь корреляцию величин g^{44} в точках x и x', вызванную нулевыми колебаниями скалярного поля, с отличной от нуля массой частиц μ.

В этом случае функция Лагранжа равна

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sqrt{g}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}-\mu^2\psi^2\right) \qquad /17/$$

и тензор материи равен

$$T^{\mu\nu}(x) = g_0^{\mu\alpha} g_0^{\mu\beta} \frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta} - \delta^{\mu\nu}\mathcal{L}. \qquad /18/$$

В соответствии с природой вакуума величины $g_0^{\mu\nu}$ имеют теперь галилеевские значения. Нас интересует не сам тензор $T^{\mu\nu}$, а лишь его флюктуации $\delta T^{\mu\nu}$. Для того, чтобы получить $\delta T^{\mu\nu}$ из /18/ достаточно подразумевать там под $\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}$, ψ^2 и т.п. нормальные произведения этих операторов. Поэтому, на основании /5/ и /18/ мы получим

$$t^{44}(x) = \frac{1}{2} g_0^{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta} - \mu^2\psi^2 \qquad /19/$$

причем здесь произведения операторов считаются уже нормальными.

Разлагая, как обычно, поле ψ в ряд Фурье

$$\psi = \frac{1}{V^{1/2}}\sum_{k}\sum_{k'}\left(\frac{\hbar}{2\omega_k}\right)^{1/2}\left(a_k e^{i(k,x)} + a_k^+ e^{-i(k,x)}\right), \qquad /20/$$

где V – нормировочный объем, $\omega_k = c\sqrt{k^2+\mu^2}$, $k = (\vec{k},\omega)$, a_k, a_k^+ операторы уничтожения и рождения частиц поля.

Подстановка /20/ в /19/ дает

$$t^{44}(x) = \frac{1}{V}\sum_{k}\sum_{k'}\left(\frac{\hbar^2}{2\omega_k\omega'_k}\right)^{1/2}\Big\{A_{kk'}(x)a_k a_{k'} + B_{kk'}(x)a_k^+ a_{k'} + \qquad /21/$$

$$+ B^*_{kk'}(x)a^+_{k'}a_k + A^*_{kk'}(x)a_k^+ a_{k'}^+\Big\},$$

причем

$$A_{kk'}(x) = -\frac{1}{2}\left[2\mu^2 + (k,k')\right]e^{i(k+k',x)} \qquad /22/$$

$$B_{kk'}(x) = -\frac{1}{2}\left[2\mu^2 - (k,k')\right]e^{-i(k-k',x)}. \qquad /22^1/$$

Из /21/ и /7/ и усредняя по вакууму, найдем

$$\frac{1}{2}\langle g_{44}(x)g_{44}(x') + g_{44}(x')g_{44}(x)\rangle = \qquad /23/$$

$$= \hbar^2 \varkappa \iint \frac{d^3k\, d^3k'}{\omega_k\omega_{k'}}\left[\frac{2\mu^2+(k,k')}{(k+k',k+k')}\right]^2 \cos(k+k', x-x').$$

Для $x = (\vec{x}, ct)$, $x' = (\vec{x}, ct')$, $t' - t = T$

получим

$$\frac{1}{2} \langle g_{44}(x) g_{44}(x') + g_{44}(x') g_{44}(x) \rangle =$$

$$= \frac{2\pi \hbar^2 \varkappa^2}{c^2} \int_0 \int_0 \frac{\kappa^2 d\kappa \, \kappa'^2 d\kappa'}{\omega \omega'} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\mu^2}{2\kappa\kappa'} \lg \frac{\mu^2 + \omega\omega' + \kappa\kappa'}{\mu^2 + \omega\omega' - \kappa\kappa'} + \frac{\mu}{\mu^2 + \kappa^2 + \kappa'^2} \right\} \cos(\omega + \omega') T \qquad /24/$$

Этот интеграл расходится на верхнем пределе, при $K \to \infty$.

Если нулевая масса частиц поля равна нулю $(\mu = 0)$, то при $K_c T \gg 1$ интеграл в /16/ стремится к нулю как $1/T^2$, а для малых времен $K_c T \ll 1$ он ведет себя как K^4.

$$\frac{1}{2} \langle g_{44}(t) g_{44}(t') + g_{44}(t') g_{44}(t) \rangle = \frac{2\pi \hbar^2 \varkappa^2}{c^2} \frac{K^4}{8}, \; K_c T \ll 1 =$$

$$= \frac{2\pi \hbar^2 \varkappa^2}{c^2} \frac{K^2}{c^2 T^2} \cos 2K_c T, \; K_c T \gg 1 \qquad /25/$$

Отсюда видно, что флюктуации метрики становятся существенными, если $cT \ll \frac{1}{K} = L_0$ и масштаб L_0 определяется формулой:

$$L_0 = \left(\frac{\hbar \varkappa}{c} \right)^{1/2} = 0{,}82 \cdot 10^{-32} \text{ см.} \qquad /26/$$

Этот масштаб много больше гравитационных радиусов частиц $L_g = \varkappa \mu$ / μ - масса частиц/, которые обычно рассматриваются как характерные размеры той области пространства, в которой могли бы быть существенны гравитационные эффекты в микромире. Однако он еще существенно меньше даже тех малых масштабов, которые характерны для слабых взаимодействий / $\sim 10^{-16}$ см/.

Заметим, что масса частиц поля не имеет значения для флюктуаций метрики до тех пор пока комптоновская длина частицы $L_c = \frac{\hbar}{\mu c}$ больше ее гравитационного радиуса L_g, т.к. $L_0 = (L_g L_c)^{1/2}$, то условие $L_c > L_g$, эквивалентно условию $L_0 > L_g$.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 января 1960 года.