

с 15а  
с 149

Сайтов И.С.

+

БЧ-1879

БЧ-1879

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

"Утверждаю"

Директор Лаборатории  
высоких энергий

"24" октября 1964 г.

Б4-1879

И.С.Сантов

"О применении метода третьих разностей".

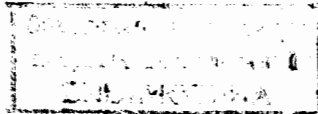
~~SECRET~~

Начальник научно-экспериментального  
отдела

/ И.В.Чувило /

Руководитель группы

/ Р.М.Лебедев /



Дубна

с.р. 822

При изучении рассеяния заряженных частиц на малые углы с помощью пузырьковых камер, помещенных в магнитное поле, может применяться метод третьих разностей. Впервые он был использован в работе [1], в следующем виде. На каждом следе первичной частицы, не имеющем видимого взаимодействия, измеряется, например, координата "х" для нескольких точек, равноотстоящих по "у". При этом ось "у" направлена вдоль следа. Затем вычисляются вторые разности "х"-вых координат измеренных точек. По наличию скачка вторых разностей /т.е. по третьим разностям/ судят о наличии рассеяния с невидимой на снимке частицей отдачи /либо она нейтральна, либо ей передан очень малый импульс/. Цель настоящей работы - выявить возможности данного метода, применявшегося до сих пор в простейшем виде, не являющемся, по нашему мнению, наиболее рациональным.

В дальнейшем предполагается, что изображения следов частиц являются дугами окружностей, отклонения от этих окружностей обусловлены только погрешностями измерения координат точек следа, эти погрешности независимы и имеют Гауссово распределение, координаты всех точек измеряются с одинаковой точностью и отсутствует многократное рассеяние. Отметим также, что рассматриваемый угол излома  $\vartheta$  является проекцией на пленку пространственного угла рассеяния.

Ошибки измерения. Вопрос о дисперсии распределения третьих разностей при фиксированном угле излома и заданном положении точки излома рассмотрим в общем виде.

Измеряются координаты точек следа, разделенных интервалом  $\Delta y$ . Если  $i$  - порядковый номер точки, то ее координаты  $x_i$  и  $y_i = i \cdot \Delta y$ .

Обозначим через  $(\Delta x)_i^1 = x_i - x_{i+1}$  первые разности,

через  $(\Delta^2 x)_i^{1,2} = (\Delta x)_i^1 - (\Delta x)_{i+1}^1$  вторые разности,

через  $(\Delta^3 x)_i^{1,2,3} = (\Delta^2 x)_i^{1,2} - (\Delta^2 x)_{i+1}^{1,2}$  третьи разности, где

$d, \beta$  и  $\gamma$  - целые положительные числа. Подстановкой получаем

$$(\Delta^3 x)_i^{d\beta\gamma} = x_i - x_{i+d} - x_{i+\beta} - x_{i+\gamma} + x_{i+d+\beta} + x_{i+d+\gamma} + x_{i+\beta+\gamma} - x_{i+d+\beta+\gamma}$$

и убеждаемся, что полученное выражение симметрично относительно перестановки мест любой пары индексов  $d, \beta$  и  $\gamma$ . Это означает, что величина  $(\Delta^3 x)_i^{d\beta\gamma}$  может быть получена несколькими эквивалентными способами, отличающимися друг от друга величинами промежуточных первых и вторых разностей. Таким образом, порядок верхних индексов теряет смысл и существенным является лишь их сочетание. Это позволяет перейти к новым обозначениям для верхних индексов -  $a, b$  и  $c$ , где  $a$  - всегда наименьший, а  $c$  - наибольший из них, т.е. всегда  $a \leq b \leq c$ .

Тогда

1/ при  $a \neq b \neq c$  и  $c = a + b$

$$(\Delta^3 x)_i^{abc} = x_i - x_{i+a} - x_{i+b} - x_{i+c} + x_{i+a+b} + x_{i+a+c} + x_{i+b+c} - x_{i+a+b+c}$$

и ошибки в измерении третьих разностей будут иметь Гауссово распределение с дисперсией  $D_{(\Delta^3 x)}^{abc} = 8 D_x$ , где  $D_x$  - среднеквадратичная ошибка измерения координаты точки на пленке.

2/ При  $a = b$  /или  $b = c$ / и  $c \neq a + b$

$$(\Delta^3 x)_i^{aac} = x_i - 2x_{i+a} - x_{i+c} + x_{i+2a} + 2x_{i+a+c} - x_{i+2a+c}$$

$$\text{и } D_{(\Delta^3 x)}^{aac} = 12 D_x.$$

3/ При  $c = a + b$  и  $a \neq b$

$$(\Delta^3 x)_i^{ab(a+b)} = x_i - x_{i+a} - x_{i+b} + x_{i+2a+b} + x_{i+a+2b} - x_{i+2a+2b}$$

$$\text{и } D_{(\Delta^3 x)}^{ab(a+b)} = 6 D_x.$$

4/ При  $2a = 2b = c$

$$(\Delta^3 x)_i^{aa(2a)} = x_i - 2x_{i+a} + 2x_{i+2a} - x_{i+4a}$$

$$\text{и } D_{(\Delta^3 x)}^{aa(2a)} = 10 D_x.$$

5/ При  $a = b = c$

$$(\Delta^3 x)_i^{aaa} = x_i - 3x_{i+a} + 3x_{i+2a} - x_{i+3a} \quad \text{и} \quad D_{(\Delta^3 x)}^{aaa} = 20Dx.$$

Вариант  $a = b = c$  является упоминавшимся выше случаем применения метода третьих разностей в простейшем виде.

Таким образом, с точки зрения абсолютных ошибок измерения третьих разностей наиболее выгодным является вариант

$$(a + b = c, \quad a \neq b).$$

### Зависимость третьих разностей от координаты "у" точки излома.

Если мы имеем излом на малый угол  $\vartheta$  на прямой линии, направление которой до излома совпадает с осью "у", и если точка излома имеет координату  $y$ , то

$$x_0 = \vartheta \frac{(y_0 - y) + |y_0 - y|}{2}$$

$$x_1 = \vartheta \frac{(y_1 - y) + |y_1 - y|}{2}$$

$$x_2 = \vartheta \frac{(y_2 - y) + |y_2 - y|}{2} \quad \text{и т.д.}$$

$$x_i = \vartheta \frac{(y_i - y) + |y_i - y|}{2}.$$

При этом любое  $x_i = 0$ , если  $(y_i - y) < 0$ , т.е. если данная точка расположена до излома. Следует отметить, что здесь и далее везде через  $x$  и  $y$  обозначены точные координаты точек следа, не искаженные ошибками измерения. Это замечание относится также и к  $(\Delta x)$ ,  $(\Delta^2 x)$  и  $(\Delta^3 x)$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
 (\Delta^3 x)_i^{abc} &= x_i - x_{i+a} - x_{i+b} - x_{i+c} + x_{i+a+b} + x_{i+a+c} + x_{i+b+c} - x_{i+a+b+c} = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(y_i - y) + |y_i - y|}{2} - \frac{(y_{i+a} - y) + |y_{i+a} - y|}{2} - \frac{(y_{i+b} - y) + |y_{i+b} - y|}{2} - \right. \\
 &- \frac{(y_{i+c} - y) + |y_{i+c} - y|}{2} + \frac{(y_{i+a+b} - y) + |y_{i+a+b} - y|}{2} + \frac{(y_{i+a+c} - y) + |y_{i+a+c} - y|}{2} + \\
 &\left. + \frac{(y_{i+b+c} - y) + |y_{i+b+c} - y|}{2} - \frac{(y_{i+a+b+c} - y) + |y_{i+a+b+c} - y|}{2} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ |y_i - y| - |y_{i+a} - y| - |y_{i+b} - y| - |y_{i+c} - y| + |y_{i+(a+b)} - y| + \right. \\
 &\left. + |y_{i+(a+c)} - y| + |y_{i+(b+c)} - y| - |y_{i+(a+b+c)} - y| \right].
 \end{aligned}$$

Зависимость  $|\Delta^3 x|_i^{abc}$  / в единицах  $|y \cdot \Delta y|$  / от  $y$  / в единицах  $\Delta y$  / представлена графически на рис 1 и 2 для двух случаев:  $(a+b) < c$  и  $(a+b) > c$ .

Известно, что если  $\frac{L}{R} \ll 1$ , где  $L$  - длина дуги окружности, а  $R$  - ее радиус, то третьи разности исключают постоянную кривизну. Поэтому приведенная выше зависимость  $|\Delta^3 x|_i^{abc}$  от  $y$  справедлива и для следов первичных частиц в магнитном поле, т.к. они обычно удовлетворяют условию  $\frac{L}{R} \ll 1$ .

Из рис. 1 и 2 легко видеть, что каждая третья разность охватывает по  $(a+b+c)$  ячеек величиной  $\Delta y$ . Полное число ячеек на следе  $n = (a+b+c) \cdot d$ , где  $d$  - разность номеров первой и последней третьих разностей, взятых для данного следа. Из рис 1 и 2 вытекает также требование  $a \neq b$  к процедуре вычисления третьих разностей, т.к. это требование обеспечивает наличие зон с постоянным и притом максимальным зна-

цением  $|\Delta^3 x|$ . Выполняя это требование, имеем следующие возможные варианты /напоминая, что всегда  $a < b$ , если  $a \neq b$  и  $b < c$ , если  $b \neq c$  /:

- 1/  $b \neq c$  и  $c \neq a+b$ ,
- 2/  $b \neq c$  и  $c = a+b$ ,
- 3/  $b = c$ .

Очевидно, что для поиска излома следует брать несколько третьих разностей так, чтобы зона 2-5 первой третьей разности перекрывалась зоной 1-2 последующих. Из рисунков также следует, что номер последней такой разности равен  $[(a+c)-b]$ , т.е.

$$d = a - b + c.$$

Таким образом, с точки зрения устранения зависимости величины  $|\Delta^3 x|$  от положения точки излома рациональными являются варианты с  $a \neq b$ .

Сравнение вариантов с учетом обеих факторов. Указанные выше

три варианта с  $a \neq b$  имеют равные максимальные величины  $|\Delta^3 x|/|y \cdot \Delta y|$ , но они требуют разбиения следа на разное число ячеек и поэтому могут иметь разные величины  $|\Delta^3 x|_{\max}$ , т.к.

$$\frac{|\Delta^3 x|_{\max}}{|y \cdot \Delta y|} = a, \quad |\Delta^3 x|_{\max} = L |y| \frac{a}{n}.$$

Как указывалось выше,  $n = (a+b+c) + d = 2(a+c)$  и  $|\Delta^3 x|_{\max} = \frac{L |y|}{2(1 + \frac{c}{a})}$ .

Для минимальных  $\frac{c}{a}$ , т.е. для больших  $a$ ,  $b$  и  $c$  имеем

- 1/  $a \neq b \neq c \neq a+b$ ;  $\frac{c}{a} \rightarrow 1$   
и  $|\Delta^3 x|_{\max} \rightarrow \frac{1}{4} L |y|$  при  $a \rightarrow \infty$  и  $c \rightarrow \infty$ .
- 2/  $a \neq b, c = a+b$ ;  $\frac{c}{a} \rightarrow 2$   
и  $|\Delta^3 x|_{\max} \rightarrow \frac{1}{6} L |y|$  при  $a \rightarrow \infty$  и  $c \rightarrow \infty$ .
- 3/  $a \neq b \neq c$ ;  $\frac{c}{a} \rightarrow 1$   
и  $|\Delta^3 x|_{\max} \rightarrow \frac{1}{4} L |y|$  при  $a \rightarrow \infty$  и  $c \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим минимальное число ячеек для каждого варианта.

- 1/  $a \neq b \neq c \neq a+b$ , следовательно,  $a=1, b=2, c=4$   
и  $|\Delta^3 x|_{\max} = \frac{1}{10} L |y|$ .

2/  $a \neq b, c = a + b$ , следовательно,  $a=1, b=2, c=3$   
и  $|\Delta^3 x|_{\max} = \frac{1}{8} L |\vartheta|$ .

3/  $a \neq b = c$ , следовательно,  $a=1, b=c=2$   
и  $|\Delta^3 x|_{\max} = \frac{1}{6} L |\vartheta|$ .

Вычисляя далее минимальную относительную ошибку, имеем:

1/  $a=1, b=2, c=4$ ;  $D_{|\Delta^3 x|} = 8 D_x$ ,  
$$\delta_{\min} = \frac{\sqrt{D_{|\Delta^3 x|}}}{|\Delta^3 x|_{\max}} = 10 \sqrt{8 D_x} \frac{1}{L |\vartheta|} \approx 28,3 \frac{\sqrt{D_x}}{L |\vartheta|}$$

2/  $a=1, b=2, c=3$ ;  $D_{|\Delta^3 x|} = 6 D_x$ ,  
$$\delta_{\min} = 8 \sqrt{6 D_x} \frac{1}{L |\vartheta|} \approx 19,6 \frac{\sqrt{D_x}}{L |\vartheta|}$$

3/  $a=1, b=c=2$ ;  $D_{|\Delta^3 x|} = 12 D_x$ ,  
$$\delta_{\min} = 6 \sqrt{12 D_x} \frac{1}{L |\vartheta|} \approx 20,8 \frac{\sqrt{D_x}}{L |\vartheta|}$$

Таким образом, наилучшую точность дает вариант ( $a \neq b, c = a + b$ )

Интересно сравнить его с вариантом ( $a = b = c$ ), имеющим  
наименьшее число ячеек  $n = 4$ . Здесь  $|\Delta^3 x|_{\max} = \frac{1}{4} L |\vartheta|$  и

$$\delta_{\min} = 4 \sqrt{20} \frac{\sqrt{D_x}}{L |\vartheta|} \approx 17,9 \frac{\sqrt{D_x}}{L |\vartheta|}$$

Следует, однако, учесть, что для  $a \neq b$   $\delta = \delta_{\min}$   
в то время, как для  $a = b = c$   $\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max} = 3 \delta_{\min}$ .

Кроме того, чтобы обеспечить отсутствие заметной примеси  
следов, не имеющих излома, необходимо иметь  $|\Delta^3 x| \geq 3 \sqrt{D_{|\Delta^3 x|}}$ .

Требование высокой эффективности обнаружения следов с изло-  
мом усиливает это неравенство до  $|\Delta^3 x| \geq 6 \sqrt{D_{(\Delta^3 x)}}$ .

Учитывая  $|\Delta^3 x|_{\max} \geq |\Delta^3 x|$  и  $|\Delta^3 x|_{\max} = L |\vartheta| \cdot \frac{a}{n}$ ,  
получаем  $L |\vartheta| \frac{a}{n} \geq 6 \sqrt{D_{|\Delta^3 x|}}$  и  $\vartheta \geq \frac{n}{a} \cdot 6 \sqrt{D_{|\Delta^3 x|}} \cdot L$ .

1/  $a=1, b=2, c=4$ ;  $\vartheta \geq 10 \cdot 6 \sqrt{8} \sqrt{D_x} \frac{1}{L} \approx 170 \sqrt{D_x} \cdot \frac{1}{L}$

2/  $a=1, b=2, c=3$ ;  $\vartheta \geq 8 \cdot 6 \sqrt{6} \sqrt{D_x} \frac{1}{L} \approx 118 \sqrt{D_x} \cdot \frac{1}{L}$

3/  $a=1, b=c=2$ ;  $\vartheta \geq 6 \cdot 6 \sqrt{12} \sqrt{D_x} \cdot \frac{1}{L} \approx 125 \sqrt{D_x} \cdot \frac{1}{L}$



$$4/a = b = c = 1 \quad \text{для } |\Delta^3 x|_{\max} = |\Delta^3 x| \quad \vartheta \geq 4.6\sqrt{20}\sqrt{D_x} \approx 108\sqrt{D_x} \cdot \frac{1}{L};$$

$$\text{для } |\Delta^3 x|_{\min} = |\Delta^3 x| \quad \vartheta \geq 324\sqrt{D_x} \cdot \frac{1}{L}.$$

Если учесть, что для этого варианта все значения  $|\Delta^3 x|$  между  $|\Delta^3 x|_{\min}$  и  $|\Delta^3 x|_{\max}$  почти равновероятны, то становится очевидным, что он не может конкурировать с вариантами  $(a \neq b, c = a + b)$  и  $(a \neq b = c)$ .

Интересно отметить, что во всех вариантах с  $a = b$  имеется периодическое изменение эффективности обнаружения излома на следе с периодом, равным длине ячейки  $\Delta y$ . Такое периодическое снижение эффективности вдоль камеры не проявляется, при не очень большой статистике, в экспериментальном распределении найденных событий по объему камеры и может выпасть из поля зрения экспериментаторов. Двукратные измерения со смещением ячеек уменьшают колебания эффективности примерно вдвое, но при увеличении объема измерений варианты  $(a \neq b, c = a + b)$  и  $(a \neq b = c)$  становятся более выгодными и с точки зрения трудоемкости.

### Выводы:

1. Величина третьей разности и ошибка ее измерения не зависят от порядка, в котором следуют числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  при составлении первой, второй и третьей разностей, а зависят лишь от их сочетания.
2. Наиболее выгодными с точки зрения эффективности обнаружения изломов на малый угол являются варианты  $(a=1, b=2, c=3)$  и  $(a=1, b=c=2)$ , требующие измерения координат 9-ти и 7-ми точек на следе соответственно.
3. Увеличение числа измеренных точек может привести к увеличению чувствительности метода, но не более, чем на 17% для варианта  $(a \neq b, c = a + b)$  и на 25% для варианта  $(a \neq b = c)$ .

Самой

Библиография:

1 - ДУФ, т. 38,426 /1960/.

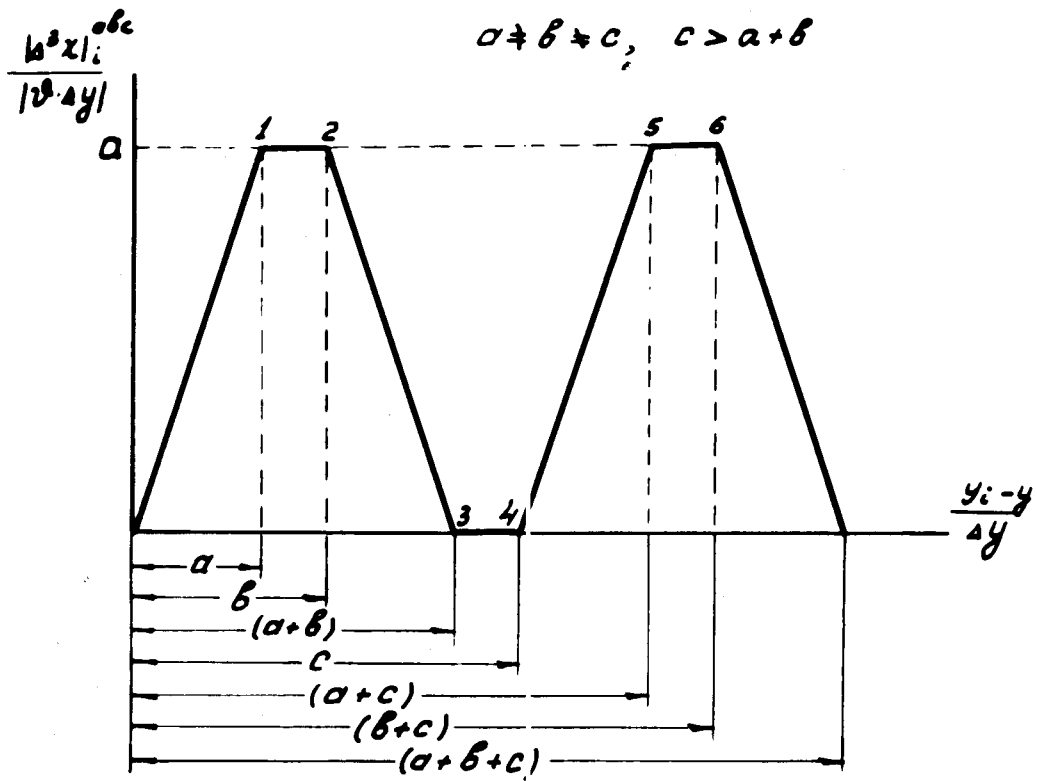


Рис. 1.

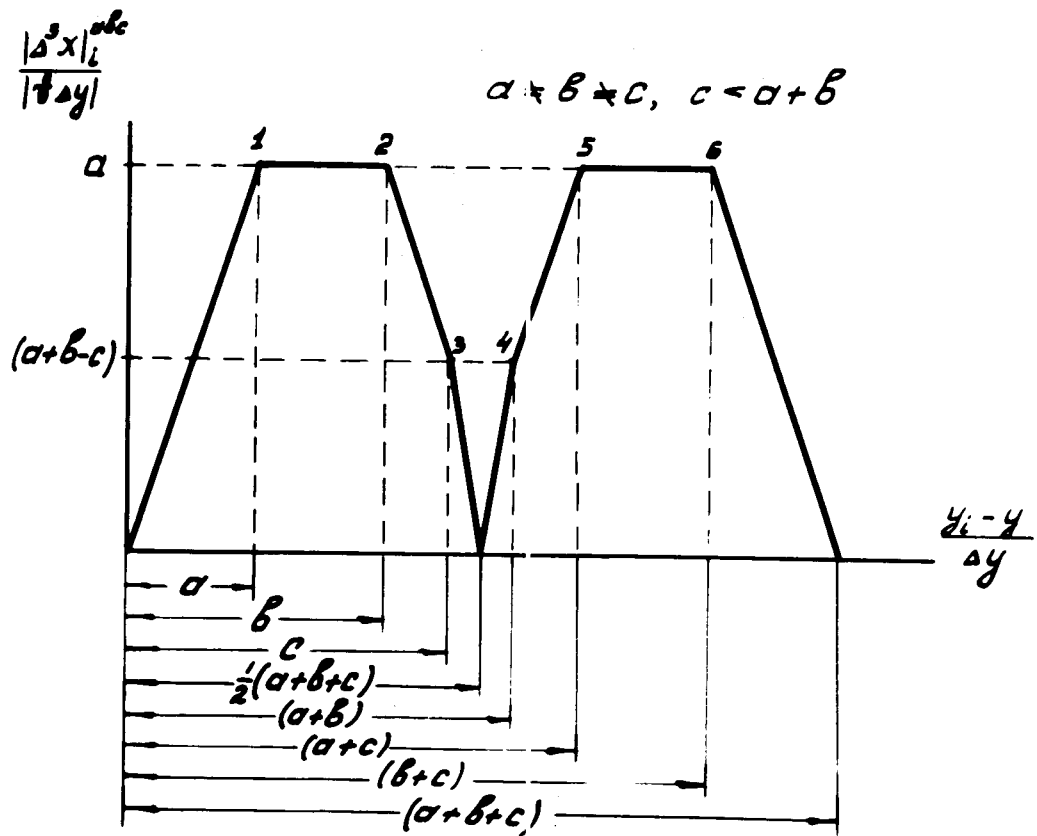


Рис. 2