ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодоров, О.А.Хрусталев

Д-1191

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ПРИРОДА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

Nuovo Cim., 1963, v 30, n 1
p. 134-142.

Дубна 1963 г.

А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодоров, О.А.Хрусталев

Д-1191

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ПРИРОДА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

Дубна 1963 г.

А н н о т а ц и я

В работе показано, что для описания связанных состояний в квантовой теории поля можно построить локальный потенциал, являющийся суперпозицией потенциалов Юкавы с интенсивностями, зависящими от энергии.

В работе [1] было показано, что в соответствии с принципами квантовой теории поля система из двух взаимодействующих частиц может быть описана уравнением типа Шредингера с обобщенным комплексным потенциалом, зависящим от энергии и импульсов частиц. Такой подход позволяет, с одной стороны, найти амплитуду рассеяния[x], а, с другой, - изучить структуру связанных состояний.

Наряду с таким подходом в работе [1] была разработана схема построения локального потенциала для описания амплитуды рассеяния, суть которой заключается в следующем.

Для амплитуды рассеяния M в квантовой теории поля дано разложение по константе связи. Совершенно очевидно, что непосредственно из данного разложения нельзя ответить на вопросы о возможном асимптотическом поведении амплитуды и характере связанных и резонансных состояний системы. Чтобы подойти к решению этих вопросов, в работе [1] рассматривался метод суммирования диаграмм теории возмущений. Этот подход позволяет на основе информации из теории возмущений для амплитуды процесса построить такой потенциал, что уравнение типа Шредингера с этим потенциалом дает в любом порядке теории возмущений обычное выражение для амплитуды рассеяния. Знание потенциала по теории возмущений позволяет установить, как мы увидим ниже, ряд его общих свойств. Поскольку по самому построению потенциала мы ограничились задачей правильного описания лишь амплитуды рассеяния, то полученное таким образом уравнение типа Шредингера даст возможность найти энергетический спектр связанных и резонансных состояний системы.

В работе [1] установлено, что процесс рассеяния, а также энергетический спектр связанных и резонансных состояний описывается уравнением[xx]

$$[E^2 - q^2 - m^2]\,\psi(q) - \frac{1}{\sqrt{q^2 + m^2}} \int V(E, (q-p)^2)\,\psi(p)\,d^3p = 0, \qquad /1.1/$$

где потенциал $V(E, (p-q)^2)$ является функцией энергии E и передачи импульса $(p-q)^2$. Отсюда для амплитуды перехода $T(q,q')$ имеем уравнение в форме Липмана-Швингера:

$$T(q,q') = V(E + i\epsilon, (q-q')^2) + \int \frac{V(E+i\epsilon, (q-p)^2)\,T(p,q')}{[(E+i\epsilon)^2 - p^2 - m^2]\sqrt{p^2+m^2}}\,d^3p. \qquad /1.2/$$

На массовой поверхности:

$$q^2 = q'^2 = E^2 - m^2$$

функция T совпадает с амплитудой рассеяния M, где

$$S = 1 - i\frac{\pi}{E^2}\,\delta(E - E')\,M. \qquad /1.3/$$

Представляя функцию T в виде:

$$T(q,q') = V(E + i\epsilon, (q-q')^2) + \int V(E + i\epsilon, (q-p)^2)\,G(E+i\epsilon; p,k)\,V(E + i\epsilon, (q'-k)^2)\cdot d^3p\,d^3k \qquad /1.4/$$

---

x/ Амплитуду рассеяния мы будем называть квазипотенциальной, если ее проекции на четные и нечетные состояния по переменной $\cos\theta$ могут быть представлены в виде суперпозиций Фурье-образов потенциалов Юкава с некоторыми интенсивностями σ.

xx/ Здесь и далее через p, q обозначены трехмерные импульсы.

получим уравнение для функции Грина $G(E;q,q')$:

$$(E^2-q^2-m^2)\sqrt{q^2+m^2}\,G(E;q,q')-\int V(E,(q-p)^2)\,G(E,p,q')\,d^3p=\delta(q-q'). \qquad /1.5/$$

Прежде чем исследовать свойства уравнения /1.2/, сделаем одно замечание. Обычно на основе дисперсионных соотношений по s с одним вычитанием без учета u -канала[/2/]:

$$M(s,t)=V(t)+1/\pi\int\limits_{4m^2}^{\infty}d\sigma\,\frac{Im\,M(\sigma,t)}{\sigma-s} \qquad /1.6/$$

и двухчастичной унитарностью

$$i\{M(p_a,p_\beta)-\overset{+}{M}(p_a,p_\beta)\}+\int M(p_a,p)\,\overset{+}{M}(p,p_\beta)\,d^3p=0 \qquad /1.7/$$

в предположении, что $V(t)$ и $Im\,M(s,t)$ допускают представления вида:

$$V(t)=1/\pi\int\limits_{\mu^2}^{\infty}\frac{U(\nu)}{\nu-t}\,d\nu,\quad Im\,M(s,t)=1/\pi\int\limits_{4\mu^2}^{\infty}\frac{\rho(s,\nu)}{\nu-t}\,d\nu \qquad /1.8/$$

получают нелинейное уравнение для спектральной функции:

$$\rho(\sigma,\nu)=-\frac{2\pi}{q\sqrt{s}}\iint\limits_{\mu^2}^{\infty}r(\sigma+i\epsilon,\nu_1)\,\overset{+}{r}(\sigma+i\epsilon,\nu_2)\,R(\sigma,\nu_1,\nu_2,\nu)\,d\nu_1\,d\nu_2, \qquad /1.9/$$

где

$$r(s,\nu)=U(\nu)+1/\pi\int\limits_{4\mu^2}^{\infty}\frac{\rho(\sigma,\nu)}{\sigma-s}\,d\sigma, \qquad /1.10/$$

а функция R имеет известное выражение:

$$R(s,t_1,t_2,t)=\frac{1}{2q^2}\,K\left(1+\frac{t_1}{2q^2},\,1+\frac{t_2}{2q^2},\,1+\frac{t}{2q^2}\right) \qquad /1.11/$$

$$\frac{1}{2q^2}\,K\left(1+\frac{t_1}{2q^2},\,1+\frac{t_2}{2q^2},\,1+\frac{t}{2q^2}\right)=\frac{\theta\left(t_1^2+t_2^2+t^2-2(t\,t_1+t\,t_2+t_1\,t_2)-\frac{t_1t_2t}{q^2}\right)}{\left[t_1^2+t_2^2+t^2-2(t\,t_1+t\,t_2+t_1t_2)-\frac{t_1t_2t}{q^2}\right]^{1/2}}, \qquad /1.12/$$

$$s=4(m^2+q^2).$$

Нетрудно видеть, что решение линейного уравнения /1.2/ с потенциалом $V(t)$, представленным в форме /1.8/, может быть сведено к решению нелинейного уравнения для спектральной функции.

В самом деле, поскольку потенциал $V(t)$ является вещественным и его Фурье-образ зависит только от расстояния, амплитуда, найденная из уравнения /1.2/, удовлетворяет условию унитарности /1.7/. Из анализа уравнения /1.2/ с потенциалом /1.8/, являющимся суперпозицией юкавских потенциалов, следует[/3/], что амплитуда рассеяния имеет представление /1.6/ и /1.8/, причем константа вычитания в /1.6/ совпадает с потенциалом $V(t)$.

Приведенный пример показывает, что исследование амплитуды рассеяния с помощью уравнения /1.2/ является достаточно эффективным, поскольку здесь мы имеем дело с линейным уравнением, представляющим собой обобщение хорошо изученного уравнения Шредингера, тогда как на базе условия унитарности и дисперсионных соотношений мы имеем, вообще говоря, довольно-таки сложную нелинейную систему интегральных уравнений.

Перейдем теперь к изучению некоторых свойств уравнения /1.2/. Для выяснения асимптотических свойств амплитуды рассеяния в s –канале, уравнение /1.2/ для описания связанных состояний необходимо писать в t –канале, где $t = 4E^2$, а s и u являются передачами импульса. Для описания прямого и обменного взаимодействия введем потенциалы $V^{\pm}$, соответственно для четных и нечетных состояний /1/. Тогда уравнение /1.2/ можно записать отдельно для четных и нечетных состояний:

$$T^{\pm}(q, q') = V^{\pm}(E + i\epsilon, (q - q')^2) + \int \frac{V^{\pm}(E+i\epsilon, (q-p)^2)\, T^{\pm}(p, q')}{[(E+i\epsilon)^2 - p^2 - m^2]\sqrt{p^2 + m^2}}\, d^3p . \qquad /1.13/$$

Пусть потенциалы $V^{\pm}(E, (q - q')^2)$ в некотором интервале энергий E представимы в форме:

$$V^{\pm}(E, (q - q')^2) = \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{U^{\pm}(E, \nu)}{\nu + (q - q')^2}\, d\nu . \qquad /1.14/$$

Тогда решение уравнения /1.2/ соответственно для четных и нечетных состояний в этом же интервале энергий имеет вид:

$$T^{\pm}(q, q') = \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{\tau^{\pm}(q^2, q'^2, \nu; E)}{\nu + (q - q')^2}\, d\nu . \qquad /1.15/$$

Проверим это утверждение по теории возмущений. Для этой цели запишем уравнение /1.2/ в символической форме:

$$T^{\pm} = V^{\pm} + V^{\pm} \times T^{\pm}, \qquad /1.16/$$

представляя T и V в виде разложения по константе связи:

$$\begin{aligned} T^{\pm} &= T_2^{\pm} + T_4^{\pm} + \ldots \\ V^{\pm} &= V_2^{\pm} + V_4^{\pm} + \ldots \end{aligned} \qquad /1.17/$$

Подставляя в уравнение /1.16/, получим:

$$T_{2n}^{\pm} = V_{2n}^{\pm} + \sum_{m=1}^{n-1} V_{2m}^{\pm} \times T_{2n-2m}^{\pm} . \qquad /1.18/$$

Для $n = 1$ $T_2 = V_2$ и утверждение очевидно.

Покажем теперь, что если функции $T_2, \ldots, T_{2n-2}$ представим в виде /1.15/, то функция T_{2n} также представима в этой форме.

Рассмотрим произведение:

$$V_{2m} \times T_{2n-2m} = \int_{\mu^2}^{\infty} d\nu_1 \int_{\mu^2}^{\infty} d\nu_2 \int_0^{\infty} du \, \frac{\tau_{2n-2m}(u, q'^2, E, \nu_2)\, U_{2m}(E, \nu_1)}{[E^2 - m^2 - u]\sqrt{u + m^2}}\, I(\nu_1, \nu_2), \qquad /1.19/$$

где

$$I(\nu_1, \nu_2) = \int d^3p \, \frac{\delta(p^2 - u)}{[\nu_1 + (q - p)^2][\nu_2 + (p - q')^2]} ,$$

так как

$$I(\nu_1,\nu_2) = \frac{\pi}{2} \int \frac{K(q'^2, t', u, \nu_1, \nu_2, q^2)}{t' + (q-q')^2}\, dt', \qquad /1.20/$$

где

$$K = \frac{\theta(\sqrt{t'} - \sqrt{\nu_1} - \sqrt{\nu_2})\,\theta(\Delta)}{\sqrt{\Delta}}$$

Δ –известный детерминант [4], то:

$$V_{2m} \times T_{2n-2m} = \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu + (q-q')^2}\, \chi(q^2, q'^2, E, \nu)$$, причем:

$$\chi(q^2, q'^2, E, \nu) = \int_0^{\infty} du \int_{\mu^2}^{\infty} d\nu_1 \int_{\mu^2}^{\infty} d\nu_2\, \frac{r_{2n-2m}(u, q'^2, E, \nu_2)\, U_{2m}(E, \nu_1) K(q'^2, \nu, u, \nu_1, \nu_2, q^2)}{[E^2 - m^2 - u]\sqrt{u + m^2}}. \qquad /1.21/$$

Отсюда следует, что функция T_{2n} представима в виде /1.15/. Таким образом, представление для решения уравнения /1.2/ в форме /1.15/ установлено.

Напишем уравнение для спектральной функции r . Для этого подставим выражения /1.14/ и /1.15/ в уравнение /1.13/. Применяя формулу /1.20/, получим[x]:

$$r^{\pm}(q'^2, q^2, \nu, E) = U^{\pm}(E, \nu) + \iint \frac{Q^{\pm}(q'^2, \nu, u', t', q^2, E)}{(E^2 - m^2 - u')\sqrt{u' + m^2}}\, r(q', u', t', E) \cdot du'\, dt', \qquad /1.22/$$

где

$$Q^{\pm}(q'^2, \nu, u', t', q^2, E) = ½ \int K(q'^2, \nu, u', t', \nu, q^2)\, U^{\pm}(E, \nu)\, d\nu_1 . \qquad /1.23/$$

Уравнения типа /1.22/ для потенциального рассеяния впервые обсуждались в работе [4] в связи с изучением асимптотического поведения амплитуды рассеяния. Для того, чтобы с помощью уравнения /1.1/ найти амплитуду рассеяния, а, следовательно, и спектр связанных и резонансных состояний, выберем потенциал таким образом, чтобы функция T на поверхности масс точно совпадала с амплитудой рассеяния в любом порядке теории возмущений. Это можно получить, если определить потенциал из уравнений

$$V_2^{\pm} = [T_2^{\pm}], \quad V_4^{\pm} = [T_4^{\pm}] - [V_2^{\pm} \times T_2^{\pm}]$$
$$V_{2n}^{\pm} = [T_{2n}^{\pm}] - \sum_{m=1}^{n-1} [V_{2m}^{\pm} \times T_{2n-2m}^{\pm}] . \qquad /1.24/$$

Здесь скобки [ ] означают переход в соответствующих выражениях на массовую поверхность[xx].

---

[x] Ядро $Q^{\pm}$ продолжается и в области отрицательных значений q^2 и q'^2. Такие значения возникают при продолжении амплитуды процесса в область энергий ниже порога.

[xx] После этой операции потенциал будет функцией только двух независимых переменных E и t .

Покажем теперь, что если амплитуды рассеяния для четных и нечетных состояний $M^{\pm}$ в некоторой области энергий представимы в форме:

$$M^{\pm}(E,(q-q')^2)=\int_{\mu^2}^{\infty}\frac{\sigma^{\pm}(E,\nu)}{\nu+(q-q')^2}\,d\nu\,, \qquad /1.25/$$

то потенциалы $V^{\pm}$, определенные из уравнений /1.24/, в этой области энергий имеют вид:

$$V^{\pm}(E,(q-q')^2)=\frac{1}{\pi}\int_{\mu^2}^{\infty}\frac{U^{\pm}(E,\nu)}{\nu+(q-q')^2}\,d\nu\,. \qquad /1.26/$$

Проверим это утверждение по теории возмущений. Так как $[T_2]$ совпадает с амплитудой рассеяния M_2 во втором порядке, то сформулированное выше утверждение для V_2 очевидно. В четвертом порядке:

$$V_4 = M_4 - [\,M_2 \times M_2\,],$$

следовательно, на основании /1.20/ и /1.25/ V_4 также представимо в форме /1.26/.

Аналогичные рассуждения без труда могут быть проведены в любом порядке теории возмущений. Таким образом по теории возмущений установлено, что если амплитуда рассеяния в некоторой области энергий представима в виде /1.25/, то потенциалы $V^{\pm}$ в этом интервале энергий являются суперпозициями юкавских потенциалов с интенсивностями, зависящими от энергии E.

Сделаем следующее замечание. При использовании информации об амплитуде рассеяния из теории возмущений мы получаем некоторые константы вычитания, которые не представимы в форме /1.25/. При восстановлении потенциала V эти константы нами не будут учитываться. В зависимости от степени n полинома вычитания, потенциал $V(E,t)$ будет правильно описывать лишь парциальные волны с $\ell > n$.

Покажем теперь, что в теории поля для изучения связанных состояний в t -канале можно построить локальный потенциал, являющийся суперпозицией юкавских потенциалов с интенсивностями, зависящими от энергии, и имеющий вид:

$$V^{\pm}(E,(q-q')^2)=\frac{1}{\pi}\int_{\mu^2}^{\infty}\frac{U^{\pm}(E,\nu)}{\nu+(q-q')^2}\,d\nu\,. \qquad /1.27/$$

Мы установим, что такое представление вытекает из принципов квантовой теории поля в интервале энергий:

$$-4\mu^2 < t < 4\mu^2\,. \qquad /1.28/$$

В теории возмущений для любой диаграммы n порядка, дающей вклад в амплитуду рассеяния, доказаны[5] одномерные дисперсионные соотношения как по переменной t при фиксированном значении s, находящемся в интервале[x/]:

$$-4m^2 < s < 4m^2 \qquad /1.29/$$

[x/] Одномерные дисперсионные соотношения в работе[5] получены для различных физических процессов. Здесь мы приводим результаты только для случая равных масс.

так и по переменной s при фиксированном t в интервале:

$$-4\mu^2 < t < 4\mu^2 . \qquad /1.30/$$

Следовательно, для амплитуды рассеяния можно написать представление[x/]:

$$M(s,t) = \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{\sigma_1(s',t)}{s'-s}\,ds' + \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{\sigma_2(u',t)}{u'-u}\,du' . \qquad /1.31/$$

Здесь переменная t находится в области /1.30/. На основании /1.31/ можно построить функции $M^{\pm}$:

$$M^{\pm}(s,t) = \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{\sigma^{\pm}(s',t)}{s'-s}\,ds' , \qquad /1.32/$$

где

$$\sigma^{\pm}(s,t) = \sigma_1(s,t) \pm \sigma_2(s,t) .$$

Амплитуда $M(s,t)$ выражается через эти функции следующим образом:

$$M(s,t) = ½\,[M^{+}(s,t) + M^{-}(s,t) + M^{+}(u,t) - M^{-}(u,t)] . \qquad /1.33/$$

Так как передача импульса $s \leqq 0$, то, используя представление /1.32/ и установленное ранее утверждение / см. формулы /1.25/ и /1.26/ /, потенциалы $V^{\pm}$ представимы в форме /1.26/, а, следовательно, их Фурье-образы в интервале энергий /1.30/ имеют вид:

$$V^{\pm}(E,r) = 1/\pi \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{e^{-\nu r}}{r}\, U^{\pm}(E,\nu)\,d\nu . \qquad /1.34/$$

Таким образом нами установлено, что в теории поля в рамках теории возмущений амплитуды $M^{\pm}$ в некоторой области энергий представимы в виде /1.32/, т.е. имеют квазипотенциальную природу[xx/]. Потенциалы $V^{\pm}$, восстановленные по такой квазипотенциальной

x/ Мы здесь не учитываем констант вычитания, поскольку, как мы уже выше отмечали, они не принимаются нами во внимание при построении потенциала.

Амплитуда $M(s,t)$ не имеет по теории возмущений особенностей при $t < 4\mu^2$ кроме полюса в точке $t=\mu^2$. Аналитическая структура амплитуды, построенной на основе уравнения /1.2/, вообще говоря, будет уже иметь полюса, связанные возможными связанными состояниями в t -канале. Эти полюса фактически являются константами / в общем случае-полиномом/ вычитания в s -канале, которые могут влиять на асимптотику амплитуды рассеяния. Здесь как раз проявляется глубокая связь, установленная Редже, между связанными состояниями и асимптотической амплитудой рассеяния.

xx/ Заметим, что если амплитуда $M(s,t)$ удовлетворяет гипотетическому дисперсионному соотношению по передаче импульса t для любых вещественных s , то она будет квазипотенциальной. Потенциалы, соответствующие такой амплитуде, будут представимы в виде /1.34/ для любых значений s . Мы видим, таким образом, что гипотеза о справедливости дисперсионных соотношений по передаче импульса ведет для любых значений энергии s к потенциалу, являющемуся суперпозицией потенциалов Юкавы с интенсивностями, зависящими от энергии.

амплитуде рассеяния, являются, как мы видели выше, суперпозицией юкавских потенциалов с интенсивностями, зависящими от энергии.

В заключение отметим, что при изучении амплитуды рассеяния в рамках теории возмущений мы не можем непосредственно сделать никаких заключений о существовании резонансных и связанных состояний системы. Это объясняется не тем, что система не имеет этих состояний, а тем, что метод теории возмущений не приспособлен к такого рода задачам. Поэтому аналитическая структура амплитуды рассеяния, полученная из теории возмущений, не будет иметь особенностей, связанных связанным состоянием системы. Восстановление потенциала по информации, содержащейся в теории возмущений, и последующее исследование системы на базе уравнения типа Шредингера позволяет уже изучить энергетический спектр связанных и резонансных состояний, а также асимптотику амплитуды рассеяния. В работе /6/ уравнение /1.2/ с потенциалом /1.34/ применялось к исследованию асимптотики амплитуды рассеяния в s -канале. Используя для уравнения /1.22/ технику, развитую Фубини и Строфолини, авторы показали, что асимптотика в области больших s имеет реджеевское поведение.

Проведенный выше анализ указывает на плодотворность квазипотенциального подхода в квантовой теории поля.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову за ценные советы и стимулирующие обсуждения, а также Д.И.Блохинцеву, Б.А.Арбузову, А.В.Ефремову, Нгуен Ван Хьеу, М.К.Поливанову и Р.Н.Фаустову за плодотворные дискуссии.

Литература

1. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Препринт ОИЯИ, Е-1145 (1962).
2. S.Mandelstam. Regge Poles as Consequences of Analyticity and Unitarity. Preprint (1962).
3. R.Blankenbecler et al. Annals of Phys. 10, 62-93 (1960).
4. S.Fubini, R.Stroffolini. Lectures, August 1962 - Trieste.
5. А.А.Логунов, Лю И-чень, И.И.Тодоров и Н.А.Черников. Препринт ОИЯИ Р-1043 /1962/
6. Б.А.Арбузов, А.А.Логунов и др. Препринт ОИЯИ Р-1149 /1962/.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 февраля 1963 г.