МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра квантовой статистики

Академик Н.Н. БОГОЛЮБОВ

Лекции
ПО ТЕОРИИ СИММЕТРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

(Конспект лекций)

Часть 1.

Москва - 1966 г.

М. М.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Лекции по вопросам теории симметрии элементарных частиц предназначены, в основном, для студентов, знакомых с курсом квантовой механики. Эти лекции посвящены систематическому изложению главнейших достижений группового подхода к теории элементарных частиц, построенного на применении групп SU_3, SU_6 и модели кварков. Особое внимание было уделено возможно большей простоте рассмотрения. Поэтому мы стремились пользоваться лишь наиболее элементарными математическими приемами, не прибегая к аппарату теории групп, тензорной алгебре и т.п.

Выделение 1-ой части обусловлено исключительно окончанием семестра и желанием опубликовать прочитанные лекции до возобновления курса в следующем семестре. В эту первую часть вошли материалы, относящиеся к группе SU_2, модели Ферми-Янга и ее расширениям, группам SU_3, SU_6 и модели кварков. На этой основе рассмотрена систематика псевдоскалярных и векторных мезонов, а также октуплета и декуплета барионов. Изложение доведено до получения массовых формул.

Во второй части предполагается продолжить вывод общеизвестных уже теперь результатов и, в заключение, изложить часть новых достижений, полученных в Дубне в отделе А.Н. Тавхелидзе.

Пользуюсь случаем выразить свою глубокую благодарность И.А.Квасникову, В.Д. Кукину и М.К.Поливанову за их большой труд по редакции и изданию лекций, а также П.Н. Боголюбову и А.К. Матвееву, много помогшим этому делу своими записями.

Н. БОГОЛЮБОВ

январь 1966 г.

§ 1.

Важнейшим фактором, оказывающим все более сильное влияние на направление теоретических работ, является открытие большого и притом все возрастающего числа элементарных частиц с весьма разнообразными свойствами. К элементарным частицам сейчас относят не только сравнительно стабильные частицы с временем жизни более или порядка 10^{-16} сек, которое на много порядков выше характерного "ядерного времени"

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{c} = \frac{\hbar}{Mc^2} \sim 10^{-23}, 10^{-24} \text{ сек.}$$

К их семейству относятся и так называемые резонансы, т.е. частицы, время жизни которых примерно лишь на порядок больше соответствующего ядерного времени. Первым из таких резонансов был изобар нуклона, открытый Ферми при исследовании рассеяния π – мезонов на нуклонах.

В настоящее время известно достаточно много резонансов. Вместе с увеличением их числа само понятие элементарной частицы утеряло свой первоначальный смысл и стало в значительной мере чисто условным. Так, если пытаться воспользоваться понятиями квантовой теории поля, то сразу же возникает совершенно неясный вопрос: какие поля каких частиц мы должны вводить в рассмотрение, чтобы построить из них выражения для лагранжиана, токов, матрицы рассеяния и т.п. Естественно, что в теории создалось очень трудное и запутанное положение.

Проблема построения динамики элементарных частиц, казавшаяся недавно вполне реальной, представляется теперь значительно более сложной, и на первый план выдвигаются более предварительные задачи систематики, задачи составления своего рода "таблицы Менделеева" для элементарных частиц.

Надо сказать, что в этом направлении уже достигнут значительный успех благодаря серии работ, посвященных исследованиям свойств симметрии сильно взаимодействующих частиц на основе теоретико-группового подхода. Особо важная роль принадлежит здесь группам SU_3 и SU_6 и связанной с ними модели кварков. На их основе удалось классифицировать стабильные мезоны, барионы и низколежащие резонансы, а также установить между ними ряд весьма важных и интересных соотношений.

Указанное семейство элементарных частиц состоит из девяти псевдоскалярных мезонов, девяти векторных мезонов, восьми барионов со спином 1/2 и десяти барионов со спином 3/2. Чтобы подчеркнуть степень важности полученных результатов, укажем, что среди мезонов данного семейства находятся такие, казалось бы совершенно различные, частицы, как $\pi^{\pm}$ мезоны со временем жизни порядка 10^{-8} сек и ρ мезоны со временем жизни порядка 10^{-22} сек. Среди барионов имеются абсолютно стабильный протон, нейтрон со временем жизни около 17 мин. и нуклонные изобары N_δ (или Δ_δ) со временем жизни порядка 10^{-23} сек.

Попытки классификации более высоко лежащих резонансов пока еще не привели к такому же успеху. Может быть, отчасти причиной этого является недостаточность экспериментальных данных. Следует подчеркнуть, что большая энергетическая ширина таких резонансов делает весьма трудной задачу отделения одного резонанса от другого и определения соответствующих квантовых чисел (четность, спин, изотоп-спин и т.д.).

Заметим еще, что исследования рассматриваемого направления относятся вообще лишь к частицам, участвующим в сильных взаимодействиях, которые теперь называют адронами, и, во всяком случае на настоящем этапе своего развития, не применяются к таким частицам как электрон e, μ -мезон, электронное ν_e и мюонное ν_μ нейтрино (лептоны).

Надо сказать, что в оригинальных работах теоретико-группового подхода, так и в соответствующих обзорах, как правило, используется большой технический аппарат теории групп, тензорной алгебры и т.п., часто значительно затрудняющий понимание заложенных в этих работах простых физических идей. Нам кажется, что этого можно избежать, и мы попытаемся изложить здесь основные результаты этих работ более простым путем.

При изложении материала в настоящих лекциях мы вообще будем предполагать знание лишь обычного курса квантовой механики.

§ 2.

Взаимодействия между элементарными частицами в настоящее время принято разделять на три типа, резко различающиеся между собой по их интенсивности: взаимодействия сильные, электромагнитные и слабые. Интенсивность электромагнитного взаимодействия характеризуется малым параметром – постоянной тонкой структуры $\alpha = \frac{1}{137}$; интенсивность слабых взаимодействий еще на несколько порядков меньше.

Рассмотрим, например, распад π – мезонов. Основной способ распада $\pi^{\pm}$ -мезонов есть

$$\pi^{\pm} \longrightarrow \mu^{\pm} + \nu.$$

Время жизни $\pi^{\pm}$ – мезонов около $2,5.10^{-8}$ сек. Это время жизни обусловлено слабым взаимодействием. Далее, в 98,8 случаях из 100 распад π^{0} – мезона происходит по схеме

$$\pi^{0} \longrightarrow \gamma + \gamma$$

и вызывается значительно более сильными электромагнитными взаимодействиями. Соответствующее время жизни есть $1,8.10^{-16}$ сек. С другой стороны, распад ρ -мезонов

$$\rho \longrightarrow 2\pi, \qquad \rho \longrightarrow 4\pi.$$

совершается под действием сильных взаимодействий. Время жизни таких частиц порядка 10^{-22} сек. Эти цифры помогают составить некоторое представление о различии в интенсивности упомянутых трех типов взаимодействий.

Естественно, поэтому, изучать приближения, основанные на пренебрежении слабыми и электромагнитными взаимодействиями адронов, а также и более точные приближения, в которых не учитываются только лишь слабые взаимодействия. В первом случае принято говорить о системе адронов с выключенными электромагнитными и слабыми взаимодействиями, во втором случае – с выключенными слабыми взаимодействиями.

Скажем сейчас несколько слов по поводу законов сохранения аддитивных величин, представляющих различного рода "заряды". Аддитивной величиной мы называем такую величину, которая для любой системы частиц представляется суммой соответствующих величин для отдельных частиц.

Прежде всего, примем во внимание так называемые абсолютные законы сохранения, справедливые при наличии всех трех типов взаимодействий. Такими законами являются законы сохранения электрического заряда Q и барионного заряда B.

Барионный заряд для мезонов и лептонов равен нулю. Для всех элементарных частиц, являющихся барионами, которые открыты до настоящего времени, этот заряд равен 1 (+1 для частиц и -1 для античастиц). Таким образом, для отдельной элементарной частицы $B = 0, \pm 1$, и потому барионный заряд системы частиц выражается целым числом. Заметим еще, что сохранение барионного заряда обеспечивает стабильность общего числа барионов в любой системе, запрещая распад их на одни лептоны и электромагнитное излучение. Если электрический заряд системы Q выразить в единицах заряда протона e, то величина Q тоже будет целочисленной для системы из любых частиц.

Рассмотрим теперь динамическую систему адронов при выключенном слабом взаимодействии. В этом случае оказывается, что справедливы еще два закона сохранения. Именно, будет сохраняться электрический заряд адронов (отдельно сохраняется электрический заряд барионов и лептонов) и еще одно квантовое число системы – так называемая странность адронов S, являющаяся аддитивной величиной с целочисленными значениями. Обычно принято вместо странности S вводить так называемый гиперзаряд

$$Y = B + S.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае кроме барионного заряда B и полного электрического заряда системы сохраняются также электрический заряд адронов и их гиперзаряд.

По поводу всех этих законов сохранения заметим, что в квантовой механике каждый закон сохранения выражает определенные свойства симметрии системы, проявляющиеся в наличии группы преобразований, которым может быть подвергнута волновая функция рассматриваемой системы.

Например, закон сохранения энергии, справедливый для любой замкнутой системы, выражает симметрию по отношению к временным трансляциям $t \to t + t_0$, т.е. если ψ_t есть волновая функция данной замкнутой системы, то ψ_{t+t_0} будет также возможной волновой функцией этой системы, и мы имеем следующую группу преобразований

$$\psi_t \to \psi_{t+t_0} .$$

Но так как

$$\psi_{t+t_0} = \psi_t + t_0 \frac{\partial}{\partial t}\psi_t + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t_0^n \frac{\partial^n}{\partial t^n}\psi_t = e^{t_0 \frac{\partial}{\partial t}} \psi_t ,$$

то

$$\psi_{t+t_0} = e^{-it_0 (i\frac{\partial}{\partial t})} \psi_t = e^{-it_0 H} \psi_t ,$$

где H - оператор энергии, для нашей изолированной системы представляющий сохраняющуюся величину E (мы полагаем для удобства $\hbar = 1$).

Аналогично, если мы имеем какой-либо закон сохранения для динамической величины $\mathcal{U}$, то ему соответствует группа преобразований

$$\psi_t \to e^{ia\mathcal{U}} \psi_t ,$$

где a - любое вещественное число. В этом нетрудно убедиться. Так как $\mathcal{U}$ представляет оператор сохраняющейся величины, то

$$H\mathcal{U} - \mathcal{U}H = 0 .$$

Поэтому, если мы умножим уравнение Шредингера $i\frac{\partial \psi_t}{\partial t} = H\psi_t$ слева на оператор $e^{ia\mathcal{U}}$, то получим

$$i\frac{\partial}{\partial t}(e^{ia\mathcal{U}}\psi_t) = e^{ia\mathcal{U}} H\psi_t = H(e^{ia\mathcal{U}}\psi_t) ,$$

т.е. функция $e^{ia\mathcal{U}}\psi_t$ является наряду с ψ_t допустимой волновой функцией, что и доказывает существование преобразования упомянутого выше типа. Эти однопараметрические преобразования образуют группу, соответствующую группе сложения вещественных чисел, так как для произведения преобразований мы имеем

$$e^{ia\mathcal{U}} e^{ib\mathcal{U}} \psi_t = e^{i(a+b)\mathcal{U}} \psi_t .$$

В соответствии с рассмотренными выше законами сохранения мы приходим к наличию следующих групп допустимых преобразований: $\psi \to e^{iB\varphi}\psi$ – следствие закона сохранения барионного заряда, $\psi \to e^{iQ\varphi}\psi$ – следствие закона сохранения электрического заряда. Т.к.числа B и Q (собственные значения соответствующих операторов) являются целыми, то $e^{iB\varphi}$ и $e^{iQ\varphi}$ являются периодическими функциями вещественной переменной φ с периодом 2π, поэтому можно трактовать число φ как угол на некоторой окружности. Такие преобразования называются градиентными преобразованиями.

Рассмотрим частный случай, когда волновая функция ψ описывает одну частицу с барионным зарядом B=1.Тогда соответствующее преобразование будет

$$\psi \to e^{i\varphi}\psi .$$

Если предположить, что слабое взаимодействие выключено, то у нас появятся еще два градиентных преобразования, соответствующих законам сохранения электрического заряда адронов Q_H и гиперзаряда Y,

$$\psi \to e^{i\vartheta Q_H}\psi, \qquad \psi \to e^{i\vartheta Y}\psi,$$

где ϑ – вещественное число. Так как Q_H и Y являются целыми числами, то $e^{i\vartheta Q_H}$ и $e^{i\vartheta Y}$ будут периодическими (с периодом 2π) функциями ϑ. Мы видим, что данные градиентные преобразования также соответствуют группе вращений окружности.

§ 3.

Перейдем теперь к рассмотрению системы адронов в приближении, соответствующем учету лишь сильных взаимодействий. В этой ситуации возникает еще закон сохранения изотопического спина.

Уже в начале 30-ых годов было замечено, что протон и нейтрон в ядерных (сильных) взаимодействиях обладают одинаковыми свойствами и потому Гейзенберг предложил рассматривать их как два квантовых состояния одной и той же частицы – нуклона. Для обозначения этих двух состояний введем индекс A = 1,2 и условимся приписывать значение A=1 протонному состоянию, а A=2 – нейтронному. Тогда волновая функция протона p_A должна быть пропорциональна δ (A-1), а волновая функция нейтрона n_A пропорциональна δ (A-2), где

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 0 \\ 0 & \text{при } x \neq 0 \end{cases}$$

Считая волновые функции p_A, n_A нормированными на единицу, видим, что норма суперпозиционного состояния

$$\psi_A = C_1 p_A + C_2 n_A ,$$

- где C_1, C_2 – комплексные числа – дается суммой

$$|C_1|^2 + |C_2|^2$$

Заметим, что разность масс протона и нейтрона мала, составляя около 0,1%.

Естественно поэтому отнести ее к электромагнитному взаимодействию и считать, что при учете лишь сильных взаимодействий эти массы точно равны. Но тогда возникает характерное квантовомеханическое вырождение и волновые функции ψ_A могут быть подвергнуты любому линейному преобразованию, действующему на индекс A, не меняющему норму, т.е. произвольному унитарному преобразованию:

$$\psi_A \to \psi'_A = \sum_{B=1}^{2} U_{AB}\,\psi_B$$

или, сокращенно

$$\psi \to \psi' = U\psi,$$

где $\overset{+}{U}U = 1$.

Здесь крестиком сверху обозначается эрмитово сопряжение: $\overset{+}{U}_{AB} = U^{*}_{BA}$, и для удобства записи символом 1 мы обозначаем также единичный оператор. Суперпозиционные состояния $p' = Up$, $n' = Un$ в нашем приближении сильного взаимодействия совершенно эквивалентны протону и нейтрону.

Совокупность рассматриваемых унитарных преобразований, которая является совокупностью двумерных комплексных матриц, образует группу – так называемую унитарную группу U_2. Действительно, произведение $U = U_1 U_2$ двух преобразований U_1 и U_2 также унитарно

$$\overset{+}{U}U = (U_1\cdot U_2)^{+}(U_1 U_2) = \overset{+}{U}_2\overset{+}{U}_1 U_1 U_2 = \overset{+}{U}_2 U_2 = 1$$

и элемент, обратный U, будет

$$U^{-1} = U^{+}$$

Вспомним, что если мы имеем две матрицы U_1 и U_2 одного ранга, то

$$\mathrm{Det}(U_1 U_2) = \mathrm{Det}\,U_1\cdot\mathrm{Det}\,U_2.$$

Поэтому, для наших унитарных преобразований

$$\mathrm{Det}\,\overset{+}{U}\cdot\mathrm{Det}\,U = 1 \quad \text{, т.е.} \quad |\mathrm{Det}\,U|^2 = 1$$

Отсюда следует, что $\mathrm{Det}\,U = U_{11}U_{22} - U_{12}U_{21} = e^{i\vartheta}$, ϑ – действительное число.

Если теперь положить $U = U'e^{i\vartheta/2}$, то имеем

$$e^{i\vartheta} = \mathrm{Det}\,U = \mathrm{Det}\,(U'e^{i\frac{\vartheta}{2}}) = (\mathrm{Det}\,U')\,e^{i\vartheta}.$$

Таким образом, преобразование U' обладает свойством $\mathrm{Det}\,U' = 1$, и мы видим, что каждое допустимое преобразование волновой функции ψ_A можно представить в виде произведения унитарного преобразования U' с детерминантом, равным единице, и градиентного преобразования $e^{i\varphi}$ где $\varphi = \frac{\vartheta}{2}$. Но это градиентное преобразование, как уже отмечалось, соответствует закону сохранения барионного заряда. Поэтому, интересуясь законами сохранения, не сводимыми к законам сохранения зарядов, ограничимся исследованием случая, когда

$$\overset{+}{U}U = 1 \quad \text{и} \quad \mathrm{Det}\,U = 1.$$

Такие преобразования также образуют группу (так называемую специальную унитарную группу SU_2), т.к. если $U = U_1 U_2$, то

$$\mathrm{Det}\,U = \mathrm{Det}\,U_1\cdot\mathrm{Det}\,U_2 = 1.$$

Рассмотрим подробнее группу SU_2. Это послужит нам введением к изучению широкоизвестной группы SU_3, предложенной Гелл-Манном и Нееманом.

Вообще говоря, задание матрицы второго ранга с комплексными элементами

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$$

означает фиксацию восьми действительных параметров. Однако в нашем случае эти параметры не независимы: условие унитарности $\overset{+}{U} U = 1$ и условие $\mathrm{Det}\, U = 1$ представляют пять соотношений

$$\left.\begin{aligned} \overset{+}{U}_{11} U_{11} + \overset{+}{U}_{12} U_{21} &= 1 \\ \overset{+}{U}_{11} U_{12} + \overset{+}{U}_{12} U_{22} &= 0 \\ \overset{+}{U}_{21} U_{11} + \overset{+}{U}_{22} U_{21} &= 0 \\ \overset{+}{U}_{21} U_{12} + \overset{+}{U}_{22} U_{22} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad U_{11} U_{22} - U_{12} U_{21} = 1$$

Поэтому рассматриваемое преобразование U зависит лишь от трех действительных параметров. В наиболее общем виде такое преобразование, удовлетворяющее всем необходимым требованиям, можно записать как

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Det}\, U = \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1 .$$

Рассмотрим преобразование U, бесконечно близкое к единичному

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. случай, когда $\alpha \sim 1$, $\beta \sim 0$. Пусть $\beta = i\delta\varphi_1 + \delta\varphi_2$ (здесь $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ – вещественны). Если представить $\alpha = 1 + \delta\alpha$, то мнимая часть соотношения $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$ выразится как $\delta\alpha + \delta\alpha^* = 0$, т.е. $\delta\alpha$ – чисто мнимое, поэтому $\alpha = 1 + i\delta\varphi_3$ ($\delta\varphi_3$ – вещественно). Таким образом, получаем

$$U = \begin{pmatrix} 1 + i\delta\varphi_3 , & i\delta\varphi_1 + \delta\varphi_2 \\ i\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2 , & 1 - i\delta\varphi_3 \end{pmatrix} = 1 + \delta U,$$

где

$$\delta U = i \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \delta\varphi_1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \delta\varphi_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \delta\varphi_3 \right] = i \sum_{\alpha=1}^{3} \tau_\alpha \, \delta\varphi_\alpha .$$

Здесь τ_1, τ_2, τ_3 – известные матрицы Паули, с помощью которых в нерелятивистской квантовой механике исследуется динамика частиц со спином 1/2. Легко проверить, что матрицы Паули являются эрмитовыми, $\tau_\alpha^+ = \tau_\alpha$, и удовлетворяют соотношениям

$$\tau_1\tau_2 = i\tau_3;\quad \tau_2\tau_3 = i\tau_1;\quad \tau_3\tau_1 = i\tau_2;\quad \tau_1^2 = \tau_2^2 = \tau_3^2 = 1.$$

Первые три соотношения можно записать с помощью единичного абсолютно антисимметричного тензора 3-го ранга $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$, в котором

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1,\qquad \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1$$

и все прочие элементы равны нулю, в следующем виде

$$\tau_\alpha\tau_\beta = i\sum_{\gamma=1}^{3}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\tau_\gamma,\qquad \alpha\neq\beta.$$

Из всех этих соотношений вытекает также, что величины (τ_α, 1) образуют так называемую алгебру, т.е. произведение любых элементов этого набора выражается их линейной комбинацией, так что любой полином относительно (τ_α, 1) есть линейная комбинация этих же элементов. В частности

$$\tau_\alpha\tau_\beta - \tau_\beta\tau_\alpha = 2i\sum_{\gamma=1}^{3}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\tau_\gamma;\qquad \tau_\alpha\tau_\beta + \tau_\beta\tau_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta}.$$

Из первого соотношения сразу следует, что

$$\left[\frac{\tau_\alpha}{2},\ \frac{\tau_\beta}{2}\right]_- = \frac{\tau_\alpha}{2}\cdot\frac{\tau_\beta}{2} - \frac{\tau_\beta}{2}\,\frac{\tau_\alpha}{2} = i\sum_{\gamma=1}^{3}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\tau_\gamma}{2},$$

т.е. операторы $I_\alpha = \frac{1}{2}\tau_\alpha$ удовлетворяют таким же коммутационным соотношениям, что и операторы компонент момента импульса в квантовой механике

$$[I_\alpha, I_\beta]_- = i\sum_{\gamma=1}^{3}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}I_\gamma,\qquad \text{причем}\qquad I_\alpha = I_\alpha^+.$$

Напомним основные необходимые нам свойства операторов углового момента:

1) Если операторы I_α эрмитовы и удовлетворяют указанным коммутационным соотношениям, то оператор квадрата момента $\vec{I}^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} I_\alpha^2$ имеет собственные значения вида $I(I+1)$, где I – целое или полуцелое неотрицательное число I = 0, 1/2, 1, 3/2, ...

2) Так как оператор $\vec{I}^2$ коммутирует с любой из компонент I_α

$$\vec{I}^2 I_\alpha - I_\alpha\vec{I}^2 = 0,$$

то одна из компонент (обычно выбирают оператор I_3) и $\vec{I}^2$ имеют общий набор собственных функций, причем, если собственное значение оператора $\vec{I}^2$ характеризуется числом I, то собственные значения оператора I_3 равны $I, I-1, \ldots, -I$ (всего $2I+1$ значений).

3) Если произведем сложение операторов двух моментов

$$\vec{I} = \vec{I}' + \vec{I}'',$$

то квантовое число I, определяющее собственное значение оператора $\vec{I}^2$, может принимать следующий ряд значений:

$$I = I' + I'',\ I' + I'' - 1, \ldots,\ |I' - I''| .$$

Доказательство этих соотношений можно найти, например, в книге В. Паули "Общие принципы волновой механики".

Используя общепринятую терминологию, будем называть операторы I_α операторами изотопического спина системы.

В рассмотренном выше случае одной частицы

$$\vec{I}^2 = \frac{1}{4}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2) = \frac{3}{4} = I(I+1),$$

т.е. изотопический спин нуклона $I = 1/2$, а I_3 принимает два значения $\pm 1/2$.

Представим себе ситуацию, когда мы имеем несколько, например, S нуклонов, состояния которых определяются числами $A_1, A_2, A_3, \ldots A_S$, причем каждое $A_j = 1,2$. Так как волновую функцию такой системы $\psi_{A_1, A_2, \ldots A_S}$ можно сконструировать в виде произведения волновых функций отдельных нуклонов, то преобразование такой функции будет иметь следующий вид

$$\psi \to \psi' = (U)_1 (U)_2 \cdots (U)_S\, \psi_{A_1, A_2, \ldots A_S} .$$

Здесь $(U)_j$ обозначает преобразование U, действующее только на индекс A_j. Поскольку $p' = Up$, $n' = Un$ с точки зрения сильных взаимодействий эквивалентны протону и нейтрону, то наше преобразование волновой функции системы нуклонов должно быть совместным с уравнениями движения и потому должно коммутировать с гамильтонианом системы (учитывающим, разумеется, лишь сильные взаимодействия).

Если рассмотреть бесконечно малое преобразование, т.е. считать, что каждое $U = 1 + \delta U$, то, очевидно, с точностью до первого порядка малости включительно

$$\delta\psi = \sum_{j=1}^{S} (\delta U)_j\, \psi ,$$

но так как

$$(\delta U)_j = i \sum_{\alpha=1}^{3} (\tau_\alpha)_j\, \delta\varphi_\alpha ,$$

то

$$\delta\psi = i \sum_{\alpha=1}^{3} \delta\varphi_\alpha \Big(\sum_{j=1}^{S} (\tau_\alpha)_j \Big) \psi .$$

Введем оператор суммарного изотопического спина системы S нуклонов

$$I_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{S} (\tau_\alpha)_j = I_\alpha^+$$

Тогда

$$\delta\psi = 2i \sum_{\alpha=1}^{3} \delta\varphi_\alpha\, I_\alpha\, \psi . \qquad /3.1/$$

Заметим, что так как каждый из операторов $(\tau_\alpha)_j$ действует только на переменные с индексом j, то отдельные слагаемые в I_α коммутируют друг с другом. Поэтому из правил коммутации для τ_α сразу следует, что

$$[I_\alpha, I_\beta]_- = I_\alpha I_\beta - I_\beta I_\alpha = i \sum_{\gamma=1}^{3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} I_\gamma$$

и оператор изотопического спина системы нуклонов обладает теми же свойствами, что и оператор I_α в случае одной частицы. Так как рассматриваемые преобразования коммутируют с гамильтонианом, то с ним должны коммутировать и бесконечно малые преобразования, и мы приходим к закону сохранения изотопического спина $\vec{I}$.

Рассмотрим более подробно случай системы из двух нуклонов

$$\psi = \psi_{A_1,A_2}\,, \qquad I_\alpha = \frac{(\tau_\alpha)_1}{2} + \frac{(\tau_\alpha)_2}{2}\,.$$

Так как изотоп-спин одного нуклона равен 1/2, то квантовое число I принимает два значения: $I=0$ и $I=1$.

Выясним, каким состояниям системы двух нуклонов соответствует значение $I=0$ и каким – значение $I=1$. Произвольную двухнуклонную функцию ψ_{A_1,A_2} всегда можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной частей

$$\psi_{A_1,A_2} = \frac{\psi_{A_1,A_2} - \psi_{A_2,A_1}}{2} + \frac{\psi_{A_1,A_2} + \psi_{A_2,A_1}}{2} = \psi^{(a)}_{A_1,A_2} + \psi^{(s)}_{A_1,A_2}\,.$$

Покажем теперь, что изотопический спин состояния $\psi^{(a)}$ равен $I=0$, а состояния $\psi^{(s)}$ равен $I=1$.

Рассмотрим сначала антисимметричную комбинацию $\psi^{(a)}_{A_1,A_2}$. Она включает только две ненулевых компоненты, $\psi^{(a)}_{1,2}$ и $\psi^{(a)}_{2,1}$, и если ввести единичный антисимметричный тензор 2-го ранга

$$\epsilon_{A_1,A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

то ее можно представить в следующем виде

$$\psi^{(a)}_{A_1,A_2} = f\,\epsilon_{A_1,A_2}\,.$$

Покажем, что унитарное преобразование не изменяет величины ϵ_{A_1,A_2} (т.е. функции состояния $\psi^{(a)}_{A_1,A_2}$), т.е. что

$$(U)_1(U)_2\,\epsilon_{A_1,A_2} = U_{A_1,1}U_{A_2,2} - U_{A_1,2}U_{A_2,1} = \epsilon_{A_1,A_2}\,.$$

Действительно, полагая

$$A_1=A_2=1\,; \quad A_1=1,\ A_2=2\,; \quad A_1=2,\ A_2=1\,; \quad A_1=A_2=2\,,$$

мы сразу получим

$$U_{11}U_{12} - U_{12}U_{11} = 0 = \epsilon_{11}$$

$$U_{11}U_{22} - U_{12}U_{21} = \mathrm{Det}\,U = 1 = \epsilon_{12}$$

$$U_{21}U_{12} - U_{22}U_{11} = -\mathrm{Det}\,U = -1 = \epsilon_{21}$$

$$U_{21}U_{22} - U_{22}U_{21} = 0 = \epsilon_{22}\,.$$

Инвариантность функции $\psi^{(a)}_{A_1,A_2}$ относительно преобразований $(U)_1(U)_2$ означает, что для бесконечно малых преобразований

$$\delta\big((U)_1(U)_2\big)\psi^{(a)}_{A_1,A_2} = 2i\sum_{\alpha=1}^{3}\delta\varphi_\alpha I_\alpha\,\epsilon_{A_1,A_2} f = 0$$

при любых $\delta\varphi_\alpha$, а это значит, что $I_\alpha \psi^{(a)} = 0$ для каждого α, т.е. что собственные значения всех I_α равны нулю. Отсюда и собственное значение оператора $\vec{I}^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} I_\alpha^2$ равно нулю, т.е. $I = 0$.

Рассмотрим теперь симметричную комбинацию $\psi^{(S)}_{A_1,A_2}$. Так как $\psi^{(S)}_{1,2} = \psi^{(S)}_{2,1}$, то общую функцию $\psi^{(S)}_{A_1,A_2}$ можно представить в виде разложения

$$\psi^{(S)}_{A,B} = \psi_{1,1}\,\delta(A-1)\delta(B-1) + \psi_{1,2}\{\delta(A-1)\delta(B-2)+\delta(A-2)\delta(B-1)\} + \psi_{2,2}\,\delta(A-2)\,\delta(B-2).$$

Так как

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad I_3 = \frac{1}{2}(\tau_3)_1 + \frac{1}{2}(\tau_3)_2,$$

то мы получаем

$$\left.\begin{aligned} I_3\psi^{(S)}_{1,1} &= \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\psi^{(S)}_{1,1} = 1\cdot\psi^{(S)}_{1,1} \\ I_3\psi^{(S)}_{1,2} &= \left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)\psi^{(S)}_{1,2} = 0\cdot\psi^{(S)}_{1,2} \\ I_3\psi^{(S)}_{2,2} &= \left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)\psi^{(S)}_{2,2} = -1\,\psi^{(S)}_{2,2} \end{aligned}\right\},$$

т.е. функции $\psi^{(S)}_{1,1}$, $\psi^{(S)}_{1,2}$ и $\psi^{(S)}_{2,2}$ – собственные функции оператора I_3 с собственными значениями $(1, 0, -1)$. Отсюда следует, что симметричная функция $\psi^{(S)}_{A_1,A_2}$ соответствует состоянию с $I = 1$. Определим еще собственное значение оператора $(\vec{\tau})_1(\vec{\tau})_2$. Имеем

$$\vec{I}^2 = \frac{1}{4}\left\{((\vec{\tau})_1)^2 + 2(\vec{\tau})_1(\vec{\tau})_2 + ((\vec{\tau})_2)^2\right\} = \frac{1}{4}\left\{3 + 2(\vec{\tau})_1(\vec{\tau})_2 + 3\right\} = \frac{3+(\vec{\tau})_1(\vec{\tau})_2}{2}.$$

Но собственное значение оператора $\vec{I}^2$ в случае $I = 1$ равно $I(I+1)=2$, и поэтому для симметричной функции собственное значение оператора $(\vec{\tau})_1(\vec{\tau})_2$ есть единица:

$$(\vec{\tau})_1(\vec{\tau})_2\,\psi^{(S)} = 1\cdot\psi^{(S)}.$$

Рассмотрим теперь систему из трех нуклонов

$$\psi = \psi_{A_1,A_2,A_3}; \qquad I_\alpha = \frac{1}{2}(\tau_\alpha)_1 + \frac{1}{2}(\tau_\alpha)_2 + \frac{1}{2}(\tau_\alpha)_3.$$

В этом случае по теореме о сложении моментов возможны случаи $I = 3/2$ и $I = 1/2$.

Нетрудно показать, что симметричная функция $\psi^{(S)}_{A_1,A_2,A_3}$ индексов A_1, A_2, A_3 будет соответствовать случаю $I = 3/2$. Действительно, подействуем на такую функцию оператором

$$\vec{I}^2 = \frac{1}{4}\left\{(\vec{\tau})_1 + (\vec{\tau})_2 + (\vec{\tau})_3\right\}^2 = \frac{1}{4}\left\{3+3+3+2(\vec{\tau})_1(\vec{\tau})_2 + 2(\vec{\tau})_2(\vec{\tau})_3 + 2(\vec{\tau})_3(\vec{\tau})_1\right\}.$$

Так как функция $\psi^{(S)}_{A_1,A_2,A_3}$ симметрична по всем индексам, то она симметрична и по любой паре индексов, а поэтому

$$(\vec{\tau})_1(\vec{\tau})_3\psi^{(S)}=1\cdot\psi^{(S)};\quad (\vec{\tau})_2(\vec{\tau})_3\psi^{(S)}=1\cdot\psi^{(S)};\quad (\vec{\tau})_2(\vec{\tau})_1\psi^{(S)}=1\cdot\psi^{(S)},$$

откуда следует, что собственное значение оператора $\vec{I}^2$ будет равно

$$I(I+1)=\frac{15}{4}=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\qquad\text{, т.е.}\quad I=3/2.$$

Выясним теперь, какого вида волновые функции соответствуют случаю $I=1/2$. Заметим, что если сумма двух слагаемых в выражении

$$I_\alpha=\frac{1}{2}(\tau_\alpha)_1+\frac{1}{2}(\tau_\alpha)_2+\frac{1}{2}(\tau_\alpha)_3,$$

действуя на волновую функцию трех частиц, дает нуль, то благодаря третьему слагаемому в I_α изотопический спин соответствующего состояния будет равен $I=1/2$. Как мы уже видели

$$\left\{(\tau_\alpha)_1+(\tau_\alpha)_2\right\}\epsilon_{A_1,A_2}=0$$

и потому для функции

$$\epsilon_{A_1,A_2}f_{A_3}$$

имеем $I=1/2$. Переставляя индексы A_1, A_2, A_3 по круговой перестановке и заменяя f_A на другие функции g_A, h_A получим еще две волновых функции с половинным изотопическим спином

$$\epsilon_{A_2,A_3}g_{A_1};\qquad \epsilon_{A_3,A_1}h_{A_2}.$$

Таким образом, общее выражение для волновой функции трех нуклонов с $I=1/2$ будет:

$$\psi^{(I=1/2)}_{A_1,A_2,A_3}=\epsilon_{A_1,A_2}f_{A_3}+\epsilon_{A_2,A_3}g_{A_1}+\epsilon_{A_3,A_1}h_{A_2}. \qquad /3.2/$$

Сколько независимых компонент должна иметь функция $\psi^{(I=1/2)}_{A_1,A_2,A_3}$? Ясно, что произвольная функция ψ_{A_1,A_2,A_3} имеет всего $2^3=8$ компонент. Функция со спином $I=3/2$ полностью симметрична и потому должна зависеть от 4 компонент. Действительно, такими компонентами могут быть выбраны, например, $\psi^{(3/2)}_{1,1,1}$, $\psi^{(3/2)}_{1,1,2}$, $\psi^{(3/2)}_{1,2,2}$, $\psi^{(3/2)}_{2,2,2}$, а остальные равны одной из этих четырех в силу полной симметрии. Следовательно на долю $\psi^{(1/2)}_{A_1,A_2,A_3}$ остается 4 независимых компоненты, а выражение /3.2/ формально содержит 6 компонент, по две компоненты на каждую из функций f_A, g_A, h_A.

Однако, легко показать, что для произвольной функции χ имеет место следующее тождество:

$$\epsilon_{A_1,A_2}\chi_{A_3}+\epsilon_{A_2,A_3}\chi_{A_1}+\epsilon_{A_3,A_1}\chi_{A_2}=0. \qquad /3.3/$$

Действительно, раз $A_1, A_2, A_3=1,2$, то или все индексы равны: $A_1=A_2=A_3$, или равны два из них. В первом случае написанное тождество тривиально, так как тогда все ϵ равны нулю. Рассматривая второй случай, возьмем, например, $A_1=A_2\neq A_3$ и получим:

$$A_1 = A_2 = 1; A_3 = 2; \ \epsilon_{1,2} X_1 + \epsilon_{2,1} X_1 = X_1 - X_1 = 0,$$

$$A_1 = A_2 = 2, \ A_1 = 1; \quad \epsilon_{2,1} X_2 + \epsilon_{1,2} X_2 = - X_2 + X_2 = 0.$$

Полагая $X_A = h_A$ и вычитая тождество /3.3/ из выражения для $\psi^{(1/2)}_{A_1,A_2,A_3}$, найдем:

$$\psi^{(I=1/2)}_{A_1,A_2,A_3} = \epsilon_{A_1,A_2} F_{A_3} + \epsilon_{A_2,A_3} G_{A_1} ,$$

где

$$F_A = f_A - h_A ; \quad G_A = g_A - h_A .$$

Таким образом, рассматриваемая волновая функция для I =1/2 действительно имеет четыре независимых компоненты /по две для каждой из F_A , G_A /.

§ 4.

Приведем теперь некоторые определения из теории групп, которые в дальнейшем могут быть использованы.

Рассмотрим группу G , элементы которой

$$g = g(a_1, \dots, a_m)$$

характеризуются m вещественными параметрами $a_1, \dots, a_m$ и возьмем некоторое линейное пространство E векторов

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

Подчеркнем, что n (размерность линейного пространства E) не обязано быть равным m (размерности самой группы G).

Пусть в E действует совокупность линейных преобразований, такая, что каждому элементу g группы G соответствует одно определенное преобразование $T(g)$:

$$x \to x' = T(g) x .$$

Причем

$$T(g_1) T(g_2) = T(g_1 g_2)$$
$$T(e) = 1$$

где e - единичный элемент группы G .

В этом случае говорят, что преобразования T пространства E образуют линейное представление группы G .

Пусть для элемента группы, бесконечно близкого к единичному

$$g = e + \delta g$$

соответствующий оператор имеет вид:

$$T(e + \delta g) = 1 + \delta T = 1 + \sum_{r=1}^{m} \delta a_r X_r .$$

Тогда X_r называются инфинитезимальными операторами, или генераторами.

Как видно из приведенных определений, мы уже имели дело с линейными представлениями группы SU_2. Линейное пространство E было у нас образовано волновыми функциями:

$$x = \{\psi^{(I)}_{A_1, A_2, \dots, A_S}\} , \qquad A_j = 1,2$$

системы S нуклонов.

Каждому U из SU_2 сопоставлялся унитарный оператор

$$T(U) = (U)_1 (U)_2 \ldots (U)_s$$

преобразования

$$x \to x' = T(U)x.$$

Ясно, что единичному элементу группы SU_2

$$U = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

соответствует тождественное преобразование: $x' = x$.

Далее, произведение двух преобразований $T(U)T(V)$ будет

$$T(U)T(V) = (U)_1 \ldots (U)_s (V)_1 \cdots (V)_s = (UV)_1 \ldots (UV)_s = T(UV),$$

так как матрицы $(U)_j$ и $(V)_k$, действующие на <u>разные</u> индексы, между собой коммутируют. Наконец, из /3.1/ мы видим, что инфинитезимальными операторами для наших линейных представлений являются компоненты изотопического спина.

Остановимся теперь на понятии приводимости представления. Линейное представление группы называется приводимым, если в данном линейном пространстве можно найти линейное многообразие меньшего числа измерений, которое преобразуется само в себя. В противном случае представление называется неприводимым.

Рассмотрим вопрос о приводимости линейных представлений группы SU_2.

Пусть E будет соответствующее линейное пространство векторов, в котором действуют преобразования $T(U)$.

Если векторы из E не обладают все одним определенным значением изотопического спина, то данное представление будет приводимым.

В самом деле, выделим в E линейное подпространство E_I всех векторов с каким-то одним значением I изотопического спина.

Так как все инфинитезимальные операторы I_α коммутируют с $\vec{I}^2$, то конечные преобразования $T(U)$ также коммутируют с $\vec{I}^2$ и тем самым не изменяют значения изотопического спина. Следовательно, E_I будет преобразовываться само в себя и наше линейное представление в E оказывается приводимым.

Пусть теперь все вектора E обладают одним определенным значением I изотопического спина. Тогда можно показать, что соответствующее линейное представление будет неприводимым, если размерность E равна $2I + 1$. Для этого заметим, прежде всего, что раз $T(U)$ переводит E само в себя, то таким же свойством будут обладать и инфинитезимальные операторы - компоненты изотопического спина I_α.

Возьмем в E некоторый ненулевой вектор ψ_j с определенным значением I_3:

$$I_3 \psi_j = j \psi_j.$$

Ясно при этом, что

$$-I \le j \le +I.$$

Но, в силу коммутационных соотношений:

$$(I_1 + i I_2) I_3 = (I_3 - 1)(I_1 + i I_2)$$

$$(I_1 - i I_2) I_3 = (I_3 + 1)(I_1 - i I_2).$$

Следовательно,

$$(I_3 - 1)(I_1 + i I_2)\psi_j = j(I_1 + i I_2)\psi_j$$

и потому:
$$I_3 \psi_{j+1} = (j+1)\psi_{j+1} ,$$
где
$$\psi_{j+1} = (I_1 + i I_2)\psi_j .$$
Совершенно аналогично найдем:
$$I_3 \psi_{j-1} = (j-1)\psi_{j-1} ,$$
где
$$\psi_{j-1} = (I_1 - i I_2)\psi_j .$$
С другой стороны
$$(I_1 - iI_2)\psi_{j+1} = (I_1 - iI_2)(I_1 + iI_2)\psi_j =$$
$$= \left(I_1^2 + I_2^2 + i(I_1 I_2 - I_2 I_1)\right)\psi_j = (\vec{I}^2 - I_3^2 - I_3)\psi_j =$$
$$= \left(I(I+1) - j^2 - j\right)\psi_j .$$
Поэтому
$$\psi_{j+1} \neq 0 ,$$
если
$$j < I .$$
Таким же образом убедимся, что $\psi_{j-1} \neq 0$,

если
$$j > -I .$$
Последовательным построением "вверх" от j
$$\psi_{j+k+1} = (I_1 + iI_2)\psi_{j+k} \qquad k \geq 0$$
и "вниз" от j :
$$\psi_{j-k-1} = (I_1 - iI_2)\psi_{j-k} , \qquad k \geq 0$$
получим совокупность отличных от нуля векторов:
$$\psi_{-I} , \psi_{-I+1} , \dots , \psi_I$$
соответственно $2I+1$ возможным собственным значениям I_3 .

Но раз E содержит эти ортогональные вектора, то оно содержит и $(2I+1)$ -мерное линейное многообразие E' их суперпозиций:
$$\sum_{(-I \leq j \leq I)} c_j \psi_j .$$

Таким образом размерность E не может быть меньше $2I+1$, и поэтому, если она равна $2I+1$, то линейное представление неприводимо.

В общем случае тем же способом можно показать, что размерность E равна $(2I+1)K$, где K - целое число и поэтому линейное представление SU_2 в E распадается на K неприводимых представлений.

Проиллюстрируем теперь эти выводы на примере волновых функций системы нуклонов.

Рассмотрим двухчастичные функции ψ_{A_1, A_2} общего вида. Соответствующее линейное пространство E "векторов"

$$\left\{ \psi_{A_1, A_2} \right\}$$

очевидно, 4-мерно. Поскольку произвольная функция ψ_{A_1, A_2} не обладает определенным изотопическим спином, данное линейное представление приводимо.

Но, как мы уже видели, произвольную функцию ψ_{A_1, A_2} всегда можно представить в виде суммы

$$\psi_{A_1, A_2} = f\, \epsilon_{A_1, A_2} + \psi^{(I=1)}_{A_1, A_2}$$

спиновой функции с нулевым изотопическим спином и функции $\psi^{(I=1)}_{A_1, A_2}$, симметричной по отношению к перестановкам идексов A_1, A_2.

Поэтому рассматриваемое линейное представление разбивается на два неприводимых представления – в одномерном пространстве функций

$$\left\{ f\, \epsilon_{A_1, A_2} \right\}$$

и в трехмерном пространстве функций

$$\left\{ \psi^{(I=1)}_{A_1, A_2} \right\}$$

симметричных по индексам A_1, A_2.

Символически это разбиение запишем в виде:

$$(2 \times 2) = (1) + (3).$$

Рассмотрим, наконец, линейное представление группы SU_2 в 8-мерном линейном пространстве произвольных волновых функций ψ_{A_1, A_2, A_3} системы трех нуклонов. Поскольку эти функции не обладают определенной величиной изотопического спина, данное представление приводимо.

Разобьем ψ на функции с $I = 1/2$ и $I = 3/2$:

$$\psi = \psi^{(3/2)} + \psi^{(1/2)}.$$

Пространство $E_{3/2}$ состоит из всех симметрических функций ψ трех индексов и потому имеет размерность 4. Поскольку $4 = 2 (3/2) + 1 = 2I + 1$, видим, что на $E_{3/2}$ реализуется неприводимое представление.

Далее, как мы видели,

$$\psi^{(1/2)}_{A_1, A_2, A_3} = \epsilon_{A_1, A_2} F_{A_3} + \epsilon_{A_2, A_3} G_{A_1}$$

и соответствующее пространство $E_{1/2}$ четырехмерно.

Следовательно, линейные представления SU_2 на $E_{1/2}$ разбиваются на два неприводимых представления второго порядка.

Как видно, эти неприводимые представления могут быть реализованы на пространствах из элементов вида:

$$\left\{ \epsilon_{A_1, A_2} F_{A_3} \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \epsilon_{A_2, A_3} G_{A_1} \right\}.$$

Таким образом, имеем разложение:

$$(2 \times 2 \times 2) = (4) + (2) + (2).$$

§ 5

До сих пор мы рассматривали только протон и нейтрон. Включим теперь в рассмотрение также и античастицы, функции состояния которых будем обозначать знаком комплексного сопряжения $\bar{\psi}^{(A)} = \psi_A^*$; $A = 1$ для антипротона, $A = 2$ для антинейтрона, т.е. индексом снизу мы отмечаем состояния нуклона, а индексом сверху состояния антинуклона. Из преобразования функций частиц

$$\psi_A' = \sum_{B=1}^{2} U_{AB} \psi_B ,$$

или сокращенно

$$\psi' = U \psi$$

получаем, выполняя комплексное сопряжение, преобразование функций античастиц

$$\bar{\psi}'^{(A)} = \sum_{B=1}^{2} U_{A,B}^* \bar{\psi}^{(B)} = \sum_{B=1}^{2} \bar{\psi}^{(B)} \overset{+}{U}_{B,A} ,$$

или сокращенно

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} \overset{+}{U} .$$

Рассмотрим теперь систему нуклон+антинуклон. Волновую функцию такой системы обозначим P_A^B, где нижний индекс фиксирует состояние нуклона, а верхний – состояние антинуклона. Мы вводим индекс сверху для того, чтобы не путать функции P_{AB} системы двух нуклонов с функциями P_A^B системы нуклон+ антинуклон. Преобразование функции P_A^B имеет вид

$$P_A^B \to P_A'^B = \sum_{(C,D)} U_{AC} P_C^D \overset{+}{U}_{DB} , \qquad (C, D = 1, 2) ,$$

т.е. $P' = UP\overset{+}{U}$. Чтобы выяснить правила сложения операторов изотоп–спина в системе нуклон+антинуклон, рассмотрим бесконечно малое преобразование $U = 1 + \delta U$. Имеем

$$\delta P = \delta U \cdot P + P \cdot \delta \overset{+}{U} ,$$

но

$$\delta U = i \sum_{\alpha=1}^{3} \delta \varphi_\alpha \tau_\alpha$$

и вследствие эрмитовости матриц τ_α :

$$\delta \overset{+}{U} = -i \sum_{\alpha=1}^{3} \delta \varphi_\alpha \tau_\alpha = -\delta U .$$

Поэтому

$$\delta P = i \sum_{\alpha=1}^{3} \delta \varphi_\alpha (\tau_\alpha P - P \tau_\alpha) = 2i \sum_{\alpha=1}^{3} \delta \varphi_\alpha \left(\left(\frac{\tau_\alpha}{2}\right) P - P \left(\frac{\tau_\alpha}{2}\right) \right) =$$
$$= 2i \sum_{\alpha=1}^{3} \delta \varphi_\alpha (I_\alpha P) .$$

Таким образом, оператор изотопического спина системы нуклон–+антинуклон представляет разность операторов $\tau_\alpha/2$ для нуклона и антинуклона, действующих на функцию P соответственно слева направо и справа налево. Нетрудно проверить, что операторы I_α эрмитовы и удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и операторы изотоп-спина для системы одних нуклонов. Очевидно также, что суммарный изотоп-спин системы нуклон+ антинуклон может иметь значения

$$I = 1/2 - 1/2 = 0 \quad \text{или} \quad I = 1/2 + 1/2 = 1.$$

Поэтому линейное представление группы SU_2 на четырехкомпонентных P_A^B, не обладающих определенным значением I, приводимо.

Заметим, теперь, что величина

$$Sp\,P = \sum_{A=1}^{2} P_A^A$$

является инвариантной по отношению к рассматриваемым преобразованиям:

$$Sp\,P' = Sp(UP\overset{+}{U}) = Sp(\overset{+}{U}UP) = Sp\,P\,.$$

Поэтому условие неприводимости нетривиального линейного представления имеет вид:

$$Sp\,P = 0\,.$$

Рассматривая общий случай, напишем:

$$P_A^B = P_0\delta_A^B + (P_A^B - P_0\delta_A^B) = P_0\delta_A^B + Q_A^B\,.$$

Положив здесь

$$P_0 = \frac{1}{2}Sp\,P = \frac{1}{2}(P_1^1 + P_2^2)\,,$$

получим

$$Sp\,Q = 0\,. \qquad /5.1/$$

Ясно, что волновые функции

$$\psi_0 = P_0\,\delta_A^B = P_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}_A^B$$

соответствуют значению $I = 0$.

Действительно, как мы видели

$$(I_\alpha P)_A^B = \frac{1}{2}(\tau_\alpha P - P\tau_\alpha)_A^B$$

и так как τ_α коммутируют с единичной матрицей, то

$$(I_\alpha \psi_0) = 0\,, \qquad \alpha = 1,2,3.$$

Трехкомпонентные функции Q_A^B представляют состояния с $I = 1$. Поскольку сумма диагональных элементов Q равна нулю, мы можем написать

$$(Q_A^B) = \begin{pmatrix} b & c\\ a & -b\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

или

$$Q_A^B = a\delta(A-1)\delta(B-2) + b\{\delta(A-1)\delta(B-1) - \delta(A-2)\delta(B-2)\} + c\,\delta(A-2)\delta(B-1)\,.$$

Так как матрица τ_3 диагональна, то

$$(I_3 Q)_A^B = \frac{1}{2}\{(\tau_3)_{A,A} - (\tau_3)_{B,B}\}\,Q_A^B$$

и мы видим, что слагаемые в правой части разложения функции Q_A^B будут собственными функциями оператора I_3 для собственных значений 1, 0, –1 соответственно.

В заключение сделаем одно замечание относительно условий приводимости. Мы рассматривали здесь группу SU_2 и ее линейные представления. Если рассмотреть группу унитарных преобразований в n – мерном комплексном пространстве, такую, что $\overset{+}{U}U = 1$ и $Det\, U = 1$ (так называемую группу SU_n), условие неприводимости нетривиального линейного представления этой группы будет иметь тот же самый вид

$$Sp\, P = \sum_{(A)} P_A^A = 0. \qquad /5.2/$$

При этом условие неприводимости даже не зависит от того, является ли группа унимодулярной, т.е. выполняется ли условие $Det\, U = 1$.

Перейдем теперь к рассмотрению вопросов систематики псевдоскалярных мезонов и выпишем таблицу, содержащую некоторые экспериментальные данные:

	m (MeV)	$m^2 (BeV)^2$	Q	$Y = S (B = 0)$	I	I_3
π^+	139,6	0,019	+ 1	0	1	+ 1
π^0	135	0,018	0			0
π^-	139	0,019	– 1			– 1
K^+	494	0,244	+ 1	+ 1	1/2	1/2
K^0	498	0,248	0			–1/2
K^-	494	0,244	– 1	– 1	1/2	– 1/2
$\bar{K}^0$	498	0,248	0			1/2
η	549	0,301	0	0	0	0
X^0	959	0,920	0	0	0	0

Таблица 1.

Сюда мы не включили сведения о пределах экспериментальной ошибки в определении масс, о временах жизни и т.д. Подробную информацию об элементарных частицах и резонансах можно найти в таблицах, публикуемых Розенфельдом и др.

Начнем с рассмотрения триплета π –мезонов. Как видно, разность масс между $\pi^{\pm}$ и π^0 мала, так что ее можно отнести за счет электромагнитной поправки.

Поэтому в принятом приближении сильного взаимодействия массы π – мезонов считаются равными и мы имеем квантово-механическое вырождение. Еще в конце сороковых годов, когда другие мезоны, участвующие в сильных взаимодействиях, еще не были открыты, Ферми и Янг выдвинули предложение рассматривать π –мезоны как связанные состояния нуклона и антинуклона.

Такая модель представлялась весьма необычной. Действительно, суммарная масса нуклона и антинуклона равна примерно 1880 MeV . Наблюдаемая же масса π –мезона $\sim$ 140 MeV , следовательно дефект массы будет очень большим, порядка 1740 MeV . Поэтому в модели Ферми–Янга приходится считать, что силы притяжения между нуклоном и антинуклоном столь велики, что они "съедают" практически всю их массу.

Как и до сих пор, не будем явно учитывать зависимость волновых функций от пространственных и спиновых переменных и напишем:

$$P_A = \delta(A-1); \qquad n_A = \delta(A-2).$$

Тогда в модели Ферми-Янга π -мезоны ($\pi^{\pm}$, π^{0} и их суперпозиции) должны представляться волновыми функциями вида Q_A^B ,

где значок А соответствует нуклону, значок В – антинуклону. Так как для π -мезонов: I = 1, имеем:

$$Sp\,Q = Q_1^1 + Q_2^2 = 0.$$

Заметим, что в рассматриваемой схеме π^+ считается связанным состоянием p и $\bar{n}$; π^- – связанным состоянием n и $\bar{p}$. Поэтому, можно написать

$$(\pi^+)_A^B = \delta(A-1)\,\delta(B-2) \ ; \qquad I_3 = 1$$

$$(\pi^-)_A^B = \delta(A-2)\,\delta(B-1) \ ; \qquad I_3 = -1$$

Третья волновая функция, соответствующая I_3 = 0, ортогональная к этим двум, будет, как уже отмечалось:

$$\delta(A-1)\,\delta(B-1) - \delta(A-2)\,\delta(B-2).$$

Ее надо умножить на $1/\sqrt{2}$, чтобы удовлетворить условию нормировки

$$\sum_{(A,B)} \overset{*}{Q}{}_A^B\, Q_A^B = 1 .$$

Имеем, следовательно

$$(\pi^{\circ})_A^B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\delta(A-1)\,\delta(B-1) - \delta(A-2)\,\delta(B-2)\right\}.$$

Таким образом, сокращенно:

$$\begin{cases} \pi^+ = p\bar{n} \\ \pi^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p\bar{p} - n\bar{n}) \\ \pi^- = n\bar{p} \end{cases}$$

Произвольную волновую функцию Q_A^B , удовлетворяющую условию /5.1/, можно представить в виде разложения по написанным ортонормированным базисным функциям:

$$Q_A^B = C_{\pi^+}\,\delta(A-1)\delta(B-2) + C_{\pi^{\circ}}\frac{\delta(A-1)\delta(B-1) - \delta(A-2)\delta(B-2)}{\sqrt{2}} + C_{\pi^-}\,\delta(A-2)\delta(B-1).$$

Здесь C_{π^+}, $C_{\pi^{\circ}}$, C_{π^-} – представляют коэффициенты, с которыми реализуется суперпозиция π^+ , π° , π^- состояний. Обозначая соответствующие C_π просто как π , получаем в матричном виде

$$(Q_A^B) = \begin{pmatrix} \frac{\pi^{\circ}}{\sqrt{2}} , & \pi^- \\ \pi^+ , & -\frac{\pi^{\circ}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

Остановимся теперь на возможном развитии идей Ферми-Янга. Для этого введем в рассмотрение также и обычный спин нуклона, равный 1/2. В отличие от изотопического спина будем обозначать спин символом J . Для системы нуклон+ антинуклон суммарный спин может принимать значения или J = 0, что соответствует только что рассмотренному случаю псевдоскалярных π – мезонов, или J = 1, что соответствует семейству векторных мезонов. Такие мезоны действительно существуют, это $\rho^{\pm}$, ρ° мезоны с I = 1, J = 1 с массой 765 MeV (вследствие большой ширины резонанса разности масс $\rho^{\pm}$ и ρ° мезонов не измерены), а также ω – мезон с

$I = 0$, $J = 1$, и с массой 782 MeV.

Заметим сразу же, что массы ρ - мезонов много больше масс π - мезонов, т.е. дефект массы при образовании связанных состояний системы нуклон+антинуклон в случае параллельной ориентации обычных спинов ($J = 1$ для ρ - мезонов) оказывается значительно меньше, чем в случае антипараллельной ориентации спинов ($J = 0$ для π - мезонов).

Изотопический триплет ρ - мезонов можно рассмотреть совершенно аналогично триплету π - мезонов, и мы можем символически записать волновую функцию системы нуклон+антинуклон в состоянии с $I = 1$, $J = 1$ в виде матрицы

$$(P_A^B) = \begin{pmatrix} \rho^\circ/\sqrt{2}, & \rho^- \\ \rho^+, & -\rho^\circ/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \qquad Sp\, P = 0 .$$

Близость масс ω - мезона и ρ - мезонов наводит на мысль рассмотреть приближение, в котором массы ω и ρ мезонов считаются равными. Тогда ρ и ω мезоны естественно объединяются в одну четверку. Так как ω - мезон соответствует состоянию с $I = 0$, то базисная функция ω - состояния, ортогональная к трем введенным ранее функциям ρ - состояний, должна, как было выяснено ранее, иметь вид

$$(\omega)_A^B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\delta(A-1)\,\delta(B-1) + \delta(A-2)\,\delta(B-2) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\delta_A^B \right) .$$

Таким образом, ω - состояние - это изотопический синглет с $I = 0$, инвариантный относительно группы унитарных преобразований и имеющий шпур, не равный нулю. Сокращенно, можно записать

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(p\bar{p} + n\bar{n} \right) .$$

Тогда произвольная суперпозиция четырех состояний связанной пары нуклон+ антинуклон с $J = 1$ запишется в виде матриц:

$$(Q_A^B) = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho^\circ}{\sqrt{2}} + \dfrac{\omega}{\sqrt{2}}, & \rho^- \\ \rho^+ & -\dfrac{\rho^\circ}{\sqrt{2}} + \dfrac{\omega}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

Полученное представление не удовлетворяет условию неприводимости, так как теперь $Sp\, Q \neq 0$.

Можно однако объединить четверку ρ, ω мезонов вместе с триплетом π - мезонов в один "супермультиплет", соответствующий неприводимому представлению группы более высокого порядка.

Для этого будем учитывать зависимость волновых функций не только от индекса A, но также и от индекса σ, характеризующего проекцию обычного спина на ось Z:

$$\sigma = 1, \quad \text{для} \quad s_z = 1/2$$
$$\sigma = 2, \quad \text{для} \quad s_z = -1/2.$$

Тогда волновую функцию нуклона напишем в виде

$$\psi_{A,\sigma} \qquad A, \sigma = 1,2.$$

Мы имеем, таким образом, четырехмерное комплексное пространство $\{\psi_{A,\sigma}\}$.

Условие нормировки возьмем в форме:

$$\sum_{(A,\sigma)} \overset{*}{\psi}_{A,\sigma}\, \psi_{A,\sigma} = 1 . \qquad /5.3/$$

Рассмотрим линейные преобразования в нашем четырехмерном пространстве

$$\psi_{A,\sigma} \rightarrow \psi'_{A,\sigma} = \sum_{(B,s)} U_{A,\sigma;B,s}\, \psi_{B,s} , \qquad /5.4/$$

характеризуемые матрицами 4-го порядка:

$$U = \left(U_{A\sigma;B,s} \right) .$$

Ясно, что эти преобразования будут сохранять нормировку /5.3/, если выполнено условие унитарности:

$$\overset{+}{U} U = 1.$$

Исключая, как и раньше, градиентное преобразование, можем ограничиться преобразованиями, удовлетворяющими условию унимодулярности:

$$\mathrm{Det}\, U = 1.$$

Итак, мы приходим к рассмотрению группы SU_4 всех унитарных преобразований четырехмерного комплексного пространства, обладающих свойством унимодулярности.

Заметим, что группа SU_4 была впервые введена Вигнером для систематики ядерных уровней.

Для антинуклонов преобразования /5.4/ мы должны заменить на сопряженные:

$$\bar{\psi}^{(A,\sigma)} \rightarrow \bar{\psi}'^{(A,\sigma)} = \sum_{(B,s)} \bar{\psi}^{(B,s)}\, \overset{+}{U}_{B,s;A,\sigma} ,$$

т.е.

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi}\, \overset{+}{U} .$$

Мезоны, являющиеся связанными состояниями нуклона и антинуклона, представятся в принятой теперь схеме волновыми функциями вида:

$$Q^{B,s}_{A,\sigma} , \qquad /5.5/$$

где, как и раньше, нижние индексы соответствуют нуклону, а верхние - антинуклону. Закон преобразования волновых функций /5.5/ в группе SU_4 будет:

$$Q \rightarrow Q' = U Q \overset{+}{U} .$$

При этом условие неприводимости, согласно /5.2/, может быть представлено в форме:

$$\sum_{(A,\sigma)} Q^{A,\sigma}_{A,\sigma} = 0. \qquad /5.6/$$

Заметим теперь, что поскольку трансформационные свойства обычного и изотопического спина совершенно аналогичны, спиновое состояние пары нуклон-антинуклон при $J = 0$ будет описываться функцией δ^s_σ, а при $J = 1$ - функцией χ^s_σ, удовлетворяющей условию:

$$\sum_{(\sigma)} \chi^{\sigma}_{\sigma} = 0 . \qquad /5.7/$$

Рассмотрим компоненты $Q^{B,s}_{A,\sigma}$, соответствующие $J = 0$ и $J = 1$. На основании только что сказанного можем написать:

$$\overset{(0)}{Q}{}^{B,s}_{A,\sigma} = \overset{(0)}{Q}{}^{B}_{A}\, \delta^{s}_{\sigma} ; \qquad J = 0 \qquad /5.8/$$

$$\overset{(1)}{Q}{}^{B,s}_{A,\sigma} = \overset{(1)}{Q}{}^{B}_{A}\, \chi^{s}_{\sigma} \qquad J = 1 \qquad /5.9/$$

Благодаря условию /5.7/ условие неприводимости /5.8/ тривиально выполняется для компонент /5.9/:

$$\sum_{(A,\sigma)} \overset{(1)}{Q}{}^{A,\sigma}_{A,\sigma} = \sum_{(A)} \overset{(1)}{Q}{}^{A}_{A} \sum_{(\sigma)} \chi^{\sigma}_{\sigma} = 0 .$$

Никаких ограничений на $\overset{(1)}{Q}{}^{B}_{A}$ не возникает. Эта четырехкомпонентная функция характеризует четверку векторных ρ, ω мезонов.

Наоборот, подставляя /5.8/ в /5.6/ найдем:

$$\sum_{(A,\sigma)} \overset{(0)}{Q}{}^{A,\sigma}_{A,\sigma} = \sum_{(A)} \overset{(0)}{Q}{}^{A}_{A} \sum_{(\sigma)} \delta^{s}_{s} = 2 \sum_{(A)} \overset{(0)}{Q}{}^{A}_{A}$$

и потому $\overset{(0)}{Q}{}^{A}_{A}$ должны удовлетворять условию

$$\sum_{(A)} \overset{(0)}{Q}{}^{A}_{A} = 0 .$$

Таким образом, $\overset{(0)}{Q}{}^{B}_{A}$ соответствует $I = 1$ и описывает триплет π - мезонов.

По поводу группы SU_4 нужно сделать одно весьма существенное замечание.

Если бы действительно все рассматриваемые преобразования из SU_4 коммутировали с гамильтонианом системы, то все массы π, ω, ρ мезонов оказались бы равными.

Это утверждение является частным случаем следующего общего положения:

"Пусть мы имеем некоторый гамильтониан H и унитарные преобразования $T(U)$ волновых функций, коммутирующие с H.

Пусть далее на некотором линейном n - мерном подпространстве L волновых функций преобразования $T(U)$ образуют неприводимое представление группы G. Тогда все векторы подпространства L будут собственными функциями оператора H с одним и тем же собственным значением E".

Для доказательства рассмотрим линейное подпространство Λ_E всех собственных функций H:

$$H\Psi = E\Psi ,$$

соответствующих некоторому возможному значению E.

Нетрудно видеть, что:

$$HT(U)\Psi = T(U)H\Psi = ET(U)\Psi .$$

Таким образом, Λ_E является инвариантным, т.е. преобразуется само в себя под действием преобразований T. Поэтому, если бы в пространстве L оператор H не имел одного определенного собственного значения, то рассматриваемое представление оказалось бы приводимым, так как тогда L можно было бы разбить на инвариантные подпространства, соответственно различным значениям E.

Возвращаясь к нашему случаю неприводимого представления группы SU_4, мы видим, что вывод о равенстве масс π и ω, ρ мезонов весьма далек от действительности. Мы должны поэтому предположить, что симметрия группы SU_4 нарушается из-за зависимости сил притяжения, связывающих нуклон с антинуклоном, от полного спина J. Масса m_J будет тогда принимать два значения: m_0 - для π - мезонов и m_1 - для ρ и ω мезонов.

§ 6.

Рассматривавшаяся выше модель Ферми-Янга, очевидно, недостаточна для систематики мезонов. Действительно, к стабильным частицам и наиболее низко лежащим резонансам относятся девять псевдоскалярных мезонов ($J = 0$) и 9 векторных мезонов ($J = 1$). Чтобы представить их все как связанные состояния частицы и античастицы, надо иметь по крайней мере три основных частицы: 3 x 3 = 9.

В 1956 г. Саката предложил модель, в которой за основные частицы принимаются p, n и λ - гиперон:

	m (MeV)	S	$Y = B + S$	I	I_3
p	938,2	0	1	1/2	1/2
n	939,5	0	1		-1/2
λ	1115	-1	0	0	0

Таблица 2. Триплет Саката.

В этой модели мезоны считаются связанными состояниями бариона и антибариона из триплетов (p , n , λ); ($\bar{p}$, $\bar{n}$, $\bar{\lambda}$). Таким образом, получим 9 мезонов с $J=0$ (при антипараллельной ориентации обычных спинов) и 9 мезонов с $J=1$ (при параллельной ориентвции).

Займемся, прежде всего, систематикой псевдоскалярных мезонов и не будем пока явно учитывать обычный спин в соответствующих волновых функциях.

Введем индекс А = 1,2,3, характеризующий протонное, нейтронное и λ - гиперонное состояние "Сакатона".

$$p_A = \delta(A-1), \qquad n_A = \delta(A-2), \qquad \lambda_A = \delta(A-3).$$

Мезоны представим волновыми функциями

$$Q_A^B ; \qquad (A,B = 1,2,3) \qquad /6.1/$$

с индексом бариона А и антибариона В.

Заметим далее, что в девятку (или, как теперь говорят, в нонет) мезонов каждый мезон входит со своей античастицей. Так, электрически нейтральные π^0, η, X^0 являются каждый своей собственной античастицей, античастицами будут взаимно (π^+, π^-), (K^+, K^-), $(K^0, \bar{K}^0)$. Поэтому мы наложим на волновые функции /6.1/ условие самосопряженности:

$$Q^+ = Q$$

т.е.

$$\overset{*}{Q}{}_A^B = Q_B^A . \qquad /6.2/$$

Построим теперь, по аналогии с группой SU_2, группу SU_3 , исходя из триплета Саката.

Надо сразу же подчеркнуть, что если в приближении сильного взаимодействия совершенно естественно приписать p и n одну массу, то в триплете Саката положение иное. Масса λ больше массы нуклона на 176 MeV , и мы не можем считать, что этот триплет квантово-механически вырожден. Поэтому и симметрия группы SU_3 , которую мы построим, будет соответственно нарушена. Как теперь говорят , она будет нарушена "умеренно сильными" взаимодействиями, тогда как симметрия группы SU_2 нарушается лишь электромагнитными и слабыми взаимодействиями. Не будем пока заниматься этим вопросом и подойдем к построению SU_3 чисто формально.

Рассмотрим произвольные суперпозиции трех состояний "Сакатона". Волновые функции

$$\psi_A = C_1 p_A + C_2 n_A + C_3 \lambda_A$$

образуют трехмерное комплексное пространство.

Условие нормировки будет:

$$\sum_{A=1}^{3} |\psi_A|^2 = |C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 = 1.$$

Рассмотрим в этом трехмерном пространстве группу U_3 всех унитарных преобразований:

$$\psi \to \psi' = U\psi ; \qquad \overset{+}{U}U = 1.$$

Как и в § 3, найдем:

$$Det\overset{+}{U} \cdot Det U = |Det U|^2 = 1,$$

или

$$Det U = e^{i\varphi},$$

где φ – некоторое вещественное число.

Если теперь перейти к преобразованию V:

$$U = Ve^{i\frac{\varphi}{3}},$$

то

$$e^{i\varphi} = Det U = Det(Ve^{i\frac{\varphi}{3}}) = e^{i\varphi} \cdot Det V,$$

и потому

$$Det V = 1.$$

Таким образом, любое из рассматриваемых преобразоааний можно представить в виде произведения унитарного унимодулярного преобразования V и градиентного преобразования:

$$\psi \to \psi e^{i\frac{\varphi}{3}}.$$

Исключая это градиентное преобразование, соответствующее сохранению барионного заряда, получим специальную унитарную группу SU_3 всех унитарных унимодулярных преобразований в трехмерном комплексном пространстве:

$$\overset{+}{U}U = 1, \qquad Det U = 1.$$

Выясним сейчас, от скольких параметров зависят элементы U группы SU_3. Заметим, что так как U^+ и U коммутируют

$$\overset{+}{U}U = U\overset{+}{U} = 1,$$

то, обращаясь с ними как с C – числами, напишем:

$$\ln U + (\ln U)^+ = 0$$

и потому, положив

$$\ln U = iH,$$

видим, что матрица H будет эрмитовой

$$\overset{+}{H} = H.$$

Таким образом, рассматриваемые матрицы U можно представить в виде

$$U = e^{iH}, \qquad /6.3/$$

где H – эрмитова матрица 3-го ранга. Ясно также, что все матрицы вида /6.3/ с эрмитовой H будут унитарны.

Покажем теперь, что

$$Det U = e^{i Sp H},$$

откуда будет следовать, что

$$SpH = 0, \text{ если } \quad DetU = 1.$$

Для этого представим экспоненциальный оператор в виде

$$e^{iH} = \lim_{N \to \infty} \left\{ \left(1 + \frac{iH}{N}\right)^N \right\}.$$

Так как детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов этих матриц, то

$$Det \left\{ \left(1 + \frac{iH}{N}\right)^N \right\} = \left\{ Det \left(1 + \frac{iH}{N}\right) \right\}^N$$

Произведем разложение $Det(1 + {}^{iH}/_{N})$ в ряд по $^1/_N$ с точностью до членов порядка $^1/_N$ включительно

$$Det\left(1 + \frac{iH}{N}\right) = 1 + \frac{i}{N} \sum_A H_{A,A} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) = 1 + \frac{i}{N} SpH + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

Переходя к пределу $N \to \infty$, получаем отсюда

$$Det\left(e^{iH}\right) = \lim_{N \to \infty} \left\{ Det\left(1 + \frac{iH}{N}\right)^N \right\} =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \left\{ 1 + \frac{i}{N} SpH + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right\}^N = e^{iSpH},$$

т.е. действительно

$$SpH = 0, \text{ если } \quad DetU = 1.$$

Заметим, что так как при доказательстве мы нигде не фиксировали размерность пространства, в котором действуют операторы U и H, то эти соотношения будут справедливы не только для нашей группы SU_3, но и для специальной унитарной группы SU_n любого порядка n. Так как $U = e^{iH}$, то числа независимых параметров, определяющих операторы U и H, совпадают. Подсчитаем число независимых вещественных параметров в матрице $H_{A,B}$ (A,B = 1,2, . . ., n), удовлетворяющей условиям

$$\overset{+}{H} = H \quad \text{и} \quad SpH = 0.$$

Эта матрица содержит $n(n-1)$ недиагональных комплексных элементов, которые зависят от $2n(n-1)$ вещественных параметров и должны удовлетворять $n(n-1)$ условиям.

$$H^*_{A,B} = H_{B,A} \quad ; \qquad A \neq B$$

т.е. недиагональные элементы содержат $n(n-1)$ независимых вещественных параметров. Диагональные элементы в силу условия

$$H^*_{A,A} = H_{A,A}$$

представляют n вещественных параметров, которые должны удовлетворять условию

$$SpH = \sum_{(A)} H_{A,A} = 0,$$

т.е. представляют $(n-1)$ независимых вещественных параметров. Таким образом, мы получаем, что преобразование группы SU_n определяется числом

$$n(n-1)+(n-1)=n^2-1$$

независимых вещественных параметров. Для рассматриваемой нами группы SU_3 число независимых вещественных параметров равно $9-1=8$, для группы SU_4 : $16-1=15$ и т.д.

Рассмотрим бесконечно-малое преобразование группы SU_3

$$U=e^{i\delta H}=1+i\delta H=1+\delta U$$

$$\delta\psi=(\delta U)\psi=i\delta H\psi.$$

Так как δH зависит от восьми независимых действительных бесконечно-малых параметров δa_r, то

$$\delta\psi=i\sum_{r=1}^{8}\delta a_r X_r\psi,$$

причем генераторы X_r группы SU_3 должны удовлетворять условиям $X_r^+=X_r$; и $Sp X=0$ для всех $r=1,2,\dots 8$.

Мы рассматривали сейчас преобразования волновых функций для частиц из триплета Саката

$$\psi\to\psi=U\psi.$$

Соответствующие сопряженные преобразования для античастиц будут

$$\bar\psi\to\bar\psi'=\bar\psi\overset{+}{U}.$$

Поэтому, закон преобразования мезонных волновых функций будет:

$$Q_A^B\to Q_A'^B=\sum_{(C,D)}U_{AC}\,Q_C^D\,\overset{+}{U}_{DB}; \qquad (C,Д=1,2,3),$$

т.е.

$$Q\to Q'=UQ\overset{+}{U}.$$

Так как

$$(UQ\overset{+}{U})^+=U\overset{+}{Q}\overset{+}{U},$$

то нетрудно убедиться, что эрмитовость /6.2/ матрицы Q сохраняется при всех рассматриваемых преобразованиях.

Напишем теперь условие неприводимости нетривиального линейного представления. Имеем соотношение

$$\sum_{A=1}^{3}Q_A^A=0,$$

благодаря которому матрица Q имеет 8 независимых компонент и соответствует октету мезонов.

Имеется еще тривиальное представление, реализуемое матрицей, пропорциональной единичной:

$$Q_A^B=P_0\delta_A^B=P_0\{\delta(A-1)\delta(B-1)+\delta(A-2)\delta(B-2)+\delta(A-3)\,\delta(B-3)\}.$$

Так как произвольная матрица P_A^B может быть представлена в виде суммы

$$P_A^B=P_0\delta_A^B+Q_A^B \quad, \text{ где } \quad Sp\,Q=0,$$

то выше 9-мерное представление разбивается на синглет и октет

$$3\times 3^*=(1)+(8).$$

Значок $*$ здесь указывает, что имеется в виду преобразование античастиц.

Построим теперь волновые функции для восьми мезонов из нашего октета так, чтобы квантовые числа для этих мезонов имели бы значения, соответствующие таблице 1. Целесообразно заметить здесь, что квантовые числа Q, Y, I_3 для античастицы имеют ту же абсолютную величину, что и для частицы, но имеют противоположный знак.

В § 5 мы уже сконструировали триплет π - мезонов из нуклонов и антинуклонов:

$$\pi^+ = p\bar{n}, \qquad \pi^0 = \frac{p\bar{p} - n\bar{n}}{\sqrt{2}}, \qquad \pi^- = n\bar{p}.$$

Легко проверить, что все квантовые числа имеют правильные значения.

Для описания K - мезонов используем λ и $\bar{\lambda}$. Имеем:

$$\begin{cases} K^+ = p\bar{\lambda}, & Q = 1,\ B = 0,\ Y = 1 \\ K^0 = n\bar{\lambda}, & Q = 0,\ B = 0,\ Y = 1. \end{cases}$$

Так как в обеих комбинациях участвует одна и та же $\bar{\lambda}$ - античастица, то сразу видим, что полученное семейство должно быть дублетом по изопеременным нуклона, т.е. имеем $I_3 = \pm 1/2$, $I = 1/2$. Аналогично получается сопряженный дублет K - мезонов:

$$\left.\begin{cases} K^- = \lambda\bar{p}, & Q = -1,\ B = 0,\ Y = -1,\ I_3 = -1/2 \\ \bar{K}^0 = \lambda\bar{n}, & Q = 0,\ B = 0,\ Y = -1,\ I_3 = 1/2 \end{cases}\right\} I = 1/2$$

Мы уже классифицировали 7 мезонов. Состояния нашего полного мультиплета мы должны описывать матрицей Q_A^B, которая в силу условия $\sum_{(A)} Q_A^A = 0$ должна иметь только 8 независимых компонент.

Выпишем в явном виде базисные волновые функции, по которым мы будет производить разложение функции Q_A^B, соответствующей произвольному состоянию октета мезонов. Имеем для π - мезонов

$$(\pi^+)_A^B = \delta(A-1)\,\delta(B-2)$$

$$(\pi^0)_A^B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\delta(A-1)\,\delta(B-1) - \delta(A-2)\,\delta(B-2)\right\}$$

$$(\pi^-)_A^B = \delta(A-2)\,\delta(B-1),$$

для K - мезонов

$$\begin{cases} (K^+)_A^B = \delta(A-1)\,\delta(B-3) \\ (K^0)_A^B = \delta(A-2)\,\delta(B-3) \end{cases} \qquad \begin{cases} (K^-)_A^B = \delta(A-3)\,\delta(B-1) \\ (\bar{K}^0)_A^B = \delta(A-3)\,\delta(B-2). \end{cases}$$

Легко проверить, что все эти семь функций ортогональны друг другу и нормированы, т.е.

$$\sum_{(A,B)} (x)_A^B\,(y)_A^B = \delta(x-y),$$

где

$$x, y = \pi^+, \pi^0, \pi^-, \ K^+, K^0, K^-, \bar{K}^0.$$

Последняя, восьмая базисная функция, должна быть ортогональна ко всем написанным. Как мы уже выяснили ранее, функция

$$\delta(A-1)\cdot\delta(B-1) + \delta(A-2)\cdot\delta(B-2)$$

ортогональна к π - функциям. Кроме того, она ортогональна, конечно, и к K - функциям, так как не содержит членов с A = 3 или B = 3. К ней можно добавить с некоторым коэффициентом комбинацию $\delta(A-3)\,\delta(B-3)$, которая также ортогональна ко всем этим функциям. Поэтому искомую восьмую функцию можно записать в виде

$$(8)_A^B = c\left\{\delta(A-1)\delta(B-1) + \delta(A-2)\delta(B-2) + \varkappa\,\delta(A-3)\,\delta(B-3)\right\}.$$

Чтобы удовлетворить условию $Sp\,(8) = \sum\limits_{(A)} (8)_A^A = 0$, надо положить $\varkappa = -2$, а условие нормировки определяет константу $c = 1/\sqrt{6}$.

Итак, восьмая базисная функция имеет вид

$$(8)_A^B = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\delta(A-1)\,\delta(B-1) + \delta(A-2)\delta(B-2) - 2\delta(A-3)\,\delta(B-3)\right\},$$

или, символически

$$(8) = \frac{p\bar{p} + n\bar{n} - 2\lambda\bar{\lambda}}{\sqrt{6}}.$$

Неясно только, какой мезон сопоставить этой комбинации? Ведь у нас на оставшееся восьмое место имеются два кандидата: η и χ°.
Квантовые числа этих мезонов одинаковы и у нас нет никаких логических оснований приписать *a priori* эту комбинацию η или χ° мезону.

Забегая вперед, укажем, что, когда в дальнейшем мы напишем массовую формулу, с помощью которой можно будет оценить массу частицы, соответствующей этой комбинации, мы увидим, что следует выбрать η - мезон. Учитывая это, запишем общую функцию нашего мультиплета в виде

$$\begin{aligned} Q_A^B = {} & C_{\pi^+}\,\delta(A-1)\delta(B-2) + C_{\pi^\circ}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\delta(A-1)\,\delta(B-1) - \delta(A-2)\delta(B-2)\big) + C_{\pi^-}\delta(A-2)\delta(B-1) + \\ & + C_{K^+}\,\delta(A-1)\,\delta(B-3) + C_{K^\circ}\delta(A-2)\,\delta(B-3) + \\ & + C_{K^-}\,\delta(A-3)\delta(B-1) + C_{\bar{K}^\circ}\,\delta(A-3)\,\delta(B-2) + \\ & + C_\eta\frac{1}{\sqrt{6}}\big(\delta(A-1)\delta(B-1) + \delta(A-2)\,\delta(B-2) - 2\delta(A-3)\delta(B-3)\big). \end{aligned} \qquad /6.4/$$

Эту функцию можно символически записать в виде (3 x 3) матрицы, записывая, как и ранее, вместо соответствующих коэффициентов C_{π^+}, C_{π^-} и т.д. просто π^+, π^- - и т.д. Таким образом, мы получаем символическое представление октета мезонов

$$\left(Q_A^B\right) = \begin{pmatrix} \frac{\pi^\circ}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}}, & \pi^-, & K^- \\ \pi^+, & -\frac{\pi^\circ}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}}, & \bar{K}^\circ \\ K^+, & K^\circ, & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix}. \qquad /6.5/$$

В такой записи автоматически учитываются условия

$$(\pi^+)^* = \pi^-, \quad (K^+)^* = K^-, \quad (K^\circ)^* = \bar{K}^\circ .$$

Кроме того, норма функции Q^B_A принимает вид

$$\sum_{(A,B)} \overset{*}{Q}{}^B_A Q^B_A = |\pi^+|^2 + |\pi^\circ|^2 + |\pi^-|^2 + |K^+|^2 + |K^\circ|^2 + |K^-|^2 + |\bar{K}^\circ|^2 + |\eta|^2 .$$

Если бы соответствующие инфинитезимальные операторы группы SU_3 коммутировали с гамильтонианом системы, то с ним коммутировали бы и конечные преобразования из нашего представления. Так как это представление неприводимо, то все массы мезонов из октета были бы равны.

Однако ничего похожего на равенство масс членов октета не обнаруживается.

В рассматриваемом приближении сильного взаимодействия, когда мы должны пренебрегать разностью масс внутри одного и того же изотопического мультиплета и работать поэтому с соответственно огрубленными значениями, мы имеем 3 разных массы:

	$m(MeV)$	$m^2(BeV)^2$
π	138	0,02
K	496	0,24
η	549	0,30

Таблица 3.

Заметим, что квадрат массы η мезона в 15 раз больше квадрата массы π мезона, т.е. различие очень велико.

Возьмем среднее значение квадрата массы в октете

$$\begin{aligned} & m^2_\pi \{|\pi^+|^2 + |\pi^\circ|^2 + |\pi^-|^2\} + \\ & + m^2_K \{|K^+|^2 + |K^\circ|^2 + |K^-|^2 + |\bar{K}^\circ|^2\} + \\ & + m^2_\eta |\eta|^2 . \end{aligned} \qquad /6.6/$$

Подчеркнем еще раз, что здесь символы $\pi^+, \pi^\circ, \ldots \eta$ обозначают коэффициенты $C_{\pi^+}, C_{\pi^\circ}, \ldots C_\eta$, т.е. проекции нашего октета Q на $\pi^+, \pi^\circ, \ldots \eta$ мезонные состояния (см. /6.4/).

Квадратичная форма /6.6/ была бы инвариантной по отношению к группе SU_3 только в случае:

$$m^2_\pi = m^2_K = m^2_\eta = m^2_\circ ,$$

Так как только в этом случае она бы равнялась инварианту

$$m^2_\circ \sum_{(A,B)} |Q^B_A|^2 .$$

Учтем теперь нарушение симметрии группы и подберем неинвариантную "массовую форму"

$$\sum_{(A,B)} M_{A,B} \overset{*}{Q}{}^B_A Q^B_A \qquad /6.7/$$

таким образом, чтобы она равнялась форме /6.6/.

Поскольку нарушение симметрии группы SU_3 обусловлено в схеме Саката тем, что масса λ больше массы нуклона, то естественно предположить, что $M_{A,B}$ отличается от некоторой постоянной m_o^2 лишь в том случае, когда один из индексов равен 3, т.е. для состояний λ и $\bar{\lambda}$ сакатовского триплета.

Считая добавки от λ и $\bar{\lambda}$ аддитивными, положим поэтому

$$M_{A,B} = m_o^2 + \Delta \cdot \delta(A-3) + \Delta \cdot \delta(B-3) . \qquad /6.8/$$

Подставив "массовый оператор" /6.8/ в массовую форму /6.7/, найдем

$$\sum_{(A,B)} M_{A,B} \overset{*}{Q}{}^B_A Q^B_A = m_o^2 \sum_{(A,B)} \overset{*}{Q}{}^B_A Q^B_A +$$

$$+ \Delta \left\{ \overset{*}{Q}{}^3_1 Q^3_1 + \overset{*}{Q}{}^3_2 Q^3_2 + \overset{*}{Q}{}^1_3 Q^1_3 + \overset{*}{Q}{}^2_3 Q^2_3 + 2 \overset{*}{Q}{}^3_3 Q^3_3 \right\} .$$

Отсюда, воспользовавшись /3.5/, убедимся, что эта форма будет равна

$$m_o^2 \left\{ |\pi^+|^2 + |\pi^0|^2 + |\pi^-|^2 + |K^+|^2 + |K^0|^2 + |K^-|^2 + |\bar{K}^0|^2 + |\eta|^2 \right\} +$$

$$+ \Delta \left\{ |K^+|^2 + |K^0|^2 + |K^-|^2 + |\bar{K}^0|^2 + \frac{4}{3} |\eta|^2 \right\} =$$

$$= m_o^2 \left\{ |\pi^+|^2 + |\pi^0|^2 + |\pi^-|^2 \right\} +$$

$$+ (m_o^2 + \Delta) \left\{ |K^+|^2 + |K^0|^2 + |K^-|^2 + |\bar{K}^0| \right\} +$$

$$+ (m_o^2 + \frac{4}{3} \Delta) |\eta|^2 .$$

Сравнивая эту форму с /6.6/, получим массовые соотношения

$$m_\pi^2 = m_o^2 ; \quad m_K^2 = m_o^2 + \Delta ; \qquad m_\eta^2 = m_o^2 + \frac{4}{3} \Delta .$$

Заменяя m_o^2 на m_π^2 и исключая Δ из двух последних соотношений, получаем известную массовую формулу Окубо и Гелл-Манна

$$m_\eta^2 - m_\pi^2 = \frac{4}{3} (m_K^2 - m_\pi^2) .$$

Подставляя сюда числовые значения m^2 в $(BeV)^2$ из таблицы 3, получаем

$$m_\eta^2 - m_\pi^2 = 0{,}28 ; \quad \frac{4}{3} (m_K^2 - m_\pi^2) = \frac{4}{3} \cdot 0{,}22 = 0{,}29 ,$$

т.е. имеем довольно хорошее согласие формулы Окубо иГелл-Манна с экспериментом. Теперь мы видим, что мы действительно правильно выбрали η – мезон в качестве члена нашего октета, т.к. в случае X^o – мезона мы имеем $m_{X^o}^2 - m_\pi^2 = 0{,}8$, что не согласуется с массовой формулой.

Таким образом, X°-мезон остается вне октета (π, K, η) и должен быть синглетом. Поэтому нормированная волновая функция X°-мезона имеет вид:

$$(X^\circ)_A^B = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\delta(A-1)\delta(B-1)+\delta(A-2)\delta(B-2)+\delta(A-3)\delta(B-3)\Big),$$

или символически

$$X^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(p\bar{p} + n\bar{n} + \lambda\bar{\lambda}) .$$

Подчеркиваем, что мы пока откладываем формальное введение операторов четности, зарядового сопряжения и других операторов, связанных с дискретными группами, хотя и говорим, например, о псевдоскалярности мезонов, т.е. об их отрицательной внутренней четности.

Перейдем теперь к рассмотрению векторных мезонов $(J = 1)$. Имеем опять девяти-компонентные волновые функции:

$$Q_A^B \quad ; \qquad\qquad A,B = 1,2,3$$

со свойством эрмитовости:

$$\overset{*}{Q}{}_A^B = Q_B^A .$$

Приведем таблицу, содержащую некоторые экспериментальные данные:

	$m(MeV)$	$m^2(BeV)^2$	$Y=S(B=0)$	I	I_3
ρ^+	765	0,585	0	1	+1
ρ°	765	0,585	0	1	0
ρ^-	765	0,585	0	1	-1
$\overset{*}{K}{}^+$	891	0,794	+1	$\frac{1}{2}$	1/2
$\overset{*}{K}{}^\circ$	891	0,794	+1	$\frac{1}{2}$	−1/2
$\overset{*}{K}{}^-$	891	0,794	−1	$\frac{1}{2}$	−1/2
$\overset{*}{\bar{K}}{}^\circ$	891	0,794	−1	$\frac{1}{2}$	1/2
ω	782	0,613	0	0	0
ϕ	1019	1,038	0	0	0

Таблица 4

Сравнивая квантовые числа Q, Y, I, I_3 для этих мезонов с квантовыми числами псевдоскалярных мезонов, мы замечаем полную аналогию. Имеем соответствие

$$\rho \leftrightarrow \pi$$
$$K^* \leftrightarrow K \ .$$

Двум оставшимся мезонам (ω, ϕ) можно было бы сопоставить (η, X)

Рассмотрим, прежде всего, классификацию векторных мезонов с точки зрения группы SU_3. Имеем тогда синглет, к которому следовало бы отнести либо ω, либо ϕ, и октет, соответствующий остальным восьми мезонам. Повторяя дословно все предыдущие рассуждения, мы опять получим массовую формулу Гелл-Манна и Окубо:

$$m_8^2 - m_\rho^2 = \frac{4}{3}(m_{K^*}^2 - m_\rho^2) \ ,$$

где индексом 8 мы обозначили восьмой член октета – ϕ или ω. Но из таблицы 4 находим, что в $(BeV)^2$:

$$m_8^2 - m_\rho^2 = \frac{4}{3}\, 0{,}21 = 0{,}28 \, .$$

С другой стороны

$$m_\omega^2 - m_\rho^2 = 0{,}03 \qquad\qquad m_\phi^2 - m_\rho^2 = 0{,}46$$

и мы видим, что ни ω, ни ϕ нельзя отнести к октету.

Таким образом, рассуждения, основанные на применении неприводимых представлений группы SU_3, которые привели к удовлетворительным результатам для псевдоскалярных мезонов, в данном случае не проходят.

Перейдем поэтому к вопросу классификации векторных мезонов на основе самых простых соображений, не связанных с группой SU_3.

Мы будем исходить из приближения, в котором пренебрегается разностью масс ω и ρ. Оно изучалось уже нами в рамках обобщенной модели Ферми-Янга. В такой схеме, как мы видели, ρ и ω мезоны можно рассматривать как связанные состояния нуклона и антинуклона:

$$\left.\begin{aligned} \rho^+ &= p\bar{n} \\ \rho^0 &= \frac{p\bar{p} - n\bar{n}}{\sqrt{2}} \\ \rho^- &= n\bar{p} \end{aligned}\right\} \qquad I = 1$$

$$\omega = \frac{p\bar{p} + n\bar{n}}{\sqrt{2}} \qquad\qquad I = 0 .$$

Эти представления ω и ρ состояний находятся в соответствии также с нашими предположениями о причинах расщепления масс в мультиплете. Действительно, мы предполагаем, что расщепление масс обусловлено присутствием в мезонных состояниях более тяжелых λ, $\bar{\lambda}$ частиц, нарушающих массовую симметрию внутри сакатовского триплета (антитриплета). Поэтому, поскольку мы рассматриваем приближение, в котором считается $m_\omega = m_\rho$, мы должны считать, что в построении ω – состояния не участвуют λ и $\bar{\lambda}$, но из нуклона и антинуклона можно построить [illegible] ния – один изотопический синглет и один изотопический триплет.

Перейдем теперь к мезонам типа K^*. Чтобы получить для них правильные значения Q, Y, I, I_3.

Мы должны положить так же, как и для K –мезонов:

$$\overset{*}{K}{}^{+} = p\bar{\lambda}; \quad \overset{*}{K}{}^{0} = n\bar{\lambda}; \quad \overset{*}{K}{}^{-} = \lambda\bar{p}; \quad \overset{*}{\bar{K}}{}^{0} = \lambda\bar{n}.$$

Таким образом, имеем 8 ортонормированных функций:

$$\begin{cases} (\rho^+)_A^B = \delta(A-1)\delta(B-2) \\ (\rho^0)_A^B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta(A-1)\delta(B-1) - \delta(A-2)\delta(B-2)\right) \\ (\rho^-)_A^B = \delta(A-2)\,\delta(B-1) \end{cases}$$

$$(\omega)_A^B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta(A-1)\delta(B-1) + \delta(A-2)\delta(B-2)\right)$$

$$\begin{cases} (\overset{*}{K}{}^{+})_A^B = \delta(A-1)\delta(B-3); \\ (\overset{*}{K}{}^{0})_A^B = \delta(A-2)\delta(B-3); \end{cases} \qquad \begin{cases} (\overset{*}{K}{}^{-})_A^B = \delta(A-3)\delta(B-1), \\ (\overset{*}{\bar{K}}{}^{0})_A^B = \delta(A-3)\delta(B-2). \end{cases}$$

Единственной 9-ой функцией, ортогональной ко всем этим восьми функциям, будет выражение, пропорциональное $\delta(A-3)\delta(B-3)$. Эта функция одна и остается на долю ϕ –мезона. Мы должны, следовательно, положить:

$$(\phi)_A^B = \delta(A-3)\,\delta(B-3)$$

или сокращенно:

$$\phi = \lambda\bar{\lambda}.$$

Как видно, произвольные функции $\mathcal{Q}_A^B$ $(A, B = 1,2,3)$ можно представить с помощью суперпозиции девяти ортонормированных выражений:

$$Q_A^B = c_{\rho^+}(\rho^+)_A^B + c_{\rho^0}(\rho^0)_A^B + c_{\rho^-}(\rho^-)_A^B + c_\omega(\omega)_A^B +$$
$$+ c_{\overset{*}{K}{}^+}(\overset{*}{K}{}^+)_A^B + c_{\overset{*}{K}{}^0}(\overset{*}{K}{}^0)_A^B + c_{\overset{*}{K}{}^-}(\overset{*}{K}{}^-)_A^B + c_{\bar{\overset{*}{K}}{}^0}(\bar{\overset{*}{K}}{}^0)_A^B + c_\phi(\phi)_A^B ,$$

или в матричной форме:

$$(Q_A^B) = \begin{pmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega}{\sqrt{2}}, & \rho^- , & \overset{*}{K}{}^- \\ \rho^+ , & -\frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega}{\sqrt{2}}, & \bar{\overset{*}{K}}{}^0 \\ \overset{*}{K}{}^+ , & \overset{*}{K}{}^0 , & \phi \end{pmatrix}$$

где, как и раньше, мы для сокращения обозначили комплексные числа $c_{\rho^+}, \dots$ символами соответствующих мезонов. Ясно также, что для эрмитовой матрицы Q числа c для нейтральных мезонов вещественны, а для пар (ρ^+, ρ^-), $(\overset{*}{K}{}^+, \overset{*}{K}{}^-)$, $(\overset{*}{K}{}^0, \bar{\overset{*}{K}}{}^0)$ взаимно сопряженны.

Перейдем теперь к получению соотношений между массами векторных мезонов, для чего построим среднее значение квадрата массы $(\overline{m^2})_9$ для рассматриваемого нонета Q_A^B :

$$(\overline{m^2})_9 := \sum_{(A,B)} M_{A,B} \, |Q_A^B|^2$$

Для $M_{A,B}$ мы воспользуемся той же формой, что и для октета псевдоскалярных мезонов:

$$M_{A,B} = m_1^2 + \Delta\delta(A-3) + \Delta\delta(B-3) .$$

Здесь $m_1^2 \neq m_0^2$ ввиду предполагаемой зависимости сил притяжения между частицей и античастицей от величины спина $J=0,1$. Имеем:

$$(\overline{m^2})_9 = m_1^2 \sum_{(A,B)} |Q_A^B|^2 + \Delta\{|Q_1^3|^2 + |Q_2^3|^2 + |Q_3^1|^2 + |Q_3^2|^2 + 2|Q_3^3|^2\} =$$
$$= m_1^2 \{|\rho^+|^2 + |\rho^0|^2 + |\rho^-|^2 + |\omega|^2\} +$$
$$+ (m_1^2 + \Delta)\{|\overset{*}{K}{}^+|^2 + |\overset{*}{K}{}^0|^2 + |\overset{*}{K}{}^-|^2 + |\bar{\overset{*}{K}}{}^0|^2\} +$$
$$+ (m_1^2 + 2\Delta)\, |\phi|^2$$

откуда и получаем массовые соотношения:

$$m_\rho^2 = m_1^2; \quad m_\omega^2 = m_1^2; \quad m_{K^*}^2 = m_1^2 + \Delta; \quad m_\phi^2 = m_1^2 + 2\Delta.$$

[illegible]

$\Delta = 0{,}22\,(BeV)^2$, и выберем $m_1^2 = 0{,}59\,(BeV)^2$, мы найдем следующие численные значения для квадратов масс в $(BeV)^2$:

$$m_\rho^2 = m_\omega^2 = 0{,}59; \qquad m_{K^*}^2 = 0{,}81; \qquad m_\phi^2 = 1{,}03.$$

Сравнивая их с экспериментальными значениями из таблицы 4, получаем удовлетворительное согласие. Наибольшее расхождение (0,59 вместо 0,613) имеется для ω -мезона, что совершенно естественно в принятом приближении: $m_\omega^2 \sim m_\rho^2$. Но и в данном случае ошибка в m_ω^2 составляет 4%, т.е. для самой m_ω ошибка составит всего 2%.

Заметим, кроме того, что из наших массовых соотношений получается:

$$\Delta = m_{K^*}^2 - m_\rho^2 = m_K^2 - m_\pi^2 .$$

На самом деле первая разность $\sim 0{,}21$, а вторая $\sim 0{,}22$, и мы имеем вполне удовлетворительное совпадение, особенно если учесть наличие экспериментальной ошибки в определении этих величин. Найденное "правило интервалов" было впервые эмпирически замечено Глэшоу. Это правило устанавливает связь между расщеплением масс в октете псевдоскалярных мезонов и в нонете векторных мезонов.

Как мы уже отмечали, нонет векторных мезонов соответствует приводимому представлению группы SU_3, так как шпур соответствующей матрицы Q_A^B не равен нулю. Нетрудно, однако, объединить этот нонет вместе с октетом псевдоскалярных мезонов в одно неприводимое представление более широкой группы и притом тем же способом, как и в случае обобщенной модели Ферми–Янга. Действительно, учтем явно в волновой функции триплета Саката кроме "унитарного" индекса $A = 1,2,3$ еще обычный спиновый индекс $\sigma = 1,2$. Приходим тогда к волновым функциям $\psi_{A,\sigma}$, образующим шестимерное комплексное пространство с нормой

$$\sum_{(A,\sigma)} |\psi_{A,\sigma}|^2 .$$

Рассмотрим специальную унитарную группу SU_6 всех унитарных преобразований U этого шестимерного пространства, удовлетворяющих условию унимодулярности

$$\mathrm{Det}\, U = 1$$

которое мы, как всегда, получим, исключая градиентные преобразования. Группу SU_6 предложили Гюрсей, Радикати, Пайс в 1964 г.

Теперь мезонные волные функции

$$Q_{A,\sigma}^{B,S}$$

содержат два нижних индекса, соответствующие частице, и два верхних индекса, соответствующие античастице.

Закон преобразования матриц Q будет

$$Q \to Q' = UQ\overset{+}{U}$$

и потому условие неприводимости имеет вид:

$$\sum_{(A,\sigma)} Q_{A,\sigma}^{A,\sigma} = 0. \qquad (6,9)$$

Таким образом, мы получаем матрицы с 35 независимыми элементами. Кроме того, имеется еще тривиальное представление:

$$Q_{A,\sigma}^{B,s} = P_0\, \delta_A^B\, \delta_\sigma^s .$$

36 компонентное представление группы SU_6 распадается, следовательно, на одно тривиальное представление и один неприводимый 35-плет:

$$6 \times 6^* = (1) + (35).$$

Можно сразу заметить, что тривиальное представление соответствует χ^0-мезону, так как волновая функция

$$\delta_A^B \delta_\sigma^s$$

характеризует SU_3 синглет в состоянии со спином $J = 0$.

Займемся теперь 35-плетом. Выделим в Q слагаемые со спином $J = 0$ и $J = 1$. Как и в ранее рассматривавшемся случае группы SU_4, найдем:

$$\overset{(0)}{Q}{}_{A,\sigma}^{B,s} = \overset{(0)}{Q}{}_A^B\, \delta_\sigma^s ; \qquad J = 0$$

$$\overset{(1)}{Q}{}_{A,\sigma}^{B,s} = \overset{(1)}{Q}{}_A^B\, \chi_\sigma^s ; \qquad J = 1,$$

где

$$\sum_{(s)} \chi_s^s = 0$$

Благодаря этому соотношению мы видим, что слагаемые

$$\overset{(1)}{Q}{}_{A,\sigma}^{B,s}$$

тривиально удовлетворяют условию (6,9), и из него не вытекает никаких условий на нонет $\overset{(1)}{Q}{}_A^B$; соответствующий шпур не обязан равняться нулю.

Наоборот, для слагаемых

$$\overset{(0)}{Q}{}_{A,\sigma}^{B,s}$$

имеем:

$$\sum_{(A,\sigma)} \overset{(0)}{Q}{}_{A,\sigma}^{A,\sigma} = \sum_{(A)} \overset{(0)}{Q}{}_{A}^{A} \sum_{(\sigma)} \delta_{\sigma}^{\sigma} = 3 \sum_{(A)} \overset{(0)}{Q}{}_{A}^{A}$$

и таким образом из (6,9) вытекает обычное условие для октета:

$$\sum_{(A)} \overset{(0)}{Q}{}_{A}^{A} = 0.$$

Итак, в 35-плете содержится октет с $J=0$ и нонет с $J=1$, каждый из членов которого может находиться в трех спиновых состояниях с $J=1, 0, -1$:

$$(35) = (8) + (9 \times 3).$$

§ 7.

В предыдущем параграфе мы систематизировали мезоны, исходя из модели Саката, основанной на рассмотрении триплета (p , n , λ).

Представим себе, что вместо триплета Саката мы рассмотрим триплет гипотетических частиц, которые опять будем обозначать буквами p , n , λ . Чтобы не спутать их с физическими протоном, нейтроном и лямбда-гипероном, условимся обозначать эти физические частицы большими буквами P , N , Λ .

Предположим, что гипотетические p , n , λ так же, как P , N , Λ , обладают спином $J=1/2$ и что их квантовые числа будут:

	Q	Y	I	I_3	
p	q_0	y_0	1/2	1/2	$J=1/2$
n	q_0-1	y_0		$-1/2$	
λ	q_0-1	y_0-1	0	0	$B=B_0$

Таблица 5

Заметим, что в нашем рассмотрении мезонов формально ничто не изменится, если мы заменим триплет (P, N, Λ) триплетом (p, n, λ) . При этом числа q_0 , y_0 , B_0 (для триплета Саката все они равны единице) могут быть совершенно произвольными. Действительно, для антитриплета $(\bar{p}, \bar{n}, \bar{\lambda})$ имеем:

	Q	Y	I	I_3
$\bar{p}$	$-q_0$	$-y_0$	1/2	$-1/2$
$\bar{n}$	$-q_0+1$	$-y_0$		$+1/2$
$\bar{\lambda}$	$-q_0+1$	$-y_0+1$	0	0

$J = 1/2$, $B = -B_0$

Поэтому, если мы будем рассматривать мезоны как связанные состояния частицы (p, n, λ) и античастицы $(\bar{p}, \bar{n}, \bar{\lambda})$, то числа q_0, y_0, B_0 вычтутся и не войдут в окончательный результат для значений величин Q, Y, $B=0$, соответствующих мезонам.

Заметим еще, что в отличие от I_3, являющегося инфинитезимальным оператором для SU_2, мы не определили заряд и гиперзаряд как инфинитезимальные операторы группы SU_3 и, так сказать, вносили их в нашу схему извне.

Потребуем теперь, чтобы Q и Y являлись инфинитезимальными операторами для SU_3. Но, как мы это выяснили ранее, всякий генератор X группы SU_3 должен удовлетворять условию

$$Sp\,X = 0.$$

Иначе говоря, сумма собственных значений оператора X должна равняться нулю. Складывая собственные значения Q и Y для p, n, λ состояний нашего гипотетического триплета, придем к соотношениям

$$\left.\begin{aligned} 3q_0 - 2 &= 0 \\ 3y_0 - 1 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

откуда

$$Q_p = \frac{2}{3}, \qquad Q_n = -\frac{1}{3}, \qquad Q_\lambda = -\frac{1}{3}$$

$$Y_p = \frac{1}{3}, \qquad Y_n = \frac{1}{3}, \qquad Y_\lambda = -\frac{2}{3}.$$

Такие частицы впервые были введены в теорию Гелл-Манном и Цвейгом и названы кварками.

Некоторые авторы и теперь придерживаются гипотезы о том, что все адроны, мезоны и барионы являются связанными состояниями системы кварков и анти-кварков.

Так как электрический заряд и гиперзаряд кварков имеют приведенные выше дробные значения (кратные 1/3), простейшая кварковая композиция барионов P, N, Λ требует трех кварков. Мы могли бы, например, рассмотреть композиции вида:

$$P = ppn, \qquad Q = 1, \quad Y = 1$$

$$N = pnn, \qquad Q = 0, \quad Y = 1$$

$$\Lambda = pn\lambda, \qquad Q = 0, \quad Y = 0.$$

Но барионный заряд P, N, Λ равен единице. Поэтому, если мы предполагаем, что эти частицы являются композициями из трех кварков, мы должны считать, что барионный заряд кварка равен $B_0 = 1/3$.

Таким образом, будем иметь следующую таблицу квантовых чисел для гипотетического триплета кварков:

	Q	Y	$S=Y-B$	I	I_3
p	2/3	1/3	0	1/2	1/2
n	−1/3	1/3	0		−1/2
λ	−1/3	−2/3	−1	0	0

$J = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{3}$.

Табл. 6

Аналогично для антикварков получим:

	Q	Y	$S=Y-B$	I	I_3
$\bar{p}$	−2/3	−1/3	0	1/2	−1/2
$\bar{n}$	1/3	−1/3	0		1/2
$\bar{\lambda}$	1/3	2/3	1	0	0

$J = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{3}$

Табл. 7

Как видно, в триплете есть изотопический дублет кварков с нулевой странностью и странный кварк, являющийся изотопическим синглетом.

Легко усмотреть, что и для кварков и для антикварков имеется следующая связь между Q, Y, I_3:

$$Q = I_3 + Y/2 . \qquad (7,1)$$

Так как все эти величины аддитивны, то такое же соотношение должно выполняться для всех адронов, поскольку мы считаем, что адроны состоят из различных комбинаций кварков и антикварков. Соотношение (7,1) было впервые предложено Нишиджима и Гелл-Манном на основе анализа реакций со странными частицами.

Подчеркнем, что весьма необычным свойством кварков является их дробный электрический и барионный заряд. Ввиду этого кварки не могут распадаться на обычные частицы, и по крайней мере, один сорт кварков является абсолютно стабильным. Поэтому, если в процессах столкновений обычных частиц, например, в космических лучах, хотя бы и с малой вероятностью, образуются кварки, то они должны были накапливаться и на земле. До сих пор однако, кварки не были обнаружены. В связи с экспериментами на ускорителях создалось мнение, что, если кварки существуют в свободном состоянии, то их масса должна быть не менее $\sim 5\,BeV$.

Ввиду такой ситуации теперь имеются две основные точки зрения в вопросе о кварках.

Согласно одной из них считается, что хотя кварки пока и не открыты, они тем не менее реально существуют, и что все адроны являются связанными состояниями системы кварков и антикварков. Рассматриваемые группы преобразований обуславливаются симметрией таких связанных состояний, и эти группы "нарушаются" из-за того, что симметрия между кварками p, n, λ не является точной - предполагается, что масса λ -кварка больше массы кварка (p, n). Кроме того, группа SU_6 нарушается еще вследствие зависимости энергии связи от спина.

В подходах другого типа считают, что никаких кварков нет, и что основным является понятие группы или ее линейного представления, отображающих какие-то внутренние симметрии адронов. Эти симметрии являются приближенными и фактически нарушаются "умеренно-сильными" взаимодействиями. Здесь предполагается, что гамильтониан системы как бы разбивается на два члена:

$$H = H_0 + H_1 .$$

В H_0 включаются "сверхсильные" взаимодействия, обуславливающие "центральную массу" мультиплета. Эти сверхсильные взаимодействия считаются точно инвариантными по отношению к введенной группе. В H_1 включаются умеренно сильные взаимодействия, нарушающие такую инвариантность и ответственные за расщепление масс внутри мультиплета.

Интересно отметить, что и в работах этого подхода (его можно назвать групповым), отвергающего реальное существование кварков, понятие кварка, тем не менее, довольно часто используется.

Возьмем, в частности, группу SU_3. Ее линейные представления реализуются на тензорах с рядом верхних и нижних индексов:

$$Q^{B_1,\dots,B_m}_{A_1,\dots,A_n} ,$$

например,

$$Q^B_A \; ; \quad \psi_{A,B,C}$$

Каждый из индексов A, B, C пробегает здесь значения 1,2,3 . На нижние индексы действуют преобразования U из группы SU_3, а на верхние - соот -

ветствующие сопряженные преобразования $\overset{+}{U}$. В таких случаях ничто не препятствует нам говорить, что частица (с нулевым барионным зарядом) с волновой функцией Q_A^B "состоит" из кварка и антикварка, а частица (с единичным барионным зарядом) с волновой функцией типа $\psi_{A,B,C}$ "состоит" из трех кварков. При этом "кварк" или "антикварк" рассматривается просто как унитарный индекс, связанный с определенным зарядом, гиперзарядом и т.п.

В случае группы SU_6 вместо унитарного индекса A ставится пара индексов (A,σ), где σ – обычный спиновый индекс. Тогда можно говорить, например, что частица с нулевым барионным зарядом, характеризуемая волновой функцией типа:

$$Q_{A,\sigma}^{B,s}$$

"состоит" из кварка с некоторым спином и антикварка с соответствующим спином.

Такая интерпретация "на языке кварков" позволяет сравнительно просто и наглядно получать результаты, которые в чисто групповой схеме потребовали бы для своего установления довольно громоздкого математического аппарата.

Конечно, формулировка – "состоит из кварков" – здесь не имеет определенного реального значения, кроме указания на зависимость волновых функций элементарных частиц от таких-то индексов, но и это существенно для построения правильной систематики.

С другой стороны, и в реалистическом подходе, поскольку мы не касаемся динамики кварков, утверждения о том, что некоторые мезоны являются связанными состояниями кварка и антикварка, или что некоторые барионы являются связанными состояниями трех кварков, в сущности, не идут дальше символической записи волновых функций в виде Q_A^B или $\psi_{A,B,C}$.

Вообще надо сказать, что в обоих типах подхода к изучению симметрии элементарных частиц имеется много трудностей. Например,некоторые линейные представления реализуются в природе (т.е им действительно соответствуют наблюдаемые физические частицы), а другие нет.

Все эти трудности, повидимому, еще нельзя удовлетворительно разрешить на достигнутом к настоящему времени уровне нашего понимания свойств элементарных частиц, и мы их здесь дискутировать больше не будем.

Мы все же считаем, что понятие кварка до сих пор еще не исчерпало своей эвристической силы, и потому в наших лекциях мы будем исходить из модели кварков, учитывая, разумеется, возможность обоих упомянутых точек зрения.

Скажем сейчас несколько слов по поводу систематики ... псевдоскалярных и векторных мезонов в модели кварков. Совершенно ясно, что все сказанное в предыдущем параграфе о мезонах в модели Саката без всяких изменений,автоматически, переносится и на модель кварков. При этом не придется даже менять обозначения, так как теперь у нас буквы p, n, λ обозначают кварки. Возьмем массовую квадратичную форму, представляющую среднее значение квадрата массы в октете $(J=0)$ и нонете $(J=1)$ мезонов:

$$\begin{aligned}(\overline{m^2}) = m_J^2 \sum_{(A,B)} \overset{*}{Q}{}_A^B\, Q_A^B\, + \\ + \sum_{(A,B)} \{\Delta\delta(A-3)+\Delta\delta(B-3)\} \overset{*}{Q}{}_A^B\, Q_A^B\,.\end{aligned} \tag{7,2}$$

Если бы группа SU_6 была точной, то,поскольку октет и нонет входят в одно неприводимое представление этой группы, все массы были бы равны. В этом случае

$$m_0^2 = m_1^2, \qquad \Delta = 0.$$

В действительности, однако, мы имеем расщепление масс, и в нашей формуле для $(\overline{m^2})$ присутствуют два рода неинвариантных членов. Первый член

$$m_J^2 \sum_{(A,B)} \overset{*}{Q}{}_A^B \, Q_A^B$$

является инвариантным относительно SU_3, но зависит от J. Выражение же

$$\Delta \sum_{(A,B)} \left\{ \delta(A-3) + \delta(B-3) \right\} \overset{*}{Q}{}_A^B \, Q_A^B$$

не зависит от спина, но неинвариантны по отношению к SU_3.

В массовую формулу такие "поправки на неинвариантность" входят аддитивно. Аддитивность этих поправочных членов можно было бы понять как следствие малости умеренно сильных взаимодействий по сравнению со сверхсильными взаимодействиями, благодаря чему и допустимо применение аддитивного первого приближения.

В реалистической модели кварков такое положение можно наглядно интерпретировать следующим образом. Так как масса кварка M_q очень велика $\gtrsim 5BeV$, то при образовании мезона с массой m возникает очень большой масс-дефект

$$W = 2M_q - m \sim 2M_q .$$

Поэтому умеренно сильные взаимодействия, ответственные за расщепления масс m, действительно малы по сравнению со сверхсильным взаимодействием, обуславливающим такую величину масс-дефекта.

Заметим теперь, что массовые соотношения были получены нами с помощью рассмотрения среднего значения квадрата массы в октете и нонете, на основе предположения о том, что величина $(\overline{m^2})$ представляется формой вида (6,2). Возникает, однако, вопрос, почему нельзя рассматривать среднее значение $(\overline{m})$ самой массы и приравнять его форме типа (6,2).

На этот вопрос довольно трудно ответить, исходя из общих положений. Можно, конечно, сказать, что мезоны в релятивистской теории описываются всегда уравнениями второго порядка, в которые масса входит квадратично, в отличие от барионов, для которых имеем уравнения первого порядка, содержащие массу линейно.

Это или подобные рассуждения нельзя, очевидно, признать достаточно убедительными. Обратимся поэтому к сравнению численных данных с экспериментальными результатами.

Пусть мы вместо $(\overline{m^2})$ рассматриваем $(\overline{m})$ и приравниваем ее форме типа (6,2). Тогда мы получим соотношения, отличающиеся от приведенных ранее в предыдущем параграфе только тем, что вместо квадратов масс в них будут входить сами массы. Например, вместо формулы Гелл-Манна–Окубо найдем:

$$m_\eta - m_\pi = \frac{4}{3}(m_K - m_\pi) .$$

Согласие с экспериментом станет менее удовлетворительным:

$$\frac{4}{3}(m_K - m_\pi) = \frac{4}{3} \cdot 358\, MeV = 477\, MeV ; \quad m_\eta - m_\pi = 410\, MeV.$$

Но гораздо хуже было бы то, что не выполнялось бы правило интервалов, так как:

для октета $\Delta = m_K - m_\pi = 358$ MeV,

для нонета $\Delta = m_{K^*} - m_\rho = 126$ MeV.

Поэтому, если мы хотим использовать массовую форму с одним и тем же значением Δ для октета и нонета, целесообразно иметь дело с квадратами масс.

Любопытно отметить, что для самого нонета линейные массовые соотношения

$$m_{K^*} - m_\rho = m_\phi - m_{K^*}$$

оказываются даже более точными чем квадратичные:

$$m_{K^*} - m_\rho = 126\ \text{MeV}; \qquad m^2_{K^*} - m^2_\rho = 0{,}21\,(\text{BeV})^2$$

$$m_\phi - m_{K^*} = 128\ \text{MeV}; \qquad m^2_\phi - m^2_{K^*} = 0{,}24\,(\text{BeV})^2.$$

Теоретического объяснения этого эмпирического факта пока не имеется.

Займемся теперь несколько формальной задачей о представлении нонета векторных мезонов в виде суперпозиции соответствующих октета и синглета. При этом достаточно, очевидно, рассмотреть явно только диагональные элементы матрицы Q^B_A нонета, т.к. недиагональные элементы не влияют на значение $Sp\,Q$. Матрицу Q^B_A нонета мы представим в виде суммы октетной матрицы с нулевым шпуром и синглетной матрицы, пропорциональной, очевидно, δ^B_A:

$$\begin{pmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt2}+\frac{\omega}{\sqrt2}, & \dots & \dots \\ \dots, & -\frac{\rho^0}{\sqrt2}+\frac{\omega}{\sqrt2}, & \dots \\ \dots, & \dots & \phi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt2}+\frac{f_8}{\sqrt6}, & \dots, & \dots \\ \dots, & -\frac{\rho^0}{\sqrt2}+\frac{f_8}{\sqrt6}, & \dots \\ \dots, & \dots, & -\frac{2}{\sqrt6}f_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{f_0}{\sqrt3}, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{f_0}{\sqrt3}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{f_0}{\sqrt3} \end{pmatrix}.$$

Сравнивая соответствующие элементы матриц в правой и левой частях, мы видим, что ω и ϕ мезоны будут линейными комбинациями f_8 (восьмого члена октета) и синглета f_0

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega}{\sqrt2} &= \frac{f_8}{\sqrt6} + \frac{f_0}{\sqrt3} \\ \phi &= -\frac{2}{\sqrt6}f_8 - \frac{f_0}{\sqrt3} \end{aligned}\right\} \qquad \text{или}$$

$$\left.\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, f_0 + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, f_8 = f_0\cos\theta + f_8 \sin\theta \\ \phi &= \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, f_0 - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, f_8 = f_0 \sin\theta - f_8\cos\theta\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}\cos\theta &= \sqrt{\tfrac{2}{3}} \\ \sin\theta &= \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,.\end{aligned}$$

Эти формулы дают ортогональное преобразование несуществующих гипотетических частиц f_0 и f_8 в наши ω и ϕ, т.е. действительно ω и ϕ мезоны можно представить в виде смеси синглетных и октетных состояний в некоторой пропорции.

Попробуем, используя понятие смеси состояний, улучшить наше представление для нонета векторных мезонов. Когда мы записывали матрицу Q_A^B для нонета векторных мезонов, мы считали, что

$$m_\omega^2 = m_\rho^2 \,.$$

и как следствие этого, выбирали следующее представление для ω -мезона и ρ -мезона

$$\rho = \frac{p\bar{p} - n\bar{n}}{\sqrt{2}}\,, \qquad \omega = \frac{p\bar{p} + n\bar{n}}{\sqrt{2}}\,.$$

На самом деле это не совсем так:

$$m_\omega^2 = 0{,}613\,(BeV)^2, \qquad m_\rho^2 = 0{,}585\,(BeV)^2,$$

т.е. ω хотя и немного, но тяжелее ρ -мезона. Для того, чтобы "утяжелить" ω -мезон, надо к комбинации $\frac{1}{\sqrt{2}}(p\bar{p}+n\bar{n})$ добавить некоторую примесь $\lambda\bar{\lambda}$, т.е. более тяжелых λ -кварков и $\bar{\lambda}$ - антикварков.

В массовую формулу для нонета векторных мезонов надо ввести поправочные члены, которые и должны будут привести к искомому расщеплению масс ω и ρ мезонов. Обратимся к нашей старой массовой формуле для нонета векторных мезонов $(J = 1)$

$$m_1^2 \sum_{(A,B)} \overset{*}{Q}{}_A^B Q_A^B + \Delta \sum_{(A,B)} \{\delta(A-3) + \delta(B-3)\} \overset{*}{Q}{}_A^B Q_A^B \,.$$

Как мы уже указывали ранее, первый член инвариантен относительно преобразований группы SU_3, второй - нет. Имеются ли еще квадратичные формы из функций Q_A^B, которые не сводились бы к нашему первому члену, но также были инвариантны по отношению к группе SU_3, и которые можно добавить к нашей массовой формуле ? Вспомним, что $Sp\,Q$ инвариантен относительно унитарных преобразований группы SU_3, и поэтому к массовой формуле можно добавить член вида $h(\sum_{(A)} \overset{*}{Q}{}_A^A)(\sum_{(A)} Q_A^A)$. Тогда массовая формула принимает вид (для нонета)

$$m_1^2 \sum_{(A,B)} \overset{*}{Q}{}_A^B Q_A^B + \Delta \sum_{(A,B)} \{\delta(A-3) + \delta(B-3)\} \overset{*}{Q}{}_A^B Q_A^B + h \sum_{(A)} \overset{*}{Q}{}_A^A \sum_{(A)} Q_A^A \,.$$

Заметим, что для октета псевдоскалярных мезонов $(J=0)$ $Sp\,Q=0$ и третий член выпадает из массовой формулы, но в случае нонета векторных мезонов $(J=1)$ уже $Sp\,Q\neq 0$ и этот член дает вклад, причём влияет только на частицы, стоящие на главной диагонали. Рассмотрением этих частиц мы и займемся. Теперь мы должны считать, что комбинации

$$\frac{p\bar{p}+n\bar{n}}{\sqrt{2}}=\omega_0 \qquad\qquad \lambda\bar{\lambda}=\phi_0$$

не совпадают точно с нашими ω и ϕ мезонами, поэтому мы и вводим дополнительный индекс ноль. Смешивая ω_0 и ϕ_0 в некоторой пропорции, мы построим экспериментально наблюдаемые ω и ϕ мезоны и получим выражения для m^2_ω и m^2_ϕ. Нас интересуют только диагональные члены матрицы Q^B_A

$$\begin{pmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt{2}}+\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}, & \dots, & \dots \\ \dots, & -\frac{\rho^0}{\sqrt{2}}+\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}, & \dots \\ \dots, & \dots, & \phi_0 \end{pmatrix}.$$

Интересующий нас член в массовой формуле имеет вид

$$m_1^2(\omega_0^2+\phi_0^2)+2\Delta\cdot\phi_0^2-h(\sqrt{2}\,\omega_0+\phi_0)^2, \qquad (7,3)$$

т.е. мы получаем недиагональную квадратичную форму, и нам надо привести ее к виду:

$$m^2_\omega\,\omega^2+m^2_\phi\,\phi^2.$$

Как известно, с помощью ортогонального преобразования квадратичную форму (7,3) можно привести к искомому диагональному виду. Секулярное уравнение для квадрата массы $m^2=m^2_\omega, m^2_\phi$ выпишем сразу (хорошо известно, как оно получается)

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} m_1^2+2h-m^2, & \sqrt{2}\cdot h \\ \sqrt{2}\cdot h, & m_1^2+2\Delta+h-m^2 \end{pmatrix}=0 .$$

Как обычно, мы положим $m_1^2=m_1^2$. Удобно ввести $x=m^2-m_\rho^2$. Тогда получаем квадратное уравнение для x

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2h-x, & \sqrt{2}\,h \\ \sqrt{2}\,h, & 2\Delta+h-x \end{pmatrix}=x^2-x(3h+2\Delta)+4\Delta h=0,$$

причём, очевидно, больший корень будет: $x_2 = m_\phi^2 - m_\rho^2$ и меньший корень: $x_1 = m_\omega^2 - m_\rho^2$. По теореме Виета из школьного курса алгебры имеем:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3h + 2\Delta = m_\phi^2 + m_\omega^2 - 2m_\rho^2 \\ x_1 x_2 &= 4\Delta h = (m_\phi^2 - m_\rho^2)(m_\omega^2 - m_\rho^2) \end{aligned}\right\}$$

и, вспоминая, что $\Delta = m_{K^*}^2 - m_\rho^2$, находим

$$3h = m_\phi^2 + m_\omega^2 - 2m_{K^*}^2$$

и окончательно:

$$(m_\omega^2 - m_\rho^2)(m_\phi^2 - m_\rho^2) = \frac{4}{3}(m_\omega^2 + m_\phi^2 - 2m_{K^*}^2)(m_{K^*}^2 - m_\rho^2).$$

Таким образом мы получаем формулу Швингера для нонета векторных мезонов. Подстановку численных значений и проверку этой формулы мы предоставляем читателю – согласие должно быть удовлетворительное. Если при решении секулярного уравнения положить $h = 0$, то мы, конечно, вернемся к нашим старым массовым формулам для нонета векторных мезонов. При этом надо заметить, что если ограничиваться рассмотрением только нонета векторных мезонов, то нет особой необходимости в формуле Швингера, т.к. старые формулы были вполне удовлетворительны. Однако мы привели здесь ее вывод, т.к. формула Швингера будет нужна впоследствии при рассмотрении высших мезонных резонансов.

Перейдем в заключение к построению инфинитезимальных операторов для группы SU_3, для чего введем некоторые матрицы λ_α $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots, 8)$, являющиеся естественным обобщением матриц τ_α $(\alpha = 1, 2, 3)$, рассматривавшихся в связи с группой SU_2.

Будем исходить из известного матричного представления для октета.

Пусть мы имеем некоторую матрицу Q_A^B с нулевым шпуром. Тогда, выписывая явно числовые коэффициенты проекций на "мезонные состояния", найдем:

$$(Q_A^B) = \begin{pmatrix} \frac{c_{\pi^0}}{\sqrt{2}} + \frac{c_\eta}{\sqrt{6}}, & c_{\pi^-}, & c_{K^-} \\ c_{\pi^+}, & -\frac{c_{\pi^0}}{\sqrt{2}} + \frac{c_\eta}{\sqrt{6}}, & c_{\bar{K}^0} \\ c_{K^+}, & c_{K^0}, & -\frac{2}{\sqrt{6}} c_\eta \end{pmatrix}.$$

Если матрица Q является эрмитовской, то

$$\overset{*}{c}_{\pi^+} = c_{\pi^-};\quad \overset{*}{c}_{K^+} = c_{K^-};\quad \overset{*}{c}_{K^0} = c_{\bar{K}^0};\quad \overset{*}{c}_{\pi^0} = c_{\pi^0};\quad \overset{*}{c}_\eta = c_\eta.$$

Вместо комплексных чисел c мы можем ввести для представления матриц рассматриваемого типа вещественные числа. Положим:

$$c_{\pi^+} = b_1 + ib_2;\quad c_{K^+} = b_4 - ib_5;\quad c_{K^0} = b_6 + ib_7,$$

где b – вещественные числа. Тогда

$$c_{\pi^-} = b_1 - ib_2; \quad c_{K^-} = b_4 - ib_5; \quad c_{\bar{K}^0} = b_6 - ib_7.$$

Замечая далее, что c_{π^0}, c_η являются вещественными числами, положим:

$$c_{\pi^0} = \sqrt{2}\, b_3, \qquad c_\eta = \sqrt{2}\, b_8.$$

Таким образом, убеждаемся, что всякая эрмитовская матрица третьего порядка с нулевым шпуром может быть представлена в виде:

$$\begin{pmatrix} b_3 + \frac{b_8}{\sqrt{3}}, & b_1 - ib_2, & b_4 - ib_5 \\ b_1 + ib_2, & -b_3 + \frac{b_8}{\sqrt{3}}, & b_6 - ib_7 \\ b_4 + ib_5, & b_6 + ib_7, & -\frac{2}{\sqrt{3}} b_8 \end{pmatrix} \qquad /7.4/$$

с вещественными $b_\alpha\ (\alpha = 1, 2, \ldots, 8)$.

Подчеркнем, что мы рассматриваем сейчас произвольные эрмитовские матрицы третьего порядка с нулевым шпуром совершенно независимо от их интерпретации как волновых функций мезонного октета. Поэтому соответствующие матричные элементы будем обозначать и Q_A^B, $Q_{A,B}$ – как нам будет угодно. Раскрывая /7.4/, найдем:

$$Q = \sum_{\alpha=1}^{8} b_\alpha \lambda_\alpha, \qquad /7.5/$$

где матрицы λ_α имеют следующий вид:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что эти матрицы λ_α весьма просто выражаются через 8 матриц:

$$\pi = (\pi_A^B); \quad K = (K_A^B); \qquad \eta = (\eta_A^B), \qquad (7,6)$$

которые мы ввели в предыдущем параграфе для представления волновых функций π, K, η мезонов. Имеем, действительно:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \pi^+ + \pi^-, \quad \lambda_2 = i(\pi^+ - \pi^-), \quad \lambda_3 = \sqrt{2}\,\pi^0, \\ &\lambda_4 = K^+ + K^-, \quad \lambda_5 = i(K^+ - K^-), \\ &\lambda_6 = K^0 + \bar{K}^0, \quad \lambda_7 = i(K^0 - \bar{K}^0), \quad \lambda_8 = \sqrt{2}\,\eta. \end{aligned} \qquad /7.7/$$

Подчеркнем, что теперь, в отличие от ранее принятых обозначений, символ мезона представляет не числовой коэффициент проекции на соответствующее мезонное состояние, а матрицу, представляющую само это состояние. Например, здесь:

$$\pi^+ = \left((\pi^+)^B_A\right) = \left(\delta(A-1)\,\delta(B-2)\right).$$

Так как матрицы /7.6/ определяют систему из восьми ортонормированных функций двух индексов A,B, то из /7.7/ нетрудно получить, что так же, как и для τ матриц,

$$Sp\,\lambda_\alpha \lambda_\beta = 2\delta_{\alpha\beta}. \qquad /7.8/$$

Введем еще матрицу λ_0, пропорциональную единичной матрице:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с коэффициентом, подобранным для нормировки:

$$Sp\,\lambda_0^2 = 2.$$

Тогда ясно, что соотношения /7.8/ верны для всех $\alpha, \beta = 0,1,2, \ldots 8$.
Очевидно также, что все λ_α эрмитовы:

$$\lambda_\alpha^+ = \lambda_\alpha.$$

Заметим, далее, что так как всякая матрица P с ненулевым шпуром представляется суммой матрицы, пропорциональной единичной матрице, и матрицы с нулевым шпуром, то всякую эрмитовскую матрицу 3-го порядка можно записать в виде:

$$P = \sum_{\alpha=0}^{8} b_\alpha \lambda_\alpha \qquad /7.9/$$

с вещественными числами b_α. Такое же выражение /7.9/ можно написать и для произвольной матрицы 3-го порядка, только уже с комплексными числами b_α.

В свое время мы указали, что матрицы τ_α ($\alpha = 1,2,3$) совместно с единичной матрицей

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

образуют алгебру. Покажем, что такое утверждение справедливо и для матриц λ_α ($\alpha = 0,1,2, \ldots 8$).

Рассмотрим прежде всего коммутатор двух таких матриц

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta - \lambda_\beta \lambda_\alpha$$

и заметим, что его шпур равен нулю, поскольку всегда

$$Sp(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = Sp(\mathfrak{B}\mathfrak{A}).$$

Кроме того, этот коммутатор равен произведению мнимой единицы i и эрмитовской матрицы, так как сам он обладает свойством антиэрмитовости:

$$(\lambda_\alpha \lambda_\beta - \lambda_\beta \lambda_\alpha)^+ = -(\lambda_\alpha \lambda_\beta - \lambda_\beta \lambda_\alpha).$$

Поэтому, на основании /7.5/, рассматриваемый коммутатор можно представить в виде суммы линейных комбинаций матриц λ_{γ} :

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta - \lambda_\beta \lambda_\alpha = i \sum_{\gamma=1}^{8} f_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_\gamma$$

с вещественными коэффициентами $f_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Рассмотрим теперь антикоммутатор $\lambda_\alpha \lambda_\beta + \lambda_\beta \lambda_\alpha$.

Шпур этой матрицы уже не равен нулю. Но мы воспользуемся формулой /7.9/. Таким образом и антикоммутатор мы всегда можем представить в виде суперпозиции матриц λ_α (α = 0,1,2, ... 8):

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta + \lambda_\beta \lambda_\alpha = \sum_{\gamma=0}^{8} d_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_\gamma ,$$

причем вследствие того, что антикоммутатор эрмитовых матриц является также эрмитовой матрицей, коэффициенты $d_{\alpha,\beta,\gamma}$ будут вещественными числами. Таким образом, любой полином, составленный из матриц λ_α , можно привести к линейной комбинации матриц $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8$, и тем самым матрицы $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_8)$ образуют алгебру.

Выясним теперь характер симметрии коэффициентов $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $d_{\alpha,\beta,\gamma}$ по отношению к перестановкам индексов и покажем, что функция $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ – антисимметрична, а функция $d_{\alpha,\beta,\gamma}$ – симметрична. Для этого мы воспользуемся следующей весьма простой леммой.

<u>Лемма.</u>

"Пусть $F_{[A,B]C}$ – функция трех индексов A, B, C, где каждый индекс может принимать значения 1,2, . . . n , симметричная (или, соответственно, $F_{[A,B]C}$ – антисимметричная) по первым двум индексам.

Тогда утверждается, что функция

$$F_{\{A,B\}C} + F_{\{B,C\}A} + F_{\{C,A\}B}$$

должна быть симметричной (или, соответственно, функция

$$F_{[A,B]C} + F_{[B,C]A} + F_{[C,A]B}$$

должна быть антисимметричной) по всем трем индексам".

Мы докажем эту лемму для случая симметричных функций, доказательство для антисимметричного случая совершенно аналогично и предоставляется читателю. Доказательство довольно тривиально– произведем, например, замену $B \leftrightarrow C$.
Тогда

$$\begin{aligned} G_{A,C,B} &= F_{\{A,C\}B} + F_{\{C,B\}A} + F_{\{B,A\}C} = \\ &= F_{\{C,A\}B} + F_{\{B,C\}A} + F_{\{A,B\}C} = G_{A,B,C} . \end{aligned}$$

Аналогично рассматриваются перестановки $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow A$. Лемма доказана.
Умножим

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta - \lambda_\beta \lambda_\alpha = i \sum_{\gamma'=1}^{8} f_{\alpha,\beta,\gamma'} \lambda_{\gamma'}$$

справа на λ_{γ} и возьмем шпур. Так как $Sp(\lambda_{\gamma'}\lambda_{\gamma})=2\delta_{\gamma\gamma'}$, то

$$\frac{1}{2}Sp(\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma-\lambda_\beta\lambda_\alpha\lambda_\gamma)=if_{\alpha,\beta,\gamma}=if_{[\alpha,\beta]\gamma}$$

есть функция антисимметричная по первым двух индексам. Но под знаком Sp в левой части мы можем переставлять матрицы по круговой подстановке, не изменяя при этом значения шпура. Поэтому, очевидно:

$$f_{[\alpha,\beta]\gamma}=f_{[\beta,\gamma]\alpha}=f_{[\gamma,\alpha]\beta}$$

и, следовательно, в силу леммы, функция

$$f_{\alpha,\beta,\gamma}=\frac{1}{3}\left(f_{[\alpha,\beta]\gamma}+f_{[\beta,\gamma]\alpha}+f_{[\gamma,\alpha]\beta}\right)$$

антисимметрична по всем трем индексам, т.е. при перестановке любых двух индексов она меняет знак. Аналогично рассмотрим функцию $d_{\alpha,\beta,\gamma}$. Умножим

$$\lambda_\alpha\lambda_\beta+\lambda_\beta\lambda_\alpha=\sum_{\gamma'=0}^{8}d_{\alpha,\beta,\gamma'}\lambda_{\gamma'}$$

справа на λ_γ и возьмем шпур. Так как $Sp(\lambda_\gamma\lambda_{\gamma'})=2\delta_{\gamma\gamma'}$, то

$$\frac{1}{2}Sp(\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma+\lambda_\beta\lambda_\alpha\lambda_\gamma)=d_{\alpha,\beta,\gamma}=d_{\{\alpha,\beta\}\gamma}$$

есть функция симметричная по первым двум индексам. Переставляя циклически матрицы под знаком Sp, мы получаем, что

$$d_{\alpha,\beta,\gamma}=d_{\{\alpha,\beta\}\gamma}=d_{\{\beta,\gamma\}\alpha}=d_{\{\gamma,\alpha\}\beta}$$

есть функция, симметричная по всем трем индексам.

Таким образом, мы имеем полностью антисимметричный тензор $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ и полностью симметричный тензор $d_{\alpha,\beta,\gamma}$. Их явный вид можно найти в литературе и нетрудно получить самому, например, с помощью представления /7.7/.

Рассмотрим теперь преобразования группы SU_3

$$\psi\to\psi'=U\psi\ ;\qquad \psi=(\psi_A)\ .$$

Как мы уже отмечали, общая форма таких U будет:

$$U=e^{iH},$$

где H – произвольная эрмитовская матрица 3-го порядка с нулевым шпуром. Поэтому бесконечно малые преобразования имеют вид:

$$\delta\psi=i(\delta H)\psi,$$

причем

$$\delta H^{+}=\delta H,\qquad Sp\,\delta H=0$$

и мы можем воспользоваться для δH формулой /7.5/, и получим

$$\delta\psi = i\sum_{\alpha=1}^{8}\delta b_\alpha \lambda_\alpha \psi$$

с вещественными δb_α.

Таким образом, λ_α (α = 1,2,. . . 8) и будут инфинетизимальными операторами для рассматриваемого "кваркового" представления группы SU_3 :

Ясно, что вместо восьми параметров δb_α мы можем ввести другие 8 независимых параметров:

$$\delta b_\alpha = \sum_{\beta=1}^{8} V_{\alpha,\beta}\,\delta c_\beta$$

$$\delta c_\alpha = \sum_{\beta=1}^{8} (V^{-1})_{\alpha,\beta}\,\delta b_\beta .$$

Здесь $V_{\alpha,\beta}$ – любая неособенная матрица 8-го порядка с вещественными элементами. Имеем:

$$\delta\psi = i\sum_{\beta=1}^{8}\delta c_\beta\Big(\sum_{\alpha=1}^{8}\lambda_\alpha V_{\alpha,\beta}\Big) .$$

Поэтому 8 линейно-независимых комбинаций из λ_α :

$$\lambda'_\beta = \sum_{\alpha=1}^{8}\lambda_\alpha V_{\alpha,\beta} ; \qquad \beta = 1,2, . . . 8.$$

также можно считать инфинитезимальными операторами для рассматриваемого представления группы SU_3 .

Возьмем матрицы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и заметим, что они отличаются от τ_1, τ_2, τ_3 только наличием третьей строки и третьей колонки, состоящих из нулевых элементов. Поэтому очевидно:

$$\lambda_\alpha\lambda_\beta - \lambda_\beta\lambda_\alpha = 2i\sum_{\gamma=1}^{3}\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_\gamma ; \qquad (\alpha,\beta = 1,2,3)$$

и мы можем рассматривать

$$I_\alpha = \frac{1}{2}\lambda_\alpha \qquad \alpha = 1,2,3$$

в качестве компонентов изотопического спина для нашего триплета кварков.

Рассмотрим еще диагональные матрицы λ_3, λ_8 . С ними связаны гиперзаряд и электрический заряд кварка. Имеем, действительно:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_8)_A^A$$

$$Q_A = \frac{1}{2}(\lambda_3)_A^A + \frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda_8)_A^A$$

или, в матричной форме:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 ; \qquad Q = \frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8 .$$

Здесь Y и Q изображаются диагональными матрицами с диагональными элементами Y_A , Q_A .

Займемся еще выражением:

$$\Delta\sum_{(A,B)}\{\delta(A-3) + \delta(B-3)\}\overset{*}{Q}{}_A^B Q_A^B ,$$

нарушающим инвариантность массовой формы по отношению к SU_3 в октете и нонете. Имеем:

$$\delta(A-3) = \frac{1}{3} - Y_A$$

и потому:

$$\delta(A-3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_8)^A_A \, .$$

Слагаемые $\frac{2}{3}\Delta$ мы, очевидно, можем включить в член m^2_J, входящий в выражение, инвариантное по отношению к SU_3. Следовательно, неинвариантная по SU_3 часть массовой формы может быть записана в виде:

$$-\frac{\Delta}{\sqrt{3}} \sum \overset{+}{Q}{}^A_B (\lambda_8)^{A'}_A Q^B_{A'} - \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \sum Q^{B'}_A (\lambda_8)^B_{B'} \overset{+}{Q}{}^A_B =$$

$$= -\frac{\Delta}{\sqrt{3}} Sp(\overset{+}{Q}\lambda_8 Q) - \frac{\Delta}{\sqrt{3}} Sp(Q\lambda_8 \overset{+}{Q}) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Delta Sp(Q\lambda_8 Q)$$

и мы замечаем, что это выражение определяется матрицей λ_8. Но из /7.7/ мы видим, что

$$(\lambda_8)^B_A$$

пропорциональная волновой функции

$$(\eta)^B_A$$

η - мезона. Поэтому и говорят иногда, что расщепление масс из-за неинвариантности по отношению к SU_3 обуславливается оператором, преобразующимся как восьмой член октета или как η - мезон.

Скажем , наконец, несколько слов по поводу генераторов группы SU_6 .

Рассмотрим преобразование из группы SU_6 :

$$\psi \to \psi' = U\psi ; \qquad \psi = (\psi_{A,\sigma})$$

с унитарной, унимодулярной матрицей U шестого порядка.

Как уже отмечалось, для таких U :

$$U = e^{iH} ,$$

где H- эрмитовская матрица 6-го порядка с нулевым шпуром. Совокупность элементов этой матрицы

$$H = (H'_{A,\sigma\,;\,A',\sigma'})$$

с фиксированными индексами σ, σ' образует матрицу 3-го порядка и потому, благодаря /7.9/:

$$H_{A,\sigma;\,A',\sigma'} = \sum_{\alpha=0}^{8} (\lambda_\alpha)_{A,A'} (b_\alpha)_{\sigma,\sigma'} \, .$$

Но матрицы 2-го порядка b_α действуют только на спиновый индекс, и мы можем написать:

$$(b_\alpha)_{\sigma,\sigma'} = \sum_{\beta=0}^{3} (\tau_\beta)_{\sigma,\sigma'} c_{\alpha,\beta} \, .$$

Таким образом:

$$H = \sum_{\alpha=0}^{8} \sum_{\beta=0}^{3} c_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \tau_\beta \, .$$

Здесь λ_α действуют только на унитарный индекс, τ_β – только на спиновый.
Имеем:

$$0 = Sp\,H = c_{0,0}\cdot Sp\,\lambda_0\cdot Sp\,\tau_0 = 6\sqrt{2/3}\;c_{0,0}$$

и потому, окончательно:

$$H = \sum_{\substack{\alpha,\beta\\(\alpha^2+\beta^2\neq 0)}} c_{\alpha,\beta}\lambda_\alpha\tau_\beta\ .$$

Ввиду эрмитовости H все 35 коэффициентов $c_{\alpha,\beta}$ вещественны. Возьмем бесконечно-малое преобразование:

$$\delta\psi = (\delta U)\psi = i\,(\delta H)\psi\,.$$

Имеем

$$\delta H = \sum_{\substack{\alpha,\beta\\(\alpha^2+\beta^2\neq 0)}} (\delta c_{\alpha,\beta})\lambda_\alpha\tau_\beta\ .$$

Таким образом, инфинитезимальные операторы для рассматриваемого представления SU_6 можно взять в виде:

$$\lambda_\alpha\tau_\beta\ ;\qquad \begin{matrix}\alpha = 0,1,2,\ldots 8,\\ \beta = 0,1,2,3\end{matrix}\qquad \alpha+\beta\neq 0\,.$$

Чтобы прямо отразить в записи то, что λ и τ действуют на два различных индекса, иногда пишут эти выражения в форме "прямого произведения":

$$\lambda_\alpha\otimes\tau_\beta$$

§ 8.

Перейдем теперь к изучению модели барионов, в которой они представляются композицией трех кварков, и в соответствии с этим будем рассматривать волновые функции

$$\psi_{A_1,A_2,A_3}$$

с тремя унитарными индексами. Как всегда, значения 1,2,3 унитарного индекса условимся сопоставлять $p,\ n,\ \lambda$ состояниям кварка.

В 27-мерном линейном комплексном пространстве функций

$$\left\{\psi_{A_1,A_2,A_3}\right\}$$

рассмотрим линейное представление группы SU_3, определяемое законом преобразования:

$$\psi_{A_1,A_2,A_3}\to\psi'_{A_1,A_2,A_3} = \sum_{(A'_1,A'_2,A'_3)} U_{A_1,A'_1}U_{A_2,A'_2}U_{A_3,A'_3}\,\psi_{A'_1,A'_2,A'_3}\ , \qquad /8.1/$$

где U – унитарные, унимодулярные матрицы 3-го порядка. Для сокращения будем использовать также запись этих преобразований в виде:

$$\psi \to \psi' = (U)_1 (U)_2 (U)_3 \psi ,$$

подразумевая, что $(U)_j$ действует только на j -й унитарный индекс функции ψ.

Возьмем теперь бесконечно малые преобразования

$$U = 1 + \delta U = 1 + i \sum_{\alpha=1}^{8} \delta\theta_\alpha \lambda_\alpha ,$$

характеризуемые восемью вещественными бесконечно малыми параметрами $\delta\theta_\alpha$. Имеем:

$$\delta\psi = \{(\delta U)_1 + (\delta U)_2 + (\delta U)_3\}\psi = i \sum_{\alpha=1}^{8} \delta\theta_\alpha L_\alpha \psi ,$$

где

$$L_\alpha = (\lambda_\alpha)_1 + (\lambda_\alpha)_2 + (\lambda_\alpha)_3 .$$

Так как оператор $(\lambda_\alpha)_j$ действует только на индекс A_j, то отдельные слагаемые в правой части выражения для L_α коммутируют друг с другом. Поэтому из правил коммутации для λ_α

$$[\lambda_\alpha ; \lambda_\beta]_- \equiv \lambda_\alpha \lambda_\beta - \lambda_\beta \lambda_\alpha = i \sum_{\gamma=1}^{8} f_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_\gamma$$

сразу следует, что операторы L_α удовлетворяют таким же коммутационным соотношениям

$$[L_\alpha ; L_\beta] = i \sum_{\gamma=1}^{8} f_{\alpha,\beta,\gamma} L_\gamma .$$

Мы получили частный случай общей теоремы теории групп: коммутационные соотношения инфинитезимальных операторов группы определяются самой группой, а не тем или иным ее представлением. Видно, также, что оператор электрического заряда Q и оператор гиперзаряда Y, которые, как мы выяснили в § 7, являются линейной комбинацией операторов λ_3 и λ_8, будут для рассматриваемой сейчас системы трех кварков аддитивны

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_8)_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_8)_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_8)_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} L_8$$

$$Q = \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}(\lambda_3)_1 + \frac{1}{2}(\lambda_3)_2 + \frac{1}{2}(\lambda_3)_3 = \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}L_3 .$$

Заметим теперь, что из нашего основного закона преобразований /8.1/ вытекает, что если ψ_{A_1,A_2,A_3} симметрична или антисимметрична по отношению к перестановке какой-то пары индексов, то это же свойство сохранится и у преобразованной функции ψ'_{A_1,A_2,A_3}. Поэтому линейное представление /8.1/ группы SU_3 в рассматриваемом 27-мерном пространстве приводимо. В частности, пространство функций

$$f_{A_1,A_2,A_3}$$

антисимметричных по отношению к перестановкам любых двух индексов, и пространство функций

$$d_{A_1, A_2, A_3}$$

полностью симметричных, будут преобразовываться сами в себя.

Имея в виду обобщения для группы SU_6 , подсчитаем сейчас число независимых компонент антисимметричной f и симметричной функции d в общем случае, когда каждый из индексов A_j пробегает n значений: 1,2, .. n .

Начнем с антисимметричной функции f_{A_1, A_2, A_3} . Заметим, прежде всего, что отличными от нуля могут быть лишь те ее компоненты, для которых значения A_1, A_2, A_3 все различны. Кроме того перестановки индексов внутри данного набора не должны учитываться.

Таким образом, число N_a независимых компонент f_{A_1, A_2, A_3} равно числу сочетаний из n по 3, т.е.

$$N_a = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} . \qquad /8.2/$$

Перейдем к d_{A_1, A_2, A_3}. Число ее независимых компонент с разными значениями индексов опять равно, разумеется, числу /8.2/. Кроме того, мы должны учесть случаи, когда два индекса равны, а третий имеет отличное от них значение. Их число будет: $n(n-1)$. Наконец надо учесть число случаев, когда все три индекса равны. Это число, очевидно, равно n. . Суммируя все эти величины, получим полное число всех независимых компонент симметричной функции d :

$$N_s = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + n(n-1) + n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} . \qquad /8.3/$$

В рассматриваемом сейчас случае, когда $n = 3$, имеем:

$$N_s = 10, \quad N_a = 1 .$$

Таким образом, размерность, соответствующая неприводимому представлению, реализуемому на линейном пространстве симметричных функций d_{A_1, A_2, A_3} трех унитарных индексов, равна 10.

Размерность, соответствующая неприводимому представлению на пространстве антисимметричных функций f_{A_1, A_2, A_3} равна 1. Поэтому мы можем положить:

$$f_{A,B,C} = f_0 \epsilon_{A,B,C} ,$$

где f_0 – некоторое число, а $\epsilon_{A,B,C}$ – единичный абсолютно антисимметричный тензор 3-го ранга /напомним, что мы уже вводили его в § 3/, элементы которого равны нулю, кроме

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 , \quad \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1 .$$

Покажем, что $\epsilon_{A,B,C}$ является инвариантом относительно преобразований группы SU_3. Действительно, функция $\{(U)_1 (U)_2 (U)_3 \epsilon\}_{A_1, A_2, A_3}$ также является антисимметричной функцией своих индексов, и потому должна совпадать с точностью до множителя с самой ϵ :

$$\{(U)_1 (U)_2 (U)_3 \epsilon\}_{A_1, A_2, A_3} = a\, \epsilon_{A_1, A_2, A_3} .$$

Чтобы определить число a , положим, к примеру, A=1, B=2, C=3. Тогда, восстанавливая все матричные индексы в явном виде, имеем

$$\sum_{(A',B',C')} (U)_{1,A'} (U)_{2,B'} (U)_{3,C'} \epsilon_{A',B',C'} = a .$$

Но сумма, стоящая слева, есть не что иное, как развернутая запись величины $\mathrm{Det}\,U$, а так как $\mathrm{Det}\,U = 1$, то $a = 1$. Таким образом, функция $f_0 \epsilon_{A,B,C}$ инвариантна относительно преобразований $(U)_1 (U)_2 (U)_3$.

Мы имеем в итоге два неприводимых представления, реализуемых соответственно на пространствах функций:

1) полностью антисимметричная функция $f_0 \epsilon_{A,B,C}$ – тривиальное представление /синглет/;
2) симметричные по всем индексам функции $d_{A,B,C}$ – 10 компонент /декуплет/;
Суммарная размерность этих представлений равна 11.

Так как размерность пространства всех функций $\psi_{A,B,C}$ равна 27, нам остается еще найти неприводимые представления с суммарной размерностью, равной 16. Для этого рассмотрим сначала волновые функции, антисимметричные по отношению к первой паре индексов, которую мы выделим, записав ее в квадратных скобках:

$$\psi_{A,B,C} = P_{[A,B]C} .$$

На основании установленной ранее леммы мы знаем, что величина

$$P_{[A,B]C} + P_{[B,C]A} + P_{[C,A]B}$$

должна быть функцией, антисимметричной по всем индексам. Чтобы обеспечить неприводимость данного представления, мы должны потребовать выполнения условия

$$P_{[A,B]C} + P_{[B,C]A} + P_{[C,A]B} = 0 .$$

Но каждому набору различных индексов A,B, в функции $P_{[A,B]C}$ ($P_{[A,B]C} \equiv 0$ в случае A=B) можно сопоставить только одно число $\mathcal{D}$, не совпадающее ни с A, ни с B (т.е. дополняющее числа A и B до последовательности 1,2,3). Учитывая это, запишем $P_{[A,B]C}$ через посредство некоторой матрицы $b_C^{\mathcal{D}}$ в виде

$$P_{[A,B]C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{A,B,\mathcal{D}} b_C^{\mathcal{D}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{(\mathcal{D})} \epsilon_{A,B,\mathcal{D}} b_C^{\mathcal{D}} ,$$

так как сумма по $\mathcal{D}$ состоит фактически только из одного члена. Коэффициент $1/\sqrt{2}$ введен здесь для сохранения нормировки:

$$\sum_{(A,B,C)} |P_{[A,B]C}|^2 = \sum_{(C,\mathcal{D})} |b_C^{\mathcal{D}}|^2 .$$

Рассмотрим теперь наше условие неприводимости. Имеем:

$$\sum_{(\mathcal{D})} \left\{ \epsilon_{A,B,\mathcal{D}} b_C^{\mathcal{D}} + \epsilon_{B,C,\mathcal{D}} b_A^{\mathcal{D}} + \epsilon_{C,A,\mathcal{D}} b_B^{\mathcal{D}} \right\} = 0$$

Рассмотрим сначала случай, когда индекс C не совпадает ни с A, ни с B. В сумме первых слагаемых останется один член с $\mathcal{D} = C$, в сумме вторых слагаемых – член с $\mathcal{D} = A$, в сумме третьих - член с $\mathcal{D} = B$. Ввиду того, что

$$\epsilon_{A,B,C} = \epsilon_{B,C,A} = \epsilon_{C,A,B},$$

мы получаем

$$b_C^C + b_A^A + b_B^B = 0 \qquad \text{или} \qquad \sum_{A=1}^{3} b_A^A = Sp\, b = 0.$$

В случае, когда C совпадает с одним из индексов A,B, рассматриваемое условие неприводимости представляет просто тождество. Действительно, возьмем, к примеру, случай C=B. Тогда при любом $b_B^{\mathcal{D}}$ получим

$$\epsilon_{A,B,\mathcal{D}}\, b_B^{\mathcal{D}} + \epsilon_{B,A,\mathcal{D}}\, b_B^{\mathcal{D}} = 0.$$

Таким образом, матрица b должна удовлетворять только одному условию: $Sp\, b = 0$, а это означает, что из $3 \times 3 = 9$ ее элементов независимыми являются только восемь.

Итак, мы получили октет, который описывается матрицей $b_C^{\mathcal{D}}$ с нулевым шпуром. Выясним теперь, как будет преобразовываться этот октет под действием преобразований U. Имеем:

$$P_{[A,B]C} \to P'_{[A,B]C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{(\mathcal{D})} \{(U)_1 (U)_2\, \epsilon\}_{A,B,\mathcal{D}}\; (U b)_C^{\mathcal{D}}$$

Здесь в выражении Ub подразумевается, что преобразование U действует на нижний индекс матрицы b. Но вследствие установленной ранее инвариантности ϵ и перестановочности операторов, действующих на различные индексы, имеем:

$$(U)_1 (U)_2\, \epsilon = (U)_1 (U)_2 (\overset{+}{U})_3 (U)_3\, \epsilon = (\overset{+}{U})_3 (U)_1 (U)_2 (U)_3\, \epsilon = (\overset{+}{U})_3\, \epsilon,$$

откуда :

$$\{(U)_1 (U)_2\, \epsilon\}_{A,B,\mathcal{D}} = \sum_{(\mathcal{D}')} \overset{+}{U}_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}\, \epsilon_{A,B,\mathcal{D}'}$$

и потому:

$$P'_{[A,B]C} = \sum_{(\mathcal{D}')} \epsilon_{A,B,\mathcal{D}'} \sum_{\mathcal{D}} (U b)_C^{\mathcal{D}}\, \overset{+}{U}_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{(\mathcal{D}')} \epsilon_{A,B,\mathcal{D}'} (U b \overset{+}{U})_C^{\mathcal{D}'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{(\mathcal{D})} \epsilon_{A,B,\mathcal{D}} (U b \overset{+}{U})_C^{\mathcal{D}} \qquad (8.4)$$

Таким образом, наши преобразования

$$P \to P' = (U)_1 (U)_2 (U)_3\, P$$

приводятся к преобразованию октета:

$$b \to b' = U b \overset{+}{U} \qquad /8.5/$$

того же типа, как и для мезонов. Чтобы подчеркнуть эту, разумеется, чисто формальную аналогию с октетом мезонов, мы и поставили у матрицы b второй индекс сверху.

Подчеркнем однако, что мы уже не можем интерпретировать b_A^B как волновую функцию частицы, состоящей из кварка и антикварка, так как барионный заряд рассматриваемых частиц равен 1.

Перейдем теперь в /8.4/ к бесконечно малым преобразованиям. Убедимся тогда, что:

$$(L_\alpha P)_{[A,B]C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{(D)} \epsilon_{A,B,D} (\lambda_\alpha b - b\lambda_\alpha)_C^D . \qquad /8.6/$$

Такое же соотношение, очевидно, имеет место и для любой линейной комбинации инфинитезимальных операторов. В частности, оно будет справедливо для заряда Q и гиперзаряда Y. Так как λ_3 и λ_8 диагональны, то из /8.6/ найдем:

$$(QP)_{[A,B]C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{(D)} \epsilon_{A,B,D} (Q_C - Q_D) b_C^D$$

$$(YP)_{[A,B]C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{(D)} \epsilon_{A,B,D} (Y_C - Y_D) b_C^D ,$$

где, как всегда Q_1, Q_2, Q_3 – заряды кварков p, n, λ, а Y_1, Y_2, Y_3 – соответствующие гиперзаряды. Поэтому, если для какой-либо функции b_C^D заряд и гиперзаряд имеют определенные значения:

$$(Q_C - Q_D) b_C^D = q b_C^D \qquad /8.7/$$

$$(Y_C - Y_D) b_C^D = y b_C^D ,$$

то и соответствующие функции $P_{[A,B]C}$ будут собственными функциями операторов заряда и гиперзаряда с теми же собственными значениями.

Заметим, еще, что поскольку L_1, L_2, L_3 представляют компоненты изотопического спина, то из /8.6/ вытекает также, что и изотопическая структура волновой функции P определяется изотопической структурой соответствующей функции b.

Итак мы нашли уже три неприводимых представления с суммарной размерностью

$$1 + 10 + 8 = 19.$$

Более того, нам становится ясным, как сконструировать недостающий октет: мы рассматривали выше функцию $P_{[A,B]C}$, антисимметричную по первым двум индексам, теперь же рассмотрим функцию $Q_{\{A,B\}C}$, симметричную по этим индексам, отмечая это свойство фигурными скобками. Согласно дополнительной лемме, комбинация $Q_{\{A,B\}C} + Q_{\{B,C\}A} + Q_{\{C,A\}B}$ представляет функцию, симметричную по всем трем индексам. Для того, чтобы исключить из рассмотрения полностью симметричное представление, разобранное нами ранее /декуплет $d_{A,B,C}$ /, мы должны приравнять эту комбинацию нулю

$$Q_{\{A,B\}C} + Q_{\{B,C\}A} + Q_{\{C,A\}B} = 0 . \qquad /8.8/$$

Функцию Q нетрудно выразить через ϵ – функцию и введенный нами октет . Для этого дополнительное условие /8.8/ перепишем в виде

$$Q_{\{A,B\}C} = \frac{1}{3}\left(2\,Q_{\{A,B\}C} - Q_{\{B,C\}A} - Q_{\{C,A\}B}\right),$$

допускающем разделение функции Q на две части

$$Q_{\{A,B\}C} = \frac{1}{3}\left(Q_{\{A,B\}C} - Q_{\{C,B\}A}\right) + \frac{1}{3}\left(Q_{\{B,A\}C} - Q_{\{C,A\}B}\right)$$

/ во 2-ом слагаемом 1-ой части мы, используя свойство симметрии Q , поменяли индексы в скобках местами $C \leftrightarrow B$, а в 1-ом слагаемом 2-ой части – поменяли $A \leftrightarrow C$ /, первая из которых антисимметрична относительно замены $A \leftrightarrow C$, а вторая – антисимметрична по отношению к замене $B \leftrightarrow C$. Иными словами, мы можем написать, что

$$Q_{\{A,B\}C} = P_{[A,C]B} + P_{[B,C]A} .$$

Но антисимметричные по первым двум индексам комбинации мы уже умеем представлять с помощью функций ϵ и b , поэтому

$$Q_{\{A,B\}C} = \nu \sum_{(D)} \left\{\epsilon_{A,C,D}\, b^{D}_{B} + \epsilon_{B,C,D}\, b^{D}_{A}\right\}, \qquad /8.9/$$

где ν – численный коэффициент, который мы подберем так, чтобы не изменить нормировку:

$$\sum_{(A,B,C)} \left|Q_{\{A,B\}C}\right|^2 = \sum_{(C,D)} \left|b^{D}_{C}\right|^2 . \qquad /8.10/$$

Заметим,прежде всего, что если мы подставим в /8.9/:

$$b^{D}_{C} = \ell\, \delta^{D}_{C} ,$$

то получим тождественный нуль, так как

$$\sum_{(D)} \left\{\epsilon_{A,C,D}\,\delta^{D}_{B} + \epsilon_{B,C,D}\,\delta^{D}_{A}\right\} = \epsilon_{A,C,B} + \epsilon_{B,C,A} = 0 .$$

Поэтому в /8.9/ можно ограничиться рассмотрением матриц b с нулевым шпуром

$$Sp\, b = 0,$$

и мы приходим опять к октету.

Нетрудно заметить, что рассматриваемые преобразования /8.1/ для функций /8.9/ также приводятся к преобразованию октета:

$$b \to b' = U b \overset{+}{U} ,$$

откуда будут вытекать все те свойства, о которых мы говорили выше в связи с исследованием функций $P_{[A,B]C}$, антисимметричных по первым двум индексам.

Итак, наше линейное представление /8.1/ группы SU_3 полностью разложилось на неприводимые представления – один синглет, один декуплет и два октета:

$$3 \times 3 \times 3 = (1) + (10) + (8) + (8).$$

Подсчитаем теперь еще число ν. Имеем из /8.9/:

$$\sum_{(A,B,C)} |Q_{\{A,B\}C}|^2 = 2\nu^2 \sum_{(B,D)} |b_B^D|^2 + 2\nu^2 \sum_{(A,D)} |b_A^D|^2 +$$

$$+ 2\nu^2 \sum_{(D,D',A,B,C)} \epsilon_{A,C,D} \epsilon_{B,C,D'} \overset{*}{b}{}_B^D b_A^{D'} =$$

$$= 4\nu^2 \sum_{(C,D)} |b_C^D|^2 + 2\nu^2 \sum_{(D,D',A,B,C)} \epsilon_{A,C,D} \epsilon_{B,C,D'} \overset{*}{b}{}_B^D b_A^{D'} .$$

Во второй сумме в правой части могут быть отличны от нуля только те члены, для которых

или $\quad D = B, \quad D' = A, \quad A \neq B$ или $\quad D = D', \quad A = B.$

Следовательно

$$2\nu^2 \sum_{(D,D',A,B,C)} \epsilon_{A,C,D} \epsilon_{B,C,D'} \overset{*}{b}{}_B^D b_A^{D'} = 2\nu^2 \sum_{(A,B,C)} \epsilon_{A,C,B} \epsilon_{B,C,A} \overset{*}{b}{}_B^B b_A^A +$$

$$+ 2\nu^2 \sum_{(A,C,D)} \epsilon_{A,C,D} \epsilon_{A,C,D} |b_A^D|^2 =$$

$$= -2\nu^2 \sum_{\binom{A,B}{A \neq B}} \overset{*}{b}{}_B^B b_A^A + 2\nu^2 \sum_{\binom{A,D}{A \neq D}} |b_A^D|^2 =$$

$$= -2\nu^2 \sum_{(A,B)} \overset{*}{b}{}_B^B b_A^A + 2\nu^2 \sum_{(A,B)} |b_A^B|^2 .$$

Но

$$\sum_{(A,B)} \overset{*}{b}{}_B^B b_A^A = Sp\, b^+ Sp\, b = 0.$$

Таким образом, находим:

$$\sum_{(A,B,C)} |Q_{\{A,B\}C}|^2 = 6\nu^2 \sum_{(C,D)} |b_C^D|^2$$

и из /8.10/ будем иметь $\qquad \nu = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Заметим теперь, что нормированные функции $P_{[A,B]C}$ и $Q_{\{A,B\}C}$ взаимно ортогональны:

$$\sum_{(A,B,C)} \overset{*}{P}_{[A,B]C} \, Q_{\{A,B\}C} = 0 ,$$

Так как P антисимметрична по A,B, а Q – симметрична. Вместо P и Q мы можем взять "смешанные" функции:

$$\begin{cases} \Psi_{A,B,C} = u P_{[A,B]C} + v Q_{\{A,B\}C} ; \\ \Phi_{A,B,C} = -v^* P_{[A,B]C} + u^* Q_{\{A,B\}C} ; \end{cases} \qquad uu^* + vv^* = 1 .$$

Обе эти функции нормированы и взаимно ортогональны. Под действием преобразований (8.1) оба пространства

$$\{\Psi_{A,B,C}\} , \qquad \{\Phi_{A,B,C}\}$$

преобразуются, очевидно, сами в себя. Поэтому с тем же правом, как и функции P и Q, мы можем выбрать Ψ и Φ в качестве волновых функций, соответствующих двум октетам.

Перейдем теперь к вопросу о сопоставлении полученных неприводимых представлений группы SU_3 реальным физическим частицам.

Мы имеем здесь в виду 8 "стабильных" барионов

$$P, N, \Lambda ; \quad \Sigma^+ , \Sigma^\circ , \Sigma^- ; \quad \Xi^\circ , \Xi$$

и 10 "низко-лежащих резонансов":

$$\Delta^{++}_\delta , \Delta^+_\delta , \Delta^\circ_\delta , \Delta^-_\delta ; \ \Sigma^+_\delta , \Sigma^\circ_\delta , \Sigma^-_\delta ; \ \Xi^\circ_\delta , \Xi^-_\delta ; \ \Omega^- .$$

Совершенно естественно отнести эти 10 резонансов к декуплету, а 8 стабильных барионов к одному октету.

Рассмотрим сначала эти восемь частиц и приведем таблицу, содержащую некоторые экспериментальные данные:

	$m(MeV)$	$m^2(BeV)^2$	Y	S	I	I_3
P	938	0,880	1	0	1/2	1/2
N	940	0,882	1	0		−1/2
Λ	1115	1,242	0	−1	0	0
Σ^+	1189	1,415	0	−1	1	1
Σ°	1192	1,422	0	−1		0
Σ^-	1197	1,433	0	−1		−1
Ξ°	1314	1,727	−1	−2	1/2	1/2
Ξ^-	1321	1,745	−1	−2		−1/2

Таблица 8

Ясно, прежде всего, что при выключении слабых взаимодействий N, Λ, Σ^+, Σ^-, Ξ^0, Ξ^- будут стабильными частицами (P – абсолютно стабилен) . Действительно, тогда мы имеем законы сохранения странности и электрического заряда адронов. Но любой из рассматриваемых "странных" барионов не может изменить свою странность, так как адронами с наименьшей массой, несущими странность 1, являются K – мезоны с массой $\sim 494 MeV$ а для испускания одного K –мезона с соответствующим увеличением странности бариона на 1 нехватает энергии, поскольку разность масс между соответствующими барионами $< 255 MeV$. Распады же без изменения странности, например, $\Sigma^\pm$ на Λ запрещены сохранением электрического заряда адронов. Действительно, адроном с наименьшей массой, несущим электрический заряд, будет $\pi^\pm$ с массой $\sim 139 MeV$, а разность масс $\Sigma^\pm$ и Λ меньше 82 MeV.

Единственно возможными распадами при выключенных слабых взаимодействиях будут распады Σ^0 на Λ и γ –кванты, обуславливаемые электромагнитными взаимодействиями. На самом деле, обычной формой распада является:

$$\Sigma^0 \to \Lambda + \gamma .$$

Вследствие электромагнитной природы таких взаимодействий совершенно естественно, что время жизни Σ^0 оказывается гораздо меньшим (на 4 порядка) времени жизни остальных странных барионов изучаемого семейства.

Во всяком случае, при выключении и слабых, и электромагнитных взаимодействий (приближение сильного взаимодействия) все 8 барионов оказываются стабильными.

Мы будем в дальнейшем учитывать только сильные взаимодействия и потому должны, в частности, считать равными массы у членов одного и того же изотопического мультиплета. Поэтому мы возьмем огрубленные "средние" значения масс внутри каждого изотопического мультиплета и получим следующую таблицу:

	$m\,(MeV)$	$m^2\,(BeV)^2$
P, N	939	0,881
Λ	1115	1,242
Σ	1193	1,423
Ξ	1318	1,738

Таблица 8

Перейдем теперь к нахождению функций b_A^B для рассматриваемых 8 барионов.

Мы уже отмечали, что волновая функция октета содержит некоторую неопределенность. Действительно, ее можно взять в виде:

$$\psi^{(8)}_{A,B,C} = u P_{[A,B]C} + v Q_{\{A,B\}C} =$$

$$= \frac{u}{\sqrt{2}} \sum_{(D)} \epsilon_{A,B,D}\, b_C^D + \frac{v}{\sqrt{6}} \sum_{(D)} \{ \epsilon_{A,C,D}\, b_B^D + \epsilon_{B,C,D}\, b_A^D \} , \qquad (8.11)$$

где u, v - произвольные комплексные числа (впрочем, одни и те же для всего октета) с условием нормировки

$$|u|^2 + |v|^2 = 1.$$

Однако эта неопределенность, связанная с произволом в выборе параметров u, v, не помешает нам найти соответствующую октетную матрицу. Дело в том, что, как уже отмечалось ранее, изотопическая структура функций P и Q, а тем самым и функции $\psi^{(8)}$, определяется изотопической структурой данной b_A^B. Кроме того, нам известно, что если b_A^B будет собственной функцией операторов заряда и гиперзаряда

$$(Q_A - Q_B) b_A^B = q b_A^B$$

$$(Y_A - Y_B) b_A^B = y b_A^B ,$$

то P, Q, а следовательно и $\psi^{(8)}$ будут собственными функциями заряда и гиперзаряда с теми же собственными значениями:

$$Q\psi^{(8)} = q\psi^{(8)}; \qquad Y\psi^{(8)} = y\psi^{(8)}.$$

Поэтому, как и в случае мезонного октета, мы должны построить ортонормированный базис из восьми собственных функций операторов Q, Y с надлежащими изотопическими свойствами. Напомним значения Q, Y для кварков:

$$Q_1 = \frac{2}{3}, \qquad Q_2 = -\frac{1}{3}, \qquad Q_3 = -\frac{1}{3}$$

$$Y_1 = \frac{1}{3}, \qquad Y_2 = \frac{1}{3}, \qquad Y_3 = -\frac{2}{3}.$$

Имеем поэтому следующие базисные функции: нуклонный дублет:

$$(P)_A^B = \delta(A-1)\delta(B-3); \; I_3 = \frac{1}{2}; \; q = \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 1; \; y = \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = 1.$$

$$(N)_A^B = \delta(A-2)\delta(B-3); \; I_3 = -\frac{1}{2}; \; q = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 0; \; y = \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = 1$$

изотопический триплет Σ гиперонов (формальный аналог π -мезонного изотопического триплета):

$$(\Sigma^+)_A^B = \delta(A-1)\,\delta(B-2)$$

$$(\Sigma^0)_A^B = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\delta(A-1)\,\delta(B-1) - \delta(A-2)\,\delta(B-2)\Big)$$

$$(\Sigma^-)_A^B = \delta(A-2)\,\delta(B-1)$$

изотопический дублет Ξ :

$$(\Xi^-)_A^B = \delta(A-3)\delta(B-1); \quad (\Xi^0)_A^B = \delta(A-3)\delta(B-2)$$

и, наконец, ортогональную ко всем предыдущим функциям, волновую функцию для Λ - гиперона:

$$(\Lambda)_A^B = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\delta(A-1)\delta(B-1) + \delta(A-2)\delta(B-2) - 2\delta(A-3)\delta(B-3)\right\},$$

представляющую изотопический синглет (формальный аналог η -мезона).

Произвольная волновая функция октета b_A^B является суперпозицией найденных 8 базисных функций:

$$b_A^B = C_p\,(P)_A^B + C_N\,(N)_A^B + C_{\Sigma^+}(\Sigma^+)_A^B + C_{\Sigma^0}(\Sigma^0)_A^B + C_{\Sigma^-}(\Sigma^-)_A^B +$$
$$+ C_{\Xi^-}(\Xi^-)_A^B + C_{\Xi^0}(\Xi^0)_A^B + C_\Lambda(\Lambda)_A^B.$$

Как и раньше, напишем это представление в матричной форме, заменив для краткости $C_p, \ldots, C_\Lambda$ символами соответствующих частиц. Получим:

$$b = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda, & \Sigma^-, & \Xi^- \\ \Sigma^+ , & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda, & \Xi^0 \\ P , & N , & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix}. \tag{8.12}$$

Заметим, что в отличие от мезонного октета, здесь мы не имеем никакой симметрии между верхними и нижними индексами b_A^B и нет никакого смысла рассматривать самосопряженные матрицы b .

Разместим теперь резонансы $\Delta_\delta, \Sigma_\delta, \Xi_\delta, \Omega$ по состояниям декуплета. Приведем сначала соответствующую таблицу:

	m (MeV)	m^2 (BeV)^2	Y	I	I_3
Δ_δ^{++}, Δ_δ^{+}, Δ_δ^{0}, Δ_δ^{-}	1236	1,53	1	3/2	3/2, 1/2, -1/2, -3/2
Σ_δ^+, Σ_δ^0, Σ_δ^-	1382	1,91	0	1	1, 0, - 1
Ξ_δ^0, Ξ_δ^-	1530	2,34	-1	1/2	1/2, - 1/2
Ω^-	1675	2,81	-2	0	0

Таблица 10.

Здесь не указаны разности масс внутри изотопических мультиплетов. Эти разности – "электромагнитные поправки к основной массе" еще не измерены.

Из рассматриваемых резонансов лишь Ω^- – гиперон оказывается стабильной частицей при выключении слабых взаимодействий. Дело в том, что выигрыш в энергии при увеличении странности на 1 будет $\sim 145\,MeV$, т.е. будет меньше $494\,MeV$ – массы K –мезона ("странного" адрона с наименьшей массой).

Пользуясь случаем, подчеркнем, что Ω^- гиперон был открыт на основании теоретического предсказания именно как десятый член декуплета группы SU_3.

В приведенной таблице сразу же бросается в глаза эквидистантность масс рассматриваемых резонансов – разность масс пропорциональна разности гиперзаряда. Имеем действительно:

$$m_{\Sigma_\delta} - m_{\Delta_\delta} = 1382-1236=146\,; \qquad m_{\Xi_\delta} - m_{\Sigma_\delta} = 1530-1382=147$$

Поэтому, экстраполируя этот закон

$$m = m_{\Sigma_\delta} - (1\cdot 46\,MeV)Y \tag{8.13}$$

на случай $Y=-2$, мы получаем:

$$m_\Omega = 1675,$$

что фактически совпадает с экспериментальным значением. Именно эти соображения и позволили предсказать с такой исключительной точностью массу Ω^- частицы. Открытие Ω^- и блестящее экспериментальное подтверждение правильности теоретического предсказания ее массы обратили внимание физиков на важное значение группы SU_3 для классификации элементарных частиц.

Перейдем теперь к построению базисных функций для декуплета.

Напомним, что симметричная функция трех изотопических индексов $\psi^{(S)}_{A_1,A_2,A_3}(A_1,A_2,A_3=1,2)$ соответствует изотопическому спину $I=3/2$; для симметричной функции $\psi^{(S)}_{A_1,A_2}$ двух таких индексов $I=1$; функция ψ_A с одним индексом A соответствует $I=1/2$. С другой стороны, p_A, n_A отличны от нуля, лишь если $A=1,2$. Поэтому если в симметричном состоянии $\psi^{(S)}_{A_1,A_2,A_3}$ участвуют три кварка из изотопического дублета, то $I=3/2$, если два таких кварка, то $I=1$, и если только один кварк из дублета, то $I=1/2$. Кроме того, примем во внимание аддитивность заряда и гиперзаряда. Тогда, взяв как всегда:

$$p_A = \delta(A-1)\,; \qquad n_A = \delta(A-2)\,; \qquad \lambda_A = \delta(A-3)\,.$$

выпишем ортонормированные симметричные комбинации троек этих функций и сопоставим их с частицами декуплета:

$$(\Delta_\delta^{++})_{A,B,C} = p_A\,p_B\,p_C$$

$$(\Delta_\delta^{+})_{A,B,C} = \frac{1}{\sqrt{3}}(p_A\,p_B\,n_C + p_B\,p_C\,n_A + p_C\,p_A\,n_B)$$

$$(\Delta_\delta^{0})_{A,B,C} = \frac{1}{\sqrt{3}}(n_A\,n_B\,p_C + n_B\,n_C\,p_A + n_C\,n_A\,p_B)$$

$$(\Delta_\delta^{-})_{A,B,C} = n_A\,n_B\,n_C\,.$$

В состав наиболее легких Δ_δ-гиперонов λ -кварк не входит вообще. Σ_δ-гипероны построим, используя один λ - кварк

$$(\Sigma_\delta^+)_{A,B,C} = \frac{1}{\sqrt{3}}(p_A p_B \lambda_C + p_B p_C \lambda_A + p_C p_A \lambda_B)$$

$$(\Sigma_\delta^0)_{A,B,C} = \frac{1}{\sqrt{6}}(p_A n_B \lambda_C + p_B n_C \lambda_A + p_C n_A \lambda_B + p_B n_A \lambda_C + p_A n_C \lambda_B + p_C n_B \lambda_A).$$

$$(\Sigma_\delta^-)_{A,B,C} = \frac{1}{\sqrt{3}}(n_A n_B \lambda_C + n_B n_C \lambda_A + n_C n_A \lambda_B).$$

В состав Ξ войдут уже два λ -кварка

$$(\Xi^0)_{A,B,C} = \frac{1}{\sqrt{3}}(p_A \lambda_B \lambda_C + p_B \lambda_C \lambda_A + p_C \lambda_A \lambda_B)$$

$$(\Xi^-)_{A,B,C} = \frac{1}{\sqrt{3}}(n_A \lambda_B \lambda_C + n_B \lambda_C \lambda_A + n_C \lambda_A \lambda_B).$$

Последний, десятый член декуплета – Ω^- -гиперон представляется, очевидно, как связанное состояние трех λ -кварков:

$$(\Omega^-)_{A,B,C} = \lambda_A \lambda_B \lambda_C .$$

Вспоминая интерполяционную формулу (8.13) для масс декуплета, мы видим, что ее нетрудно получить в модели кварков, если предположить, что масса бариона есть сумма постоянной массы и поправки, пропорциональной числу входящих в него более тяжелых λ -кварков:

$$(m)_{A,B,C} = m_0 + h_0 \{\delta(A-3) + \delta(B-3) + \delta(C-3)\}.$$

Так как

$$\delta(A-3) = \frac{1}{3} - Y_A ,$$

то для массы бариона из декуплета найдем:

$$m = m^0 + h_0 - h_0 Y ,$$

откуда и следует формула (8.13) ;

$$m = m_{\Sigma_\delta} - h_0 Y. \tag{8.14}$$

В отличие от случая мезонов мы теперь пользуемся линейной массовой формулой. Посмотрим, что получилось бы, если бы мы рассматривали m^2 вместо m . Имеем:

$$m^2_{\Sigma_\delta} - m^2_{\Delta_\delta} = 0{,}38\,(BeV)^2$$

$$m^2_{\Xi_8} - m^2_{\Sigma_8} = 0{,}43\,(BeV)^2$$
$$m^2_{\Omega} - m^2_{\Xi_8} = 0{,}47\,(BeV)^2.$$

Колебания разностей квадратов масс оказываются значительными, так что экспериментальная ситуация более благоприятна для линейного закона.

Перейдем теперь к установлению соотношений между массами октета барионов.

Рассмотрим среднее значение массы $\langle \bar{m} \rangle_8$ в октете барионов и приравняем ее форме:

$$\langle \bar{m} \rangle_8 = \sum_{(C,D)} M_{C,D}\, b_C^{*D}\, b_C^D \,, \tag{8,15}$$

квадратичной по отношению к функции b_C^D, подобрав соответствующим образом выражение $M_{C,D}$.

Если бы группа SU_3' была точной, все частицы октета – неприводимого представления SU_3 –имели бы равную массу. В этом случае $M_{C,D}$ равнялась бы постоянной: $M_{C,D} = m$.

Учтем нарушение симметрии SU_3, причём, как всегда, будем считать, что это нарушение приводит к аддитивным поправкам к m, происходящим из-за наличия λ -кварков в составе рассматриваемых барионов.

С другой стороны, очевидно, что один или два λ -кварка будут присутствовать в состоянии $\Psi^{(8)}_{A,B,C}$ только в том случае, когда для значения одного или двух унитарных индексов из A,B,C, равного 3, соответствующие компоненты функции $\Psi^{(8)}_{A,B,C}$ не обращаются тождественно в нуль. Три кварка не могут присутствовать в рассматриваемом состоянии, так как из "соотношения неприводимости"

$$\Psi^{(8)}_{A,B,C} + \Psi^{(8)}_{B,C,A} + \Psi^{(8)}_{C,A,B} = 0$$

следует тождество

$$\Psi^{(8)}_{A,A,A} = 0\,.$$

Напомним теперь, что функция $\Psi^{(8)}$ может быть выражена через октетную функцию b_C^D в следующем виде:

$$\frac{u}{\sqrt{2}} \sum_{(D)} \epsilon_{A,B,D}\, b_C^D + \frac{v}{\sqrt{6}} \sum_{(D)} \left\{ \epsilon_{A,C,D}\, b_B^D + \epsilon_{B,C,D}\, b_A^D \right\}.$$

Отсюда видно, что значение 3 может появиться среди A,B,C следующими двумя способами:

или 1) Нижний индекс b равен 3 ;
или 2) Верхний индекс b равен 1 или 2.

Действительно, выражение

$$\epsilon_{A_1,A_2,D}\; b^D_{A_3}$$

может быть отлично от нуля, лишь если все A_1, A_2, D различны, но раз

$\mathcal{D}$ =1,2, то один из индексов A_1, A_2 должен равняться 3.

Так как в рассматриваемом октете барионов нет никакой симметрии между нижними и верхними индексами b , вклады в $M_{C,\mathcal{D}}$ от обоих "способов вхождения" λ –кварка должны быть, вообще говоря, различны. Положим поэтому:

$$M_{C,\mathcal{D}} = m + \alpha\,\delta(C-3) + \alpha_1\{\delta(\mathcal{D}-1)+\delta(\mathcal{D}-2)\}.$$

Во всяком случае следует ожидать, что

$$\alpha > 0, \qquad \alpha_1 > 0$$

Замечая, что

$$\delta(\mathcal{D}-1)+\delta(\mathcal{D}-2)+\delta(\mathcal{D}-3) = 1,$$

можем написать также:

$$M_{C,\mathcal{D}} = m_0 + \alpha\,\delta(C-3) + \beta\,\delta(\mathcal{D}-3),$$

где

$$m_0 = m+\alpha; \qquad \beta = -\alpha_1 < 0 .$$

Подставив найденное выражение в (8.15), найдем:

$$<\bar{m}>_8 = \sum_{(C,\mathcal{D})} \overset{*}{b}{}^{\mathcal{D}}_C\, b^{\mathcal{D}}_C \{m_0 + \alpha\,\delta(C-3) + \beta\,\delta(\mathcal{D}-3)\} =$$

$$= m_0 \sum_{(C,\mathcal{D})} \overset{*}{b}{}^{\mathcal{D}}_C\, b^{\mathcal{D}}_C + \alpha \sum_{(\mathcal{D})} \overset{*}{b}{}^{\mathcal{D}}_3\, b^{\mathcal{D}}_3 + \beta \sum_{(C)} \overset{*}{b}{}^{3}_C\, b^{3}_C .$$

С помощью явного выражения для матрицы b^B_A ,написанного в виде (8.12), мы получаем диагональную квадратичную форму:

$$<\bar{m}>_8 = m_0\{\overset{*}{P}P + \overset{*}{N}N + \overset{*}{\Lambda}\Lambda + \overset{*}{\Sigma}{}^{+}\Sigma^{+} + \overset{*}{\Sigma}{}^{0}\Sigma^{0} + \overset{*}{\Sigma}{}^{-}\Sigma^{-} + \overset{*}{\Xi}{}^{0}\Xi^{0} + \overset{*}{\Xi}{}^{-}\Xi^{-}\} +$$

$$+ \alpha\{\overset{*}{\Xi}{}^{-}\Xi^{-} + \overset{*}{\Xi}{}^{0}\Xi^{0} + \tfrac{2}{3}\overset{*}{\Lambda}\Lambda\} +$$

$$+ \beta\{\overset{*}{P}P + \overset{*}{N}N + \tfrac{2}{3}\overset{*}{\Lambda}\Lambda\} .$$

Отсюда непосредственно вытекают следующие соотношения для масс частиц октета

$$\left.\begin{aligned} m_\Sigma &= m_0 \\ m_P = m_N &= m_0 + \beta \\ m_\Xi &= m_0 + \alpha \\ m_\Lambda &= m_0 + \tfrac{2}{3}(\alpha+\beta) \end{aligned}\right\} . \qquad (8.16)$$

Мы можем исключить константы α и β и написать соотношения непосредственно между самими массами частиц. Имеем:

$$m_N + m_\Xi = 2m_\Sigma + (\alpha+\beta)$$

и, с другой стороны,

$$\frac{m_\Sigma + 3m_\Lambda}{2} = 2m_\Sigma + (\alpha+\beta),$$

откуда следует соотношение Гелл-Манна и Окубо

$$\frac{m_\Sigma + 3m_\Lambda}{2} = m_N + m_\Xi ,$$

которое достаточно хорошо оправдывается на эксперименте:

$$2269 (MeV) \sim 2257 (MeV).$$

Вместо этого соотношения мы можем выбрать в формулах (8.16) три равенства из четырех и определить из них величины m_0 , α , β , исходя из масс трех барионов, заданных в таблице 9. Тогда оставшееся в (8.16) четвертое равенство определит массу 4-го бариона.

Разберем здесь два варианта.

Вариант I. Зададимся значениями m_N, m_Σ, m_Ξ и определим наши параметры из равенств, входящих в (8.16):

$$m_0 = m_\Sigma , \quad m_N = m_0 + \beta , \quad m_\Xi = m_0 + \alpha .$$

Найдем (в MeV):

$$m_0 = m_\Sigma = 1193 , \qquad \alpha = 125 , \qquad \beta = -254 . \tag{8.17}$$

Тогда для оставшегося бариона Λ из (8.16) найдем

$$m_\Lambda = m_\Sigma + \frac{2}{3}(\alpha+\beta) = 1107 \ MeV$$

вместо экспериментального значения $m_\Lambda = 1115 MeV$.

Вариант 2. Зададимся значениями m_N, m_Λ, m_Σ и воспользуемся соотношениями:

$$m_0 = m_\Sigma , \quad m_N = m_0 + \beta , \quad m_\Lambda = m_0 + \frac{2}{3}(\alpha+\beta) .$$

Тогда (в MeV):

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= m_\Sigma = 1193 , \\ \beta &= -254 , \\ \alpha &= \frac{3}{2}(m_\Lambda - m_\Sigma) - \beta = 137 \end{aligned}\right\} \tag{8.18}$$

и для массы Ξ получим:

$$m_\Xi = m_0 + \alpha = 1330 \ MeV$$

вместо "табличного" значения $1318 MeV$.

В обоих вариантах, хотя и имеются расхождения в величине $\alpha = 125, 137 MeV$

порядка 10%, точность определения массы 4-го бариона по трем данным массам должна считаться весьма удовлетворительной – соответствующая ошибка не превышает 1,% и ее абсолютное значение 8–12 MeV имеет порядок величины электромагнитного расщепления масс внутри одного изотопического мультиплета.

Заметим еще, что соотношение (8.16) можно представить в "алгебраической" форме:

$$m = M_0 + h_1 Y + h_2 I(I+1) + h_3 Y^2.$$

Выбор именно такой формы можно мотивировать следующим образом. Величины Y и $\vec{I}^2 = I(I+1)$, нарушая симметрию SU_3, сохраняют симметрию изотопической группы SU_2. Четыре параметра M_0, h_1, h_2, h_3 взяты для того, чтобы добиться точного совпадения рассматриваемого алгебраического выражения с четырьмя величинами:

$$
\begin{array}{ll}
m_0 & \text{при} \quad Y=0, \quad I=1; \\
m_0+\beta & \text{при} \quad Y=1, \quad I=1/2; \\
m_0+\alpha & \text{при} \quad Y=-1, \quad I=1/2; \\
m_0+\frac{2}{3}(\alpha+\beta) & \text{при} \quad Y=0, \quad I=0;
\end{array}
$$

и тем самым обеспечить полную эквивалентность с массовыми соотношениями (8.16).

Имеем для определения M_0, h_1, h_2, h_3:

$$
\left.
\begin{aligned}
m_0 &= M_0 + 2h_2 \\
m_0+\beta &= M_0 + h_1 + \frac{3}{4}h_2 + h_3 \\
m_0+\alpha &= M_0 - h_1 + \frac{3}{4}h_2 + h_3 \\
m_0+\frac{2}{3}(\alpha+\beta) &= M_0
\end{aligned}
\right\},
$$

откуда получим

$$h_3 = -\frac{1}{4}h_2 .$$

В результате получаем формулу Окубо:

$$m = M_0 + h_1 Y + h_2 \left\{ I(I+1) - \frac{Y^2}{4} \right\}. \tag{8.19}$$

Находим далее:

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= m_0 + \frac{2}{3}(\alpha+\beta) \\ h_2 &= -\frac{1}{3}(\alpha+\beta) \\ h_1 &= \beta - \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \end{aligned}\right\} \qquad (8.20)$$

При значениях (8.20) формула Окубо (8.19) точно совпадает с (8.16). Поэтому, если подставить в (8.20) значения m_0, α, β из (8.17), то формула (8.19) будет воспроизводить табличные значения m_N, m_Σ, m_Ξ и давать приближенное значение m_Λ (1107 вместо 1115). Если же воспользоваться вторым вариантом значений (8.18), то формула (8.19) будет воспроизводить табличные значения m_N, m_Λ, m_Σ и давать приближенное значение m_Ξ (1330 вместо 1318). Подсчитаем сейчас коэффициенты M_0, h_1, h_2 для этих двух вариантов. Имеем в первом случае (в MeV):

$$h_1 = -139{,}5; \quad h_2 = 43; \quad M_0 = 1107; \qquad (8.21)$$

а во втором случае (в MeV):

$$h_1 = -195{,}5 \qquad h_2 = 38 \qquad M_0 = 1115. \qquad (8.22)$$

Попробуем теперь расширить формулу Окубо (8.19), написанную здесь для октета таким образом, чтобы она оказалась применимой и для декуплета.

Заметим, что барионы из декуплета обладают спином $J = 3/2$, а у барионов из октета $J = 1/2$, и будем рассуждать так же, как мы это делали при объединении массовых формул мезонного октета и мезонного нонета. Предположим, что добавки к массе представляются в виде добавок, нарушающих инвариантность SU_3, но не зависящих от J, и добавок, инвариантных по отношению к SU_3, но зависящих от J. Поскольку члены

$$h_1 Y; \quad h_2\left(I(I+1) - \frac{Y^2}{4}\right)$$

нарушают симметрию SU_3, будем считать, что h_1, h_2 не зависят от J и являются одинаковыми для октета и декуплета. Таким образом придем к расширенной формуле Окубо:

$$m = m_J + h_1 Y + h_2\left(I(I+1) - \frac{Y^2}{4}\right). \qquad (8.23)$$

Здесь для октета:

$$m_{1/2} = M_0.$$

Напишем теперь формулу (8.23) для декуплета:

$$m = m_{3/2} + h_1 Y + h_2\left(I(I+1) - \frac{Y^2}{4}\right),$$

и примем во внимание значения I и Y для соответствующих частиц:

$$\Delta_\delta; \qquad I = 3/2, \quad Y = 1;$$

$$\Sigma_\delta; \qquad I = 1, \quad Y = 0;$$

$$\Xi_\delta; \qquad I = 1/2, \quad Y = -1;$$

$$\Omega^-; \qquad I = 0, \quad Y = -2.$$

Нетрудно заметить отсюда, что для частиц декуплета имеется следующее соотношение между изотопическим спином и гиперзарядом :

$$I(I+1) - \frac{Y^2}{4} = 2 + \frac{3}{2} Y \tag{8.24}$$

и потому формулу Окубо можно представить в виде:

$$m = m^* - h_0 Y,$$

где

$$m^* = m_{1/2} + 2 h_2,$$

$$h_0 = -\left(h_1 + \frac{3}{2} h_2\right) = \alpha.$$

Таким образом, мы опять пришли к формуле (8.14) с линейной зависимостью масс от гиперзаряда для частиц декуплета.

Посмотрим, как будет обстоять дело с числовыми значениями. Если воспользоваться первым вариантом (8.17), то

$$h_0 = \alpha = 125 \ MeV.$$

Второй вариант (8.18) дает:

$$h_0 = \alpha \quad = 137 \ MeV.$$

Значение величины $h_0 = 146 \ MeV$, взятое нами ранее в (8.13) для декуплета, отличается от этого приближения всего на 6%. Видим отсюда, что предпочтительнее взять второй вариант (8.18). Тогда расщепление масс в декуплете вполне удовлетворительно представится формулой (в MeV):

$$m = m^* - 137 \cdot Y.$$

Действительно, положив:

$$m^* = 1385 \ MeV, \text{ т.е.} \qquad m_{3/2} = 1277 \ MeV,$$

найдем (в MeV):

$$m_{\Delta_\delta} = 1248, \text{ вместо } 1236$$

m_{Σ_δ}=1385 , вместо 1382

m_{Ξ_δ}=1522 , вместо 1530

m_{Ω} =1659 , вместо 1675

Ошибка во всех случаях не превышает 1%.

Итак, численные результаты подтверждают справедливость формулы Окубо (8.23) и для октета, и для декуплета. Это может служить некоторым указанием на справедливость сделанного предположения о том, что масса частиц октета и декуплета состоит из постоянной массы и аддитивных добавок двух типов – одни нарушают симметрию SU_3, но не зависят от J, другие зависят от J, но инвариантны по отношению к SU_3.

Такое положение так же, как и в случае мезонов, приводит к мысли объединить октет и декуплет в одно неприводимое представление группы SU_6.

Для построения линейных представлений этой группы мы будем рассматривать волновые функции системы трех кварков

$$\psi_{a_1, a_2, a_3},$$

зависящие от трех "комбинированных" индексов. Здесь комбинированный индекс представляет собой совокупность унитарного и спинового индекса:

$$a = (A, \sigma) \qquad (A = 1, 2, 3; \quad \sigma = 1, 2)$$

и принимает всего значений: 3 x 2 = 6. Как и в случае группы SU_3, линейное представление группы SU_6:

$$\psi_{a_1, a_2, a_3} \to \psi'_{a_1, a_2, a_3} = \sum_{(a'_1, a'_2, a'_3)} U_{a_1, a'_1} U_{a_2, a'_2} U_{a_3, a'_3} \psi_{a'_1, a'_2, a'_3}$$

в линейном, комплексном, 6х6х6 =216 -мерном пространстве

$$\{ \psi_{a_1, a_2, a_3} \}$$

является приводимым. Неприводимыми будут линейные представления на функциях ψ, симметричных по отношению ко всем трем индексам, на функциях ψ, полностью антисимметричных, и на функциях ψ со "смешанной" симметрией.

Заметим, что спин каждого из барионов Δ_δ, Σ_δ, Ξ_δ равен J =3/2. Надо, конечно, подчеркнуть, что до сих пор спин Ω^- не измерен, но пока имеется полная уверенность, что он также равен 3/2. Если бы спин Ω^- оказался не таким, как у всех остальных барионов декуплета, то это было бы сильным ударом по всему направлению работ по применению группы SU_3, а особенно группы SU_6, для систематики элементарных частиц. Будем поэтому надеяться, что последующие измерения подтвердят, что и для Ω спин J =3/2 и припишем спин 3/2 всем барионам из рассматриваемого декуплета.

Как мы видели, функция трех спиновых индексов $\chi_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$ будет соответствовать J =3/2, если она полностью симметрична. Так как "унитарная часть" d_{A_1, A_2, A_3} волновой функции декуплета тоже полностью симметрична, то волновая функция декуплета с учетом спина:

$$\psi^{(10)}_{a_1, a_2, a_3} = d_{A_1, A_2, A_3} \chi_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$$

будет симметрична по отношению ко всем перестановкам индексов a_1, a_2, a_3. Поэтому, раз мы предполагаем, что наш декуплет входит в неприводимое представление группы SU_6, то тем самым мы фиксируем представление, реализуемое в линейном комплексном пространстве всех полностью симметричных функций $\psi^{(10)}_{a_1,a_2,a_3}$. Размерность этого пространства, равная числу независимых компонент таких функций, будет, как следует из (8.3)

$$N_S = \frac{6(6+1)(6+2)}{3!} = 56$$

Мы приходим к известному представлению (56) группы SU_6.

Вспомним теперь, что имеется 10 ортонормированных функций декуплета, которые мы обозначим $d^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 10)$, и что имеется 4 ортонормированных спиновых функции $\chi^{(\mu)}$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$, соответствующих $J_z = 3/2; 1/2; -1/2, -3/2$. Таким образом, размерность пространства волновых функций декуплета – всех линейных суперпозиций 40 базисных функций вида:

$$d^{(\nu)}_{A_1,A_2,A_3}\,\chi^{(\mu)}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3} \tag{8.25}$$

равна 40 и на долю компоненты ψ_{a_1,a_2,a_3} с $J = 1/2$ остается ортогональное пространство размерности 16. Поскольку здесь имеются два спиновых состояния $J_z = \pm 1/2$, на долю "унитарной части" волновой функции остается пространство 8 измерений, т.е. мы опять получаем октет.

Построим сейчас волновые функции этого октета. Заметим, что функция:

$$\varphi_{a_1,a_2,a_3} = \sum_{(D)} \epsilon_{A_1,A_2,D}\, b^D_{A_3}\, \epsilon_{\sigma_1,\sigma_2}\, \chi_{\sigma_3}$$

не меняется при одновременной перестановке

$$A_1 \rightleftarrows A_2, \qquad \sigma_1 \rightleftarrows \sigma_2 .$$

Она будет поэтому симметрична по отношению к перестановке двух первых комбинированных индексов $a_1 \leftrightarrow a_2$. Ясно, кроме того, что для такой функции $J = 1/2$. Но в силу леммы из §7, которой мы часто пользовались, выражение

$$\varphi_{a_1,a_2,a_3} + \varphi_{a_2,a_3,a_1} + \varphi_{a_3,a_1,a_2}$$

будет тогда симметричной функцией всех трех индексов a_1, a_2, a_3. Для нее также $J = 1/2$. Таким образом, искомые волновые функции имеют вид:

$$\psi^{(8)}_{a_1,a_2,a_3} = \sum_{(D)} \Big\{ \epsilon_{A_1,A_2,D}\, b^D_{A_3}\, \epsilon_{\sigma_1,\sigma_2}\, \chi_{\sigma_3} + \epsilon_{A_2,A_3,D}\, b^D_{A_1}\, \epsilon_{\sigma_2,\sigma_3}\, \chi_{\sigma_1} + \epsilon_{A_3,A_1,D}\, b^D_{A_2}\, \epsilon_{\sigma_3,\sigma_1}\, \chi_{\sigma_2} \Big\} \tag{8.26}$$

Формально сюда можно подставить любую девятикомпонентную матрицу b. Но произвольная матрица b может быть представлена в виде суммы матрицы нулевым шпуром и матрицы, пропорциональной единичной:

$$b_0 \delta_A^B \quad . \tag{8.27}$$

Ясно, что если мы подставим (8.27) в (8.26), то получим как следствие тождества (3.3) тождественный нуль:

$$b_0 \epsilon_{A_1, A_2, A_3} \{ \epsilon_{\sigma_1, \sigma_2} \chi_{\sigma_3} + \epsilon_{\sigma_2, \sigma_3} \chi_{\sigma_1} + \epsilon_{\sigma_3, \sigma_1} \chi_{\sigma_2} \} = 0 .$$

Поэтому мы можем считать, что в выражении (8.26) матрица b подчинена обычному условию октета

$$Sp\, b = \sum_{(D)} b_D^D = 0 .$$

Поскольку мы имеем 8 базисных ортогональных функций b_A^B и две базисных функции $\chi_\sigma = \delta(\sigma - 1)$; $\delta(\sigma - 2)$ – всего из (8.28) мы имеем 16 ортогональных базисных функций, и их линейные суперпозиции исчерпывают все 16-мерное пространство, остающееся на долю октета.

Итак, мы исчерпали все представление (56). Как было показано, оно включает компоненты с $J = 3/2$, соответствующие волновым функциям декуплета и компоненты с $J = 1/2$, соответствующие волновым функциям одного октета.

Выражение (8.26) мы можем рассматривать как волновую функцию октета, находящегося в спиновом состоянии χ (имеется в виду полный спин).

Наложим на χ условие нормировки

$$|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 = 1$$

и потребуем, чтобы нормировка волновой функции $\psi^{(8)}_{a_1, a_2, a_3}$ совпадала с нормировкой октетной функции b:

$$\sum_{(a_1, a_2, a_3)} |\psi^{(8)}_{a_1, a_2, a_3}|^2 = \sum_{(C, D)} |b_C^D|^2 . \tag{8.27}$$

Тогда нам надо будет ввести в (8.26) нормировочный множитель ν и написать:

$$\begin{aligned} \psi^{(8)}_{a_1, a_2, a_3} = \nu \sum_{(D)} \{ & \epsilon_{A_1, A_2, D}\, b_{A_3}^D\, \epsilon_{\sigma_1, \sigma_2} \chi_{\sigma_3} + \\ & + \epsilon_{A_2, A_3, D}\, b_{A_1}^D\, \epsilon_{\sigma_2, \sigma_3} \chi_{\sigma_1} + \\ & + \epsilon_{A_3, A_1, D}\, b_{A_2}^D\, \epsilon_{\sigma_3, \sigma_1} \chi_{\sigma_2} \} . \end{aligned} \tag{8.28}$$

Подставив это выражение для ψ в условие (8.27), найдем:

$$\nu^2 (4 + 4 + 4 + 2 + 2 + 2) = 1 , \quad \text{т. е.} \quad \nu = 1/3\sqrt{2}$$

Рассматриваемая волновая функция октета (8.28) в данном спиновом состоянии χ всецело определяется матрицей b_A^B и не содержит того элемента неопределенности, на который мы обращали внимание ранее, при рассмотрении октетных представлений группы SU_3. Это, очевидно, обусловлено тем, что в представлении (56) группы SU_6 содержится лишь один октет.

Отпечатано в ЛФОП физического факультета МГУ 4/1–66 г. зак. 650 тир. 600 экз.
Л-45047

Цена 10 коп.