ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

Лаборатория теоретической физики

Д - 453

В.Г. Гришин, В.И. Огиевецкий

О МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН В ДВУХЧАСТИЧНЫХ РЕАКЦИЯХ

Nucl. Phys., 1960, v.18, N3, p. 516-520.

Дубна 1959 год

Д-453

В.Г.Гришин, В.И.Огиевецкий

О МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН В ДВУХЧАСТИЧНЫХ РЕАКЦИЯХ

Показано, как достоверно определить минимальное число парциальных волн, участвующих во взаимодействии, если известны полное упругое сечение и дифференциальное сечение под данным углом.

Статья направлена в Nuclear Physics.

§ 1. Введение

При больших энергиях во взаимодействии двух частиц участвует много парциальных волн и практически невозможно провести полный фазовый анализ. Поэтому важно выяснить какую безусловную информацию можно извлечь из имеющихся экспериментальных данных. В частности, представляет интерес определение наименьшего числа парциальных волн L_{min}, необходимого для описания опытных данных /когда L_{min} достаточно велико, его можно связать с минимальным радиусом взаимодействия/.

В работе Рарита и Шведа [1] показано как определить L_{min} для упругого рассеяния, если известны полные сечения взаимодействия.

В настоящей статье доказаны неравенства для минимального числа парциальных волн в двухчастичных реакциях, если известно полное сечение и дифференциальное сечение под одним или двумя углами. Показано, что учет спинов взаимодействующих частиц несущественно меняет результат, если L_{min} велико, по сравнению с бесспиновым случаем. Поэтому практически можно всегда пользоваться неравенством /А/.

Неравенство /А/ значительно сильнее неравенства Рарита-Шведа /1/, если амплитуда рассеяния имеет вещественную часть или зависит от спинов. Им можно пользоваться и для неупругих реакций типа $a+b\to c+d$.

§ 2. Взаимодействие бесспиновых частиц

Рассмотрим сначала случай, когда частицы не имеют спина. Тогда:

$$\sigma(\vartheta_1)=\frac{1}{4k^2}\left|\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)A_\ell P_\ell(\cos\vartheta_1)\right|^2. \qquad /1/$$

$$\sigma_{el}=\int\sigma(\vartheta)d\Omega=\frac{\pi}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)|A_\ell|^2.$$

Предположим, что в этих уравнениях можно ограничиться конечным числом парциальных волн L. Тогда, используя неравенство Коши или определяя условный минимум σ_{el} при заданном $\sigma(\vartheta_1)$, можно доказать /см. приложение/, что:

$$\Sigma_0 \geqslant \frac{4\pi\,\sigma(\vartheta_1)}{\sigma_{el}}\,, \qquad /A/$$

где

$$\Sigma_0 = \sum_{\ell=0}^{L}(2\ell+1)\left(P_\ell(\cos\theta_1)\right)^2 = \frac{(L+1)^2}{1-\cos^2\theta_1}\left[\left(P_L(\cos\theta_1)\right)^2+\left(P_{L+1}(\cos\theta_1)\right)^2-2\cos\theta_1 P_L(\cos\theta_1)P_{L+1}(\cos\theta_1)\right] \qquad /2/$$

В левой части /А/ стоит монотонно возрастающая функция L. Неравенство будет выполняться только при L, больших L_{min}. Это число L_{min} и является наименьшим числом парциальных волн, необходимых для одновременного описания заданных σ_{el} и $\sigma(\vartheta_1)$.

Неравенство /А/ для упругого рассеяния при $\vartheta = 0$ сильнее неравенства, полученного в работе /1/. Действительно, в этом случае /А/ запишется:

$$(L+1)^2 \geqslant \frac{4\pi\,\sigma(0)}{\sigma_{el}} = \frac{k^2\sigma_t^2}{4\pi\sigma_{el}} + \frac{4\pi}{\sigma_{el}}\left[Re f(0)\right]^2, \qquad /A'/$$

в то время, как неравенство Рарита-Шведа [1] имеет вид:

$$(L+1)^2 \geqslant \frac{k^2\sigma_t^2}{4\pi\sigma_{el}} \qquad /3/$$

и, очевидно, при отличной от нуля вещественной части амплитуды рассеяния дает меньшее L_{min}, чем неравенство /А'/.

Если заданы σ_{el}, $\sigma(\vartheta_1)$ и $\sigma(\vartheta_2)$, то действуя аналогичным образом, можно получить более сильное неравенство, чем /А/. Оно имеет несколько громоздкий вид:

$$\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2 \geqslant \frac{1}{\sigma_{el}}\left\{\rho_{11}\sigma(\vartheta_2)-2|\rho_{12}|\sqrt{\sigma(\vartheta_1)\sigma(\vartheta_2)}+\rho_{22}\sigma(\vartheta_1)\right\}, \qquad /4/$$

где

$$4\pi\rho_{ik} = \sum_{\ell=0}^{L}(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta_i)P_\ell(\cos\theta_k) = \frac{L+1}{\cos\theta_i-\cos\theta_k}\left[P_{L+1}(\cos\theta_i)P_L(\cos\theta_k)-P_L(\cos\theta_i)P_{L+1}(\cos\theta_k)\right] \qquad /5/$$

Можно вывести также неравенства, использующие большее число экспериментальных точек. Конечно, они станут еще более громоздкими, но будут давать более жесткую оценку для L_{min}, так как любая дополнительная информация может только повысить L_{min}. Неравенство /4/ можно обратить и определить наибольшее значение дифференциального сечения под некоторым углом ϑ_2, если известно полное упругое сечение и дифференциальное сечение под другим углом ϑ_1. Именно

$$\sigma(\vartheta_2) \leq \frac{\sigma(\vartheta_1)}{\rho_{11}^2}\left\{|\rho_{12}| + \sqrt{\left[\frac{\rho_{11}\sigma_{el}}{\sigma(\vartheta_1)} - 1\right]\left(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2\right)}\right\}^2. \qquad /6/$$

Найденная таким образом верхняя граница $\sigma(\vartheta_2)$ зависит от числа парциальных волн L, учитываемых в суммах /5/. Если $L = L_{min}$, то /6/ переходит в равенство. С увеличением L правая часть рассматриваемого неравенства растет. Для практических оценок, ограничиваясь разумным числом L, можно получить определенные указания о верхней границе $\sigma(\vartheta_2)$.

§ 3. Взаимодействие спиновых частиц

В этом параграфе будут даны неравенства для определения минимального числа парциальных волн L_{min}, если известны σ_{el} и $\sigma(\vartheta_1)$ для частиц со спином.

а/ В приложении доказано, что для частиц со спинами 1/2 и 0 неравенство имеет вид:

$$\max\left\{\Sigma_0, \Sigma_1\right\} \geq \frac{4\pi\sigma(\vartheta_1)}{\sigma_{el}}, \qquad /7/$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{\ell=1}^{L}(2\ell+1)\left[P_\ell^{(1)}(\cos\vartheta_1)\right]^2\frac{(\ell-1)!}{(\ell+1)!}. \qquad /8/$$

б/ Для нетождественных частиц со спином 1/2 аналогичным образом может быть легко выведено неравенство:

$$\mathrm{Max}\left\{\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2\right\} \geq \frac{4\pi\sigma(\vartheta_1)}{\sigma_{el}}, \qquad /9/$$

где

$$\Sigma_2 = \Sigma(2l+1)\frac{(l-2)!}{(l+2)!}\left[P_l^{(2)}(\cos\vartheta_1)\right]^2. \qquad /10/$$

в/ Учет тождественности дираковских частиц приводит к более сложному неравенству:

$$\mathrm{Max}\left\{\Sigma_0', \Sigma_0'', \Sigma_1', \Sigma_1'', \Sigma_2', \Sigma_2''\right\} \geq \frac{4\pi\sigma(\vartheta_1)}{\sigma_{el}}, \qquad /11/$$

где

$$\Sigma_m' = \Sigma\left[1+(-1)^l\right](2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\left[P_l^{(m)}(\cos\vartheta_1)\right]^2$$

и

$$\Sigma_m'' = \Sigma\left[1-(-1)^l\right](2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\left[P_l^{(m)}(\cos\vartheta_1)\right]^2. \qquad /12/$$

В неравенствах /7/, /9/ и /11/ для определения L_{min} в левую часть следует подставить наибольшую из сумм. Следует отметить, что при малых углах наибольшей из сумм будет Σ_0, так как Σ_1 и Σ_2 содержат присоединенные полиномы Лежандра. Далее, так как при больших энергиях L_{min} достаточно велико, то $\Sigma_m' \approx \Sigma_m'' \approx \Sigma_m$. Поэтому для больших энергий практически можно пользоваться неравенством /А/ для всех случаев.

Следует подчеркнуть, что если ограничиться для описания эксперимента минимальным числом парциальных волн $L = L_{min}$, определенным из выведенных выше неравенств, то в соответствующих амплитудах рассеяния члены, отвечающие за опрокидывание спина, равны нулю. Если они отличны от нуля, то $L > L_{min}$.

Если включить в рассмотрение поляризацию, то можно получить более сильные условия для определения L_{min}. В этом случае не исключена возможность оценок вклада в сечение спиновых частей амплитуды рассеяния.

§ 4. Применение к p-p -рассеянию при энергии 8,5 Бэв

Таким образом, мы приходим к выводу, что для определения минимального числа парциальных волн, участвующих в двухчастичных реакциях, во всех случаях при больших энергиях можно пользоваться неравенством /А/.

Если амплитуда рассеяния имеет вещественную часть или зависит от спинов, то неравенство /А/ сильнее неравенства Рарита-Шведа [1].

Рассмотрим в качестве примера рассеяние протонов на протонах при E_p = 8,5 Бэв. В этом случае по данным Цыганова и др [2] :

$$\sigma_{el} = (8,6 \pm 0,8)\ \text{мб.} \quad \text{и} \quad \sigma(2,5^\circ \div 5,5^\circ) = (123 \pm 18)\ \frac{\text{мб}}{\text{стерад}}.$$

Из неравенства /А/ находим:

$$L_{min} = 16 \pm 3 . \qquad /13/$$

/Колебание L_{min} обусловлено экспериментальными ошибками/. Неравенство Рарита-Шведа приводит к более слабой оценке:

$$L_{min} = 8 \pm 1 , \qquad /14/$$

$$\text{если } \sigma_{tot} = (30 \pm 3)\ \text{мб.}$$

Оптическая модель, описывающая эти экспериментальные данные [2], дала эффективное количество парциальных волн, равное 16±1. При этом соответствующий радиус взаимодействия

$$R = /1,6 \pm 0,1/ \cdot 10^{-13}\ \text{см.}$$

Из наших результатов следует, что любая другая модель приведет к тому же или большему радиусу взаимодействия.

В заключение отметим, что все полученные результаты полностью применимы не только к упругому рассеянию, но и к неупругим двухчастичным реакциям, например: $\pi^- + p \to \Sigma^- + K^+$ и т.п. В этом случае надо заменить σ_{el} на полное сечение данной реакции.

Авторы благодарят Л.Г.Заставенко за обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В качестве типичного примера ниже приводится доказательство неравенства /7/ для столкновения частиц со спинами 0 и 1/2.

Нам удобно записать выражения для $\sigma(\vartheta_1)$ и σ_{el} в виде:

$$\sigma(\vartheta_1) = \frac{1}{4K^2}\left\{\left(\sum_{l=0}^{L} x_l a_l\right)^2 + \left(\sum_{l=0}^{L} x_l b_l\right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{L} y_l c_l\right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{L} y_l d_l\right)^2\right\} \qquad /15/$$

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{K^2}\left\{\sum_{l=0}^{L}(a_l^2 + b_l^2) + \sum_{l=1}^{L}(c_l^2 + d_l^2)\right\}, \qquad /16/$$

где

$$\left.\begin{aligned}
x_l &= \sqrt{(2l+1)}\, P_l(\cos\vartheta_1), \quad y_l = \sqrt{(2l+1)}\, P_l^{(1)}(\cos\vartheta_1) \\
a_l &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\, \mathrm{Im}\left\{(l+1)\left(e^{2i\delta_{l+1/2}} - 1\right) + l\left(e^{2i\delta_{l-1/2}} - 1\right)\right\} \\
b_l &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\, \mathrm{Re}\left\{(l+1)\left(e^{2i\delta_{l+1/2}} - 1\right) + l\left(e^{2i\delta_{l-1/2}} - 1\right)\right\} \\
c_l &= \sqrt{\frac{l(l+1)}{2l+1}}\, \mathrm{Im}\left\{e^{2i\delta_{l+1/2}} - e^{2i\delta_{l-1/2}}\right\} \\
d_l &= \sqrt{\frac{l(l+1)}{2l+1}}\, \mathrm{Re}\left\{e^{2i\delta_{l+1/2}} - e^{2i\delta_{l-1/2}}\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad /17/$$

Воспользуемся теперь известным неравенством Коши:

$$\left(\sum A_i B_i\right)^2 \leq \sum A_i^2 \cdot \sum B_i^2 \qquad /18/$$

$$\sigma(\vartheta_1) \leq \frac{1}{4k^2}\left\{\left(\Sigma x_\ell^2\right)\left[\Sigma a_\ell^2 + \Sigma b_\ell^2\right] + \left(\Sigma y_\ell^2\right)\left[\Sigma c_\ell^2 + \Sigma d_\ell^2\right]\right\} \leq$$
$$\leq \frac{1}{4\pi}\, \sigma_{el}\, \mathrm{Max}\left\{\Sigma x_\ell^2, \Sigma y_\ell^2\right\}.$$

и, таким образом, неравенство /7/ доказано.

Совершенно аналогично выводятся неравенства /А/, /9/ и /11/. Приведенный метод доказательства несравнимо проще, особенно для частиц со спином, чем другой метод, заключающийся в определении условного экстремума σ_{el} при заданном $\sigma(\vartheta_1)$.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1959 года.

Литература

1. W. Rarita, P. Schwed. Phys. Rev., 112, 271, 1958.

2. В.И.Векслер. Доклад на IX Международной конференции по физике высоких энергий. Киев, 1959 г.