ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Л.Д. Соловьев

D – 1108

О ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

ЖЭТФ, 1963, т 44, в 1, с 306-310

Дубна 1962 г.

Л.Д. Соловьев

D-1108

О ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Дубна 1962 г.

А н н о т а ц и я

Рассмотрен способ написания дисперсионных соотношений в квантовой электродинамике. Доказательство проделано в низших порядках теории возмущений, улучшенной с помощью ренормализационной группы.

1. Инфракрасные особенности

Дисперсионные соотношения для фотон-электронного рассеяния на нулевой угол были написаны еще в 1954 году[1]. Однако дальнейшее применение метода дисперсионных соотношений в квантовой электродинамике столкнулось с трудностью, вызванной инфракрасными особенностями. Физическая сущность этой трудности состоит в том, что амплитуды процессов, в которых участвуют заряженные частицы и конечное число фотонов, равны нулю, если заряженные частицы рассеиваются на ненулевой угол, и отличны от нуля для рассеяния вперед. Поэтому, например, вершинная функция в электродинамике не является аналитической. Не аналитической является и зависимость амплитуд рассеяния от переданного импульса.

Отличными от нуля являются сечения процессов с бесконечным числом частиц /мягких фотонов/. Метод же дисперсионных соотношений был до сих пор развит лишь для амплитуд процессов с конечным числом частиц.

Тем не менее, мы можем и в электродинамике рассматривать амплитуды процессов с конечным числом частиц, если воспользуемся формулой факторизации инфракрасных особенностей[2]:

$$M_\lambda = e^{F_\lambda} M \quad , \qquad /1/$$

где M_λ -матричный элемент, вычисленный с введением массы $\sqrt{\lambda}$ в фотонный пропагатор, а функция F_λ имеет вид:

$$F_\lambda = -\sum_{i<j} z_i a_i z_j a_j F\left((p_i a_i + p_j a_j)^2\right), \qquad /2/$$

где суммирование ведется по всем заряженным частицам, z_i - знак заряда, $a_i = 1$ или -1 соответственно для выходящей или входящей частицы с импульсом p_i. Функция F равна[x]:

$$F((p'-p)^2) = \frac{i\alpha}{8\pi^3} \int \frac{dk}{k^2-\lambda} \left(\frac{2p'-k}{2p'k-k^2} - \frac{2p-k}{2pk-k^2} \right)^2 \qquad /3/$$

/ α -постоянная тонкой структуры/ и может быть представлена в виде:

$$F(t) = \frac{t}{\pi} \int_4^\infty \frac{Im\, F(t')\, dt'}{t'(t'-t-i\epsilon)} \quad , \qquad /4/$$

$$Im\, F(t) = \frac{\alpha}{4} \sqrt{\frac{t-4}{t}} \left(\frac{2t-4+\lambda}{t-4} \ln \frac{t-4+\lambda}{\lambda} - 1 \right) \qquad /5/$$

---

x/ Система единиц $\hbar = c =$ /масса электрона/ $= 1$. Векторное произведение $ab = a^0 b^0 - \vec{a}\vec{b}$.

Рассматривая коэффициент при $\ell n\,\lambda$ в F_λ, можно показать, что его реальная часть больше нуля в физической области, обращается в нуль для рассеяния вперед /для электрон-электронного рассеяния также и для рассеяния назад/ и становится меньше нуля в части нефизической области. Если при этом в пределе $\lambda = 0$ величина M конечна, то это означает, что матричный элемент M_λ в пределе $\lambda = 0$ обращается в нуль в физической области, конечен для рассеяния вперед и бесконечен в части нефизической области. Это последнее обстоятельство может быть связано с существованием связанных состояний кулоновского взаимодействия.

Предположение о том, что величина M в формуле /1/ конечна в пределе $\lambda = 0$ не является строго доказанным, однако оно весьма правдоподобно[/2/]. В дальнейшем мы рассмотрим при $\lambda = 0$ аналитические свойства M для некоторых процессов в низших порядках теории возмущений, улучшенной с помощью ренормализационной группы.

2. Вершинная функция

Для вершины с тремя концами, соответствующими двум реальным заряженным частицам и виртуальному фотону с квадратом массы t, величина M в третьем порядке теории возмущений является аналитической функцией в плоскости t с разрезом от 4 до ∞.

Начиная с седьмого порядка возникают диаграммы с промежуточными фотонами. Они должны давать разрез от 0 до ∞.

Таким образом, для вершинной функции величина M обладает обычными, нормальными аналитическими свойствами.

3. Комптон-эффект

Рассмотрим величину M для рассеяния фотонов на электронах. Обозначим квадраты полных энергий прямого и перекрестного процессов соответственно через s и u, а квадрат переданного импульса через t.

Во втором порядке теории возмущений M содержит члены $M_s^{(2)}$ и $M_u^{(2)}$, имеющие полюса соответственно в точках $s = 1$ и $u = 1$.

Приводимые диаграммы четвертого порядка среди других членов дают полюсные члены, зависящие от дополнительного магнитного момента электрона μ'. Мы учтем эти члены в $M_s^{(2)}$ и $M_u^{(2)}$, заменив в них матрицы γ^n на $\gamma^n + \mu'\sigma^{nm} g_m$ / g -переданный импульс/. Остальные члены четвертого порядка дают следующий вклад:

$$M^{(4)} = M_s^{(2)}[\beta(t)\,\ell n(1-s) + \gamma(t)] + M_{sa}^{(4)} + M_u^{(2)}[\beta(t)\,\ell n(1-u) + \gamma(t)] + M_{ua}^{(4)} \qquad /6/$$

$$\beta(t) = \frac{\alpha\, t}{\pi} \int_4^\infty \frac{t'-2}{\sqrt{t'(t'-4)}} \frac{dt'}{t'(t'-t-i\epsilon)} \qquad /7/$$

$$\gamma(t) = -\frac{\alpha t}{2\pi} \int_4^\infty \left[\frac{(t'-2)\ln t'}{\sqrt{t'(t'-4)}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{t'-4}{t'}} \right] \frac{dt'}{t'(t'-t-i\epsilon)}\,. \qquad /8/$$

Величины $M_{sa}^{(4)}$ и $M_{ua}^{(4)}$ /точнее коэффициенты при их спинорных структурах/ являются аналитическими функциями переменных s, t и u, t с точками ветвления в качестве особенностей и удовлетворяют представлению Мандельстама /3/.

Мы видим, что в четвертом порядке имеются члены с аномальными особенностями $(1-s)^{-1}\ln(1-s)$ и $(1-u)^{-1}\ln(1-u)$.

Применяя уравнение ренормализационной группы /4/ по переменной s и выбирая константу интегрирования из соответствия с теорией возмущений /6/, получаем, что на самом деле амплитуда вблизи точки $s=1$ имеет особенность вида:

$$\exp\left[\beta(t)\ln(1-s) + \gamma(t)\right] \left(M_s^{(2)} + \ldots\right) \qquad /9/$$

и аналогичную особенность вблизи $u=1$. В выражении /9/ просуммированы члены порядка $[\alpha\ln(1-s)]^n$ и α^2 ряда теории возмущений. Разумно допустить, что амплитуда M имеет вид:

$$M = M_s^{(2)}\exp\left[\beta(t)\ln(1-s) + \gamma(t)\right] + M_u^{(2)}\exp\left[\beta(t)\ln(1-u) + \gamma(t)\right] + M_a\,, \qquad /10/$$

где β и γ являются рядами по α, первые члены которых представлены в /7/,/8/; в $M_{s,u}^{(2)}$ учтен дополнительный магнитный момент, а

$$M_a = M_{sa}^{(4)} + M_{ua}^{(4)} + \ldots \qquad /11/$$

является аналитической функцией с точками ветвления, удовлетворяющей представлению Мандельстама.

Реальная часть коэффициента $\beta(t)$ в /10/, /7/ меньше нуля в физической области переменной $t\,(t<0,\, t>4)$ и больше нуля при $0<t<4$. Поэтому величина M вблизи $s=1$ /и аналогично вблизи $u=1$/ имеет особенность вида

$$(1-s)^{-1+\beta(t)}, \qquad /12/$$

которая в физической области t является более сильной, чем полюс.

Наконец, рассмотрим одно следствие соотношения /10/. Именно, предположим, что при всех физических энергиях можно пренебречь величиной четвертого порядка M_s. Тогда для M получается асимптотика типа Редже с показателем $-1+\beta(t)$, /см. чертеж/, который соответствует связанным состояниям электрона и позитрона. Уровни этих состояний в нерелятивистском пределе переходят в кулоновские.

4. Электрон-позитронное рассеяние

Если для вершинной функции и комптон-эффекта величина F_λ в /1/ просто равна $F(t)$, то для электрон-позитронного рассеяния она имеет вид:

$$F_\lambda = 2F(s) - 2F(u) + 2F(t), \qquad /13/$$

где переменные s, u и t имеют тот же смысл, что и в предыдущем разделе.

Величина M для электрон-позитронного рассеяния во втором порядке теории возмущений содержит члены $M_s^{(2)}$ и $M_t^{(2)}$, являющиеся полюсами соответственно при $s=0$ и $t=0$. Как и раньше, мы учтем в них полюсные члены старших порядков, зависящие от дополнительного магнитного момента.

Остальные члены четвертого порядка теории возмущений дают следующий вклад

$$M^{(4)} = 2(\Phi(s,t) - \Phi(u,t))\, M_t^{(2)} + M_{ta}^{(4)} + \qquad /14/$$

$$+ 2(\Phi(t,s) - \Phi(u,s))\, M_s^{(2)} + M_{sa}^{(4)},$$

где

$$\Phi(s,t) = \psi(s,t) - \psi(0,t), \qquad /15/$$

$$\psi(s,t) = \frac{ia}{\pi^3} \int \frac{dk\,(p'p - (p'k)(pk)|k^2)\,2qk}{k^2(k^2+2p'k)(k^2-2pk)(q^2-2qk+i\epsilon)}, \qquad /16/$$

p' и p – импульсы электрона и позитрона до /или после/ реакции, q – переданный импульс.

Функция Φ имеет вид:

$$\Phi(s,t) = \frac{s}{\pi} \int_4^\infty \frac{Im\,\Phi(s',t)\,ds'}{s'(s'-s-i\epsilon)}. \qquad /17/$$

$$Im\,\Phi(s,t) = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{s-4}{s}}\left[\frac{s-2}{s-4}\,\ln\frac{-t}{s-4} + \tfrac{1}{2}\right]. \qquad /18/$$

Функции $M^{(4)}_{sa}$ и $M^{(4)}_{ta}$ не содержат полюсных членов и являются аналитическими функциями переменных s, u и t, u соответственно, удовлетворяющими представлению Мандельстама.

Выражение / 14/ можно переписать в виде:

$$M^{(4)} = M^{(2)}_t [(\beta(s) - \beta(u) \ \ln(-t) + \epsilon(s) - \epsilon(u)] + M^{(4)}_{ta} + \qquad /19/$$

$$+ M^{(2)}_s [(\beta(t) - \beta(u) \ln(-s) + \epsilon(t) - \epsilon(u)] + M^{(4)}_{sa} ,$$

где $\beta(t)$ дается формулой /7/, а $\epsilon(t)$ имеет вид:

$$\epsilon(t) = \frac{at}{\pi} \int_4^\infty \sqrt{\frac{t'-4}{t'}} \left[\frac{t'-2}{t'-4} \ln \frac{1}{t'-4} + \tfrac{1}{2} \right] \frac{dt'}{t'(t'-t-i\epsilon)} . \qquad /20/$$

Повторяя рассуждения предыдущего раздела, для величины M можно написать представление вида /10/ или же представление

$$M = \exp [(\beta(s) - \beta(u) \ln(-t) + \epsilon(s) - \epsilon(u)] M_{ta} +$$

$$+ \exp [(\beta(t) - \beta(u) \ln(-s) + \epsilon(t) - \epsilon(u)] M_{sa} . \qquad /21/$$

Используя явный вид функции /13/, мы можем представить матричный элемент M_λ в виде

$$M_\lambda = \exp [(\beta(s) - \beta(u) \ \ln \frac{-t}{\lambda} + 2F(t)] M_{ta} +$$

$$/22/$$

$$+ \exp [(\beta(t) - \beta(u) \ \ln \frac{-s}{\lambda} + 2F(s)] M_{sa} .$$

Рассмотрим мнимую часть показателя первой экспоненты этого выражения в физической области $s > 4$, $t < 0$, $u < 0$. Она равна

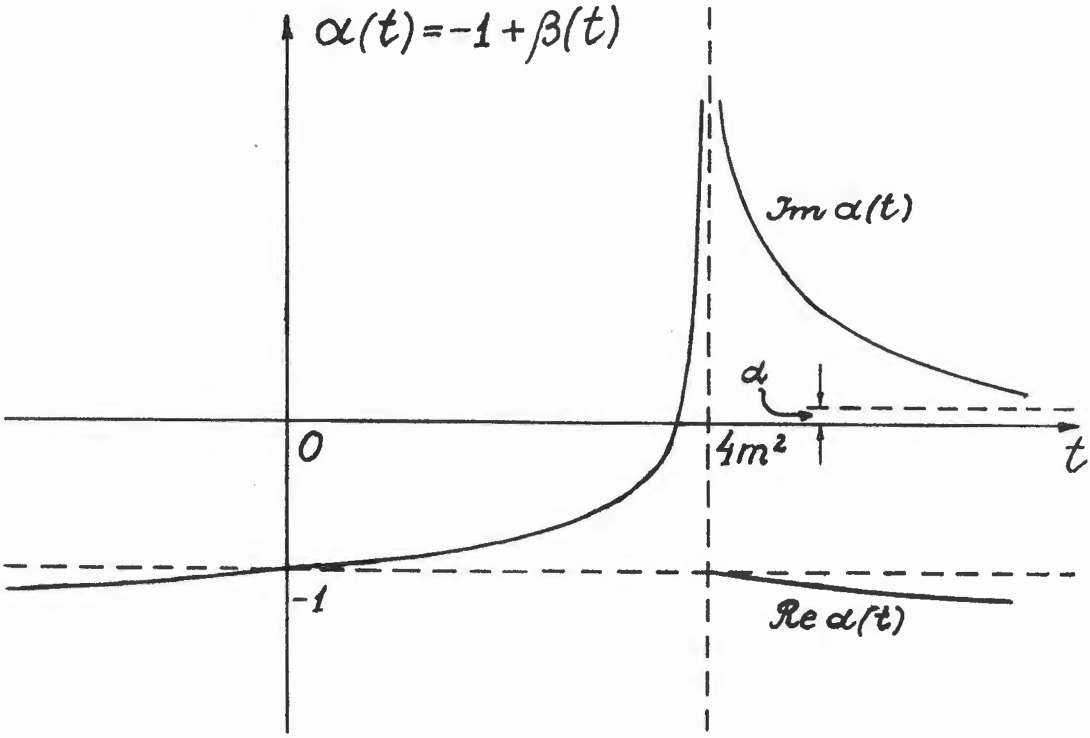
$$i \ Im\,\beta(s) \ \ln \frac{-t}{\lambda} = ia \frac{s-2}{\sqrt{s(s-4)}} \ln \frac{-t}{\lambda} . \qquad /23/$$

Мы видим, что мнимая часть сингулярного выражения в показателе первой экспоненты в /22/ приводит к расходящейся фазе

$$\exp \left[ia \frac{E^2+p^2}{pE} \ln \frac{2p \sin(\theta|2)}{\sqrt{\lambda}} \right] \qquad /24/$$

/в с.ц.м./, которая в нерелятивистском пределе совпадает с расходящейся фазой амплитуды рассеяния в кулоновском поле в нерелятивистской теории [5].

Пользуюсь случаем, чтобы выразить благодарность проф. О. Бору за гостеприимство в Институте теоретической физики Копенгагенского университета, где была выполнена эта работа. Я благодарен акад. Н.Н. Боголюбову, проф. Е. Викману, проф. Р. Каткосскому, проф. А.А. Логунову, Д. Бьеркейну, В.А. Мещерякову и И. Тодорову за полезные дискуссии.



Литература

1. M.Gell-Mann, M.L.Goldberger, W.E.Thirring. Phys. Rev. 95, 1612 (1954).
2. D.R.Yennie, S.C.Frautschi, H.Suura, Ann. of Phys. 13, 379 (1961).
Эта работа содержит ссылки на другие работы.
3. S.Mandelstam. Phys. Rev. 112, 1341 (1958).
4. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957, гл. УIII.
В.З. Бланк. Диссертация ОИЯИ, 1957 г.
5. R.H.Dalitz. Proc. Roy Soc. A. 206, 509 (1951). C.Kacser. Nuovo Cimento. 13, 303 (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
23 июля 1962 г.