

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
Общеминиструкское научно-методическое отделение  
Алексахин Ю.И., Молодоженцев А.Ю.

63-9-89-835

Формирование и транспортировка релятивистского  
потока в пушках с полупрозрачной анодной сеткой.

19. 12. 89

г.Дубна, 1989 год.



Решается задача синтеза источников брызгозоновых потоков с компенсированными aberrациями. Одна из возможных путей решения задачи рассмотрена в работе /1/, в которой сформулирован негеометризованный способ описания безвихревых релятивистских потоков и на его основе развита параксиальная теория высшего порядка.

Описанный в работах /1,2/ подход к синтезу источников плоских осесимметричных релятивистских пучков с незамкнутенным катодом дает возможность решить задачу формирования безвихревого релятивистского потока.

Как указывалось в работе /2/ одна из особенностей используемого метода состоит в привлечении ортогональной системы координат

$q_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , не связанный, в принципе, с трубками тока, но в которой обязательно поверхность катода является одной из координатных поверхностей (выберем ее в качестве поверхности  $q_1 = 0$ ).

Через  $q_2$  обозначим попеченную координату, отчитывающуюся от оси системы ( $q_2 = 0$ ), а через  $q_3$  — азимут, так что соответствующая функция Ламе есть радиус:  $h_3 = r(q_1, q_2)$ . Функции Ламе  $h_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , должны удовлетворять всего двум соотношениям /1/, вытекающим из требований евклидовости пространства и ортогональности координатной сетки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \right) &= 0, \\ \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} \right)^2 &= 1. \end{aligned} \quad (I)$$

Координатные линии  $q_1 = \text{const}$  (в том числе сечение катода) на плоскости цилиндрических координат ( $r, \varphi$ ) определяются уравнение-

НИЯМИ

$$Z = q_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(q_1) r_1^{2n}, \quad (2)$$

коэффициенты в котором, с учётом равенств  $r = h_3$  и (1), выражаются через осевые значения функций Ламе и их производных:

$$a_n(q_1) = -\frac{1}{(2n)!} \left[ \left( \frac{1}{\frac{\partial h_3}{\partial q_2}} \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \right)^{2n-1} \cdot \frac{\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial h_3}{\partial q_1}}{\sqrt{1 - \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \right)^2}} \right]_{q_2=0}. \quad (3)$$

Следуя параксиальному методу, представим функции Ламе в виде рядов по степеням поперечной координаты  $q_2$ :

$$\begin{aligned} h_i &= \sum_{n=0}^{\infty} h_{in}(q_1) q_2^{2n}, \quad i = 1, 2 \\ h_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} h_{3n}(q_1) q_2^{2n+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Равенства (1) приводят к соотношениям /1/:

$$\begin{aligned} h_{20} &= h_{30} = \lambda, \quad h_{11} = -\frac{1}{2} \lambda \lambda', \\ h_{21} &= 3h_{31} + \frac{1}{2} \lambda \lambda'^2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по  $q_1$ .

Ограничаясь параксиальной теорией второго порядка, в рядах (4) следует удерживать по два члена; соотношения (5) уменьшают число независимых коэффициентов до двух ( $\lambda$  и  $h_{31}$ ). Линии  $q_1 = \text{const}$  в этом случае есть параболы четвёртого порядка с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_1 &= -\lambda'/2\lambda, \\ a_2 &= -\frac{1}{4\lambda^3} \left[ \lambda \left( \frac{h_{31}}{\lambda} \right)' + \frac{1}{4} \lambda' (\lambda^2)'' \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Форму катода будем задавать с помощью двух параметров – радиуса кривизны на оси  $R_c$  и фактора  $g$ , характеризующего отклонение поверхности катода от параболоида вращения ( $g = 0$ ) и равного единице для сферы, так что

$$a_1^{(0)} = \frac{1}{2R_c}, \quad a_2^{(0)} = g a_1^{(0)3}, \quad (7)$$

где верхний индекс "0" указывает значение величин на катоде ( $q_1 = 0$ ), а нижний – на оси системы ( $q_2 = 0$ ). При заданной форме катода функции  $\lambda(q_1)$ ,  $h_{31}(q_1)$  должны обеспечивать выполнение равенств  $a_{1,2} q_1 \rightarrow 0 = a_{1,2}^{(0)}$ , а в остальном их выбор произволен. В частности, можно потребовать  $\lambda' q_1 \rightarrow \infty = h_{31} q_1 \rightarrow \infty = 0$ . Переход от криволинейной системы координат к цилиндрической в рассматриваемом приближении осуществляется по формулам:

$$\begin{aligned} r(q_1, q_2) &= h_3(q_1, q_2) = q_2 (\lambda + h_{31} q_2^2), \\ z(q_1, q_2) &= q_1 + a_1 \lambda^2 q_2^2 + \\ &+ \lambda (\lambda^3 a_2 + 2 h_{31} a_1) q_2^4. \end{aligned} \quad (8)$$

### I.2. Нормализованные переменные.

В данной работе рассматривается не только задача формирования бензиревых релятивистских потоков в катод – анодном зазоре, но и задача транспортировки пучка в трубе дрейфа, торцевая сетка которой является анодом. Сетка имеет конечную толщину, прозрачность ее будем характеризовать коэффициентом  $P_a \leq 1$ .

Основными характеристиками, используемыми для описания бензиревых потоков, являются  $/I/$ : безразмерный импульс  $\vec{\eta} = \vec{p}/mc$ ,  $m$  – масса покоя частиц,  $c$  – скорость света; релятивистский фактор массы  $\gamma = \sqrt{1 + \vec{\eta}^2}$ ; локальное значение плазменной частоты  $\omega c = \sqrt{4\pi e p/m\gamma}$ . где  $p$  – плотность заряда, а также функция тока

$$\psi(q_1, q_2) = \frac{1}{2} \int_{q_1}^{q_2} \gamma_1 \infty^2 h_2 h_3 dq_2, \quad (9)$$

равная относенному к  $I_0 = mc^3/e$  ( $I_0 = 17 \text{ kA}$  для электронов) полному току через поверхность, ограниченную контуром  $q_1 = \text{const}$ .  
 $q_2 = \text{const}$ .

Единицей измерения длины выберем величину

$$X_0 = \left( 8\pi j_{30}/I_0 \right)^{-1/2}, \quad (10)$$

связанную с значением плотности тока эмисии в центре катода  $j_{30}$ , исключая тем самым это значение из числа задаваемых параметров. Под  $q_1$ ,  $h_{2,3}$  будем далее подразумевать отношения соответствующих размерных величин к  $X_0$ . Не ограничивая общности, положим  $\lambda^{(0)} = 1$ . Требуя аналитичность характеристик потока вблизи оси получаем, что параксиальное разложение поперечных компонент импульса содержит только нечетные степени  $q_2$

$$\eta_i = \sum_n \eta_{in} q_2^{2n+1}, \quad i=2,3$$

а величины  $\gamma_1$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $\infty$  — только четные:

$$\eta_1 = \sum_n \eta_{1n} q_2^{2n}, \quad \gamma = \sum_n \gamma_{in} q_2^{2n}, \quad \psi = \sum_n \psi_{in} q_2^{2n+2}.$$

Вводя функции  $\Theta(q_1)$ ,  $\tau(q_1)$ , первая из которых пропорциональна приведенному радиусу лучка  $/3/$ , а вторая характеризует отклонение от параксиальности, т.е. aberrации системы, разложим  $\infty$  представим в виде

$$\infty = \frac{1}{\sqrt{2} X_0 \Theta} \left( 1 + \tau q_2^2 \right) \sqrt{P_a} . \quad (II)$$

Безразмерную индукцию магнитного поля определим как

$$f \equiv - \frac{e B_1 X_0}{mc^2} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 \eta_3) . \quad (12)$$

I.3. Уравнения потока в катод - анодном зазоре.

Из определений  $\gamma$  и  $\psi$  следуют соотношения из первых коэффициентов:

$$\gamma_0^2 = 1 + \gamma_{10}^2, \quad \psi_0 = \frac{\gamma_{10} \lambda^2}{8\Theta^2} Pa. \quad (I3)$$

Подстановка параксиальных разложений в уравнения безвихревого ламинарного потока приводит к уравнению огибающей (при выполнении требования  $I_b \ll I_A$ ,  $I_A$  — ток Альбена,  $I_A = \gamma \beta m c^3 / e$ )

$$\frac{\gamma_{10}^{1/2} (3 + \gamma_{10}^2)}{(1 + \gamma_{10}^2)} = \frac{1}{\Theta^2} - \ell_0^2 - 4\gamma_{10}^2 \frac{\Theta''}{\Theta}. \quad (I4)$$

которое связывает осевые значения импульса, магнитного поля и приведенный радиус нучка, а также к выражениям для коэффициентов высших порядков  $/I/$  с учетом прозрачности анодной сетки  $Pa$ :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\lambda^2 \gamma_0 Pa}{2\Theta^2} - (\lambda^2 \gamma_0')' \right], \\ \gamma_2 &= \frac{1}{16} \left[ \frac{\lambda^2 \gamma_1 Pa}{2\Theta^2} - (\lambda^2 \gamma_1')' \right] + \frac{1}{4} \gamma_1 \left( \frac{3h_{21} - h_{31}}{\lambda} - \right. \\ &\quad \left. - 3h_{11} \right) + \frac{\lambda^2 \gamma_0 Pa}{16\Theta^2} (1 + h_{11}) - \frac{\lambda^2 \gamma_0'}{16} \left( \frac{h_{21} + h_{31}}{\lambda} - h_{11} \right)', \\ \gamma_{11} &= -\gamma_{10} h_{11} + \psi_0 - 2 \frac{(\Theta^2 \psi_0')'}{Pa}, \end{aligned} \quad (I5)$$

$$\frac{2\psi_1}{\psi_0} = 2z + \frac{h_{21} + h_{31}}{\lambda} + \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{10}},$$

$$\begin{aligned} \gamma_{31} &= \frac{1}{8} \left[ \frac{\gamma_{30} \lambda^2 Pa}{2\Theta^2} - \lambda (\lambda \gamma_{30}'') \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma_{30} \left( h_{11} + \frac{h_{31} - h_{21}}{\lambda} \right), \end{aligned}$$

и к дифференциальному уравнению для aberrационной функции:

$$\begin{aligned}
 & \eta_{10}^2 \psi_0 \dot{x}_0^2 \left[ \frac{1}{\dot{x}_0^2} \left( \frac{\lambda}{\psi_0} \right)' \right]' + (\dot{x}_0^2 + f^2) \lambda = -\frac{1}{2} \left( \frac{\mu_1}{\mu_0} + \frac{\eta_{11}}{\eta_{10}} \right) f^2 + \\
 & + \frac{1}{4} \lambda' (\lambda' - 2\chi) f^2 + \frac{1}{8} \lambda^2 \dot{x}_0^2 (\beta - f)^2 (1 - \mu_0^2 \dot{x}_0^2) + \\
 & + \frac{1}{8} [\lambda^2 \beta' (\beta' - f') - \beta (\lambda^2 \beta')'] - g_0' (g_1' - g_0' h_{11}) - \frac{2 g_1^2}{\lambda^2} + \\
 & + \eta_{10} (\eta_{11} - \eta_{10} h_{11}) [2 \dot{x}_0 \left( \frac{1}{\dot{x}_0} \right)'' + \delta \chi] + \eta_{10}^2 \delta (h_{11}' - \chi h_{11})^{(16)} + \\
 & + \frac{2}{\lambda^2} \left( \eta_{11} + \frac{1}{4} \lambda \lambda' \eta_{10} \chi \right)^2 + \frac{3}{2} \eta_{10}' (\eta_{11}' - \eta_{10}' h_{11} - \eta_{10} h_{11} \chi) + \\
 & + \frac{2}{\lambda^2} \left( \eta_{11} + \frac{1}{4} \lambda \lambda' \eta_{10} \chi - \psi_0 - \frac{1}{4} \mu_0 \dot{x}_0^2 \lambda^2 (\beta - f) \right)^2,
 \end{aligned}$$

$$\mu_1 = \text{const} \cdot \psi_0 ,$$

где  $f = \mu_0 \dot{x}_0^2 \eta_{10} = \beta - 2 \eta_{30} / \lambda$ ,  $\lambda = h_{20}$ ,  $\beta = e B_{10} / mc^2$ ,

$B_{10}$  - продольная компонента магнитного поля,  $\dot{x}_0^2 \approx 4I / (I_0 \eta_{10} R^2)$ .

$I$  - ток пучка,  $R$  - радиус пучка,  $\chi = \psi_0' / \psi_0$ ,  $\delta = \dot{x}_0' / \dot{x}_0$ .

В рассматриваемом втором порядке параксиальной теории соотношения (12) - (16) дают полное описание потока.

I.4. Алгоритм решения внутренней задачи в катод - анодном зазоре.

В качестве условий на катоде рассмотрим режим ограничения тока эмиссии пространственным зарядом, при котором  $\vec{\eta}^{(0)} = 0$ ,  $\vec{\gamma}^{(0)} = 1$ ,  $\vec{\gamma}'^{(0)} = 0$ .

Совместно с требованием конечности  $\psi$  эти условия приводят к равенству  $\psi'^{(0)} = 0$ , что означает отсутствие тангенциальной составляющей плотности тока на катоде  $|I|$ .

Данная совокупность условий позволяет установить функциональный вид характеристик потока вблизи катода. Соответствующие асимптотические выражения можно использовать, чтобы описать поведение потока

в катод - анодном зазоре.

Известно <sup>1/7/</sup>, что характеристики потока являются аналитическими функциями агрегата

$$U = \left( \frac{3}{2} \gamma_1 \right)^{1/3}. \quad (17)$$

Учитывая требования  $\gamma_0^{(0)} = 1$ ,  $\gamma_1^{(0)} = 0$ , будем искать функции  $\gamma_{10}(q_1)$ ,  $\Theta(q_1)$  в виде рядов

$$\gamma_{10} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n U^{n+2}, \quad \Theta = \sum_{n=0}^{\infty} t_n U^{n+1}. \quad (18)$$

Как указывается в работе <sup>1/2/</sup> подстановка разложений (18) в уравнение (14) и приравнивание членов с одинаковыми степенями  $U$  дает по одной связи для каждой пары коэффициентов  $e_n$ ,  $t_n$ . Из условия  $\gamma_K^{(0)} = \gamma_1^{(0)} = 0$  следует вторая связь для коэффициентов с  $6K-4 \leq n < 6K$ . Поскольку в выражение для  $\gamma_K$  входит коэффициент разложения плазменной частоты  $\omega_{K-1}$ , в рассматриваемом порядке теории могут быть определены коэффициенты с  $n < 12$ . Для  $n = 6K-6$ ,  $6K-5$  получаем таким образом пары уравнений линейно - зависимы. Из требования  $\psi_{K-1}^{(0)} = 0$  определяется второе независимое соотношение для  $n = 6K-5$ . Неопределенны остаются только коэффициенты  $t_{6K}$ ,  $K = 1, 2, \dots$ .

На ЭВМ БС-1061 с помощью системы программирования REDUCE (версия 3.2), которая относится к универсальной системе для аналитических вычислений (САВ) <sup>1/8/</sup>, все характеристики потока представлены в виде рядов (18). Свободными в них являются коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$ , которые связаны с формой катода (7), и  $t_6$ ,  $t_{12}$ . В приложении I приведены соответствующие выражения. Выбор радиуса кривизны катода  $R_c$  однозначно определяет величину коэффициента  $a_1$ . Значения коэффициентов  $a_2$ ,  $t_6$ ,  $t_{12}$  должны удовлетворять на аноде требованиям

$$\gamma_1(x_a) = \gamma_2(x_a) = 0, \quad ,$$

$$(\psi'_0/\psi_0)_{x_a} / = A = \text{const}.$$

## 2. Транспортировка пучка в трубе дрейфа.

В данной работе рассматривается важный для практики случай формирования бриллюзновского потока в продольном магнитном поле, монотонно стремящемся при  $\varphi_1 \rightarrow \infty$  к конечному значению  $b_f$ . Для согласования транспортируемого пучка с внешним магнитным полем  $b_f$  необходимо, чтобы пучок в трубе дрейфа имел строго определенный бриллюзновский радиус, при котором пульсации границы пучка отсутствуют. Как известно из анализа пучка Бриллюзона <sup>19/</sup> ток пучка I, радиус  $a$  и потенциал  $\Phi_0$  на оси пучка связаны индукцией внешнего магнитного поля  $B$  соотношением:

$$I = 1,46 \times 10^6 (Ba)^2 \Phi_0^{1/2},$$

или в безразмерных величинах :

$$\Gamma_{\text{согр.}} / \chi_0 = \frac{1}{b_f} \sqrt{\frac{8I}{I_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma_{0f} P_a}}, \quad (19)$$

где  $\chi_0$  - единица измерения длины (10),  $I$  - ток пучка в трубе дрейфа,  $P_a$  - прозрачность анодной сетки,  $\gamma_{0f}$  - величина безразмерного импульса на оси пучка,  $I_0 = m_e c^3/e = 17 \text{ kA}$  для электронов. Как известно, для учета собственного заряда пучка, находящегося в цилиндрической камере длины  $L$  и радиуса  $R$ , необходимо найти точное решение уравнения Пуассона через соответствующую функцию Грина. Для аксиально - симметричного распределения заряда в камере, стеки которой находятся под кулевым потенциалом, имеем <sup>14/</sup>

$$\varphi(r, x) = \int_0^R dr' r' \int_0^L dx' G(r', x'; r, x) \rho(r', x'), \quad (20)$$

где  $x$  отсчитывается от края трубы дрейфа,  $\rho$  - плотность заряда, деленная на  $\infty$  и <sup>15/</sup>:

$$G(r', x'; r, x) = \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r'/R) J_0(\lambda_n r'/R)}{J_n J_1^2(\lambda_n)},$$

$$\frac{\operatorname{sh} \left[ \lambda_n [L - \max(x, x')] / R \right] \operatorname{sh} \left[ \lambda_n \min(x, x') / R \right]}{\operatorname{sh} (\lambda_n L / R)} \quad (21)$$

здесь  $J_0$ ,  $J_1$  - функции Бесселя первого рода и  $\lambda_n (n=1,2\dots)$  - нули  $J_0$  ( $J_0(\lambda_n) = 0$ ). Если камера достаточно длинная  $\lambda_1 L/R \gg 1$ , т.е.  $L/R \gg 1/2,4$ , то множитель с гиперболическими синусами в (17) упрощается до вида

$$(\exp[-\lambda_n|x+x'|/R] - \exp[-\lambda_n|x-x'|/R]) / 2. \quad (22)$$

В решаемой здесь задаче удовлетворяется требование  $L/R \gg 1/2,4$ , поэтому интегрируя уравнение (17) с учетом конкретного вида функции Грина для безразмерной энергии осевого электрона получаем зависимость от продольной координаты  $X$  вида

$$\gamma_e(x) = \gamma_{e_f} + \frac{8I_b}{I_0} \frac{R}{r(x)} \frac{1}{\beta(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3} \frac{J_1(\lambda_n \frac{r(x)}{R})}{J_1^2(\lambda_n)}, \quad (23)$$

$$\times \exp(-\lambda_n x/R),$$

$$\gamma_{e_f} = \gamma_e(x=0) - \frac{I_b}{I_0} \frac{1}{\beta_f} \left[ 1 + 2 \ln \left( \frac{R}{r_f} \right) \right], \quad (24)$$

здесь  $I_b$  - ток пучка в трубе дрейфа;  $R$  - радиус трубы дрейфа;  $r(x)$  - радиус пучка;  $\beta(x) = v/c = \sqrt{\gamma_e^2 - 1}$ ;  $\gamma_e = \gamma_e/\gamma_0$  - безразмерная скорость;  $\gamma_{e_f}$ ,  $\beta_f$ ,  $r_f$  - величины на расстоянии  $x_f \gg R/\lambda_1$  от анода.

Очевидно, что в связи с "провисанием потенциала" внутри заряженного потока частиц существует предел для тока, транспортируемого по трубе радиуса  $R$ :  

$$I_{lim} \approx I_0 \frac{(\gamma_{e_f}^{2/3} - 1)^{3/2}}{2 \ln(R/r_b)}, \quad (25)$$

здесь  $r_b$  - радиус пучка,  $\gamma_{e_f}$  - безразмерная энергия заряженных частиц до влета в трубу дрейфа.

Так, при  $\gamma_{e_f} = 1.4$ ,  $R/r_b = 2$  предельный ток  $I_{lim} \approx 0.091 I_0 \approx 1.55 \text{ KA}$ . Если стремиться получить хорошую компрессию пучка в трубе дрейфа, то нужно помнить об уменьшении величины

пределного тока пучка по мере сжатия его в трубе с постоянным радиусом. Особенno это важно для низкоэнергетичных пучков.

Таким образом, условия согласования пучка с внешним магнитным полем (19) и "запирания" пучка собственным зарядом (25) фактически полностью определяют параметры пучка, внешнего магнитного поля и радиус трубы дрейфа .

Для согласования пучка с ведущим магнитным полем, создаваемым соленоидом, может быть использована магнитная линза конечной длины, расположенная на некотором расстоянии от торца трубы дрейфа с анодной сеткой . Поток частиц в катод – анодном зазоре считается безразмерным, поэтому это расстояние должно быть достаточно большим. Магнитное поле такой линзы на оси получается интегрированием магнитного поля витка с током по длине линзы, тогда

$$B_o(x) = B_o^{\max} \left[ \frac{\sqrt{(2R)^2 + b^2}}{2b} \left[ \frac{(b-2x)}{\sqrt{(2R)^2 + (b-2x)^2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(b+2x)}{\sqrt{(2R)^2 + (b+2x)^2}} \right] \right], \quad (26)$$

где  $x$  отсчитывается от середины магнитной линзы ;  $b$  – ее длина,  $R$  – внутренний радиус магнитной линзы , равный радиусу трубы дрейфа ;  $B_o^{\max} = B_o(x=0)$  – максимальное значение магнитного поля линзы

$$B_o^{\max} = - \frac{e V_{\max} x_0}{m_o c^2},$$

$$V_{\max} = 4\pi \frac{IN}{c \sqrt{(2R)^2 + b^2}}, \quad (27)$$

где  $I$  — ток в обмотке,  $N$  — число витков,  $c$  — скорость света.

С помощью короткой магнитной линзы и соленоида можно осуществить и компрессию транспортируемого в трубе дрейфа пучка, если ток и радиус пучка при этом не превышают некоторого предельного значения (25).

Для описания магнитного поля соленоида используется некоторое модельное представление.

### 3. Анализ аберраций пучка.

Введем некоторую функцию  $Q = \tau / \psi_0$ . Полученное уравнение (16) относится к классу дифференциальных уравнений второго порядка с неоднозначными коэффициентами типа:  $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ . Рассматриваемое дифференциальное уравнение можно решить методом Гулиса — Кутта, но тогда возможно экспоненциальное накопление ошибок счета. В работе использован другой способ решения уравнения, основанный на его гамильтоновой форме, т.е. сводится к системе дифференциальных уравнений типа:

$$P = mQ' , \quad P' = f(Q) .$$

Используя описаный алгоритм можно проанализировать аберрации ( $Q$ ) как в катод — анодной области, где необходим учет геометрии, так и в области трубы дрейфа, где  $\lambda = 1$ ,  $h_{11} = 0$ . При переходе через анодную сетку необходимо выполнить условия смыкания решений, которые получены из требований эквипотенциальности сетки, непрерывности компонента импульса  $\vec{y}$ , непрерывности тока с учетом конечной прозрачности сетки и из соответствующих параксиальных разложений. Знаком “—” обозначим величины до сетки, значком “+” величины после сетки. Условия непрерывности следующие:

$$\begin{aligned} \eta_{10}^- &= \eta_{10}^+ ; \quad (\tau / \lambda_a^2)^- = \tau^+ ; \quad (\gamma_{11} / \lambda_a^2)^- = \gamma_{11}^+ ; \\ (\psi_0'/\psi_0)^- &= (\psi_0'/\psi_0)^+ ; \quad \Theta^- = \Theta^+ ; \\ (\psi_0 / \lambda_a^2)^- &= \psi_0^+ ; \quad (\psi_1 / \lambda_a^2 \psi_0)^- \approx (\psi_1 / \psi_0)^+ , \end{aligned} \quad (28)$$

если считать, что в трубе дрейфа всяду цилиндрическая система координат, а также

$$Q^- = P_a Q^+, \quad (Q')^+ = (Q')^- + \left( \frac{\gamma_n^-}{2 \psi_0^- \eta_{10}^-} \right)' - \left( \frac{\gamma_n^+}{2 \psi_0^+ \eta_{10}^+} \right)', \quad (29)$$

необходимые для решения aberrационного уравнения.

#### 4. Алгоритм программы "FOIL".

##### 4.1. Особенности построения программы.

Программа "FOIL" состоит из двух программ "CAT" и "TUBE", связанных через процедуру OVERLAY, что позволяет существенно сократить требуемую программой память, т.к. сначала загружается программа "CAT", затем вместо "CAT" подсоединяется "TUBE". Программы "CAT" и "TUBE" связаны только шестью значениями общих параметров. Программы работают в интерактивном режиме, что позволяет активно влиять на их работу во время счета, придает программе гибкость. На рис. I показано дерево построения программы "FOIL".

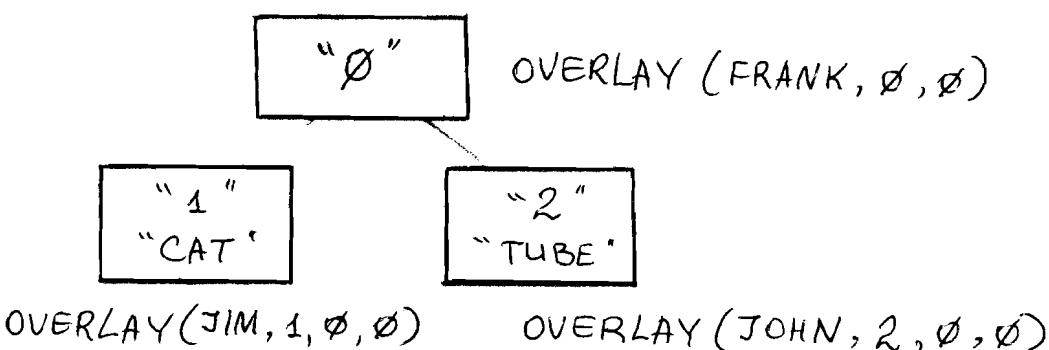


Рис. I.

##### 4.2. Программа "CAT".

На рис. 2 изображена блок - схема программы "CAT".

Основные идентификаторы:

$AL(I)$ ,  $I = 1, 4$  - массив, содержащий коэффициенты разложения  $\lambda(x)$  (5) в ряд Тейлора, т.е.  $\lambda(x) \approx 1 + \sum_{n=1}^4 AL_n x^n / n!$ ;

- 13 -

$COT(I)$ ,  $I = I, IO$  - массив, содержащий значения коэффициентов  $t_{i+2}$  ( $i = I, IO$ ), причем  $t_1 = t_2 = 0$ ;

$GMF$  - энергия осевых электронов на сетке;

$BK$  - величина магнитного поля на катоде;

$BK = 0$  в данной программе;

$PQ$  - прозрачность сетки;

$X/N$  - величина анод - катодного зазора;

$A1 \equiv a_1$ ,  $A2 \equiv a_2$  - коэффициенты, определяющие геометрию катода (7);

$PLX \equiv (\psi'_0 / \psi_0) /_{x_a}$  - является задаваемой величиной;

$THA \equiv \theta_a$  - значение огибающей пучка на анодной сетке;

$ET(I)$ ,  $I = I, I2$  - коэффициенты разложения  $\eta_{10}$ , определяемые по формулам (24) и (II.1);

$TET(I)$ ,  $I = I, I2$  - коэффициенты разложения  $\theta$ , определяемые по формулам (24) и (II.2);  $EE(I) = \eta_{10}(x)$  в катод - анодном зазоре;  $Gx\phi(I) \equiv \gamma'_0(x)$ ,  $Gx1(I) = \gamma'_0(x)$ ,  $Gx2(I) \equiv \gamma''_0(x)$ ;

$PS(I)$ ,  $I = I, 9$  - коэффициенты разложения  $\psi$ , определенные по формулам (II.3);  $RADCAT$  - радиус катода, является задаваемой величиной;

$CURCAT$  - ток, снимаемый с катода;

$VX\phi$  - единица измерения длины.

Описание действия программы "CAT":

1. задаются некоторые значения расстояния между анодом и катодом и радиус кривизны катода, т.е. определяются величины  $X/N$  и  $A1$ ;  $A2$ ,  $COT(4)$ ,  $COT(10)$  считаются для начала нулевыми;
2. задается некоторое значение  $\psi'_0 / \psi_0$  на анодной сетке (значение  $PLX$ );
3. как указывалось в разделе 2, для определения неизвестных  $A2$ ,  $COT(4)$ ,  $COT(10)$  необходимо решить систему алгебраических уравнений:

$$\gamma_1(x/N) = 0, \quad \gamma_2(x/N) = 0, \quad (\psi'_0 / \psi_0) /_{x/N} = PLX,$$

где  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_0'/\psi_0$  представлены в виде соответствующих рядов по степеням  $u = (\frac{3}{2}x/N)^{1/3}$ ; данная процедура входит в подпрограмму "MOUSE";

4. вблизи катода задача некорректна из-за бесконечной плотности заряда на его поверхности, поэтому в программе определяется величина отхода от поверхности катода ( $NIN$ ); определяется количество отрезков разбиваемый катод - анодного промежутка ( $NCA$ );

5. с учетом найденных значений коэффициентов  $a_2$ ,  $t_6$ ,  $t_{12}$  вычисляются коэффициенты разложения  $\gamma_{10}$  в ряд по степеням  $u$  (П.1) по заданным значениям  $a_1$  и  $x_{in}$  (расстояние между катодом и анодом) определяется геометрия катод - анодного пространства, причем при  $x = x_{in}$  ортогональная криволинейная координатная сетка катод - анодного зазора переходит в цилиндрическую;

6. по найденному значению  $\gamma_{10}(x_{in})$  вычисляется значение безразмерной энергии электрона на аноде  $\gamma_{ea}$ , причем должно выполняться условие  $\gamma_{ea} = \gamma_0$ , где  $\gamma_0$  заданная энергия электронов на аноде; если условие не выполняется, то изменяется расстояние между катодом и анодом  $x_{in}$  и повторяются П.1 ... П.6;

7. определяются коэффициенты разложения в ряд по степеням  $u$  огибающей пучка  $\Theta(u)$  и значения  $\Theta$ ,  $\Theta'$ ,  $\Theta''$  в точках катод - анодного промежутка;

8. проверяется выполнение условия  $\gamma_1(x_{in}) = 0$ , где все величины (15) представлены в виде соответствующих рядов;

9. как указывалось в работе /1/ характеристики потока являются аналитическими функциями агрегата  $u = (\frac{3}{2}q_1)^{1/3}$  только вблизи катода, поэтому необходимо проверить правильность вычисленных характеристик потока; для этого решается дифференциальное уравнение на огибающую, считая, что магнитное поле отсутствует, огибающая  $\Theta(x)$  пучка

представлена в виде ряда :

I0. определив характер  $\gamma_0(x)$  через решение уравнения огибающей, где  $\Theta(x)$  - в виде ряда, вычисляется значение  $\gamma_1(x_{in})$  (15); если  $\gamma_1(x_{in}) \neq 0$ , необходимо корректировать значения коэффициентов  $a_1, a_2, t_6, t_{12}$ ; наиболее сильным для  $\gamma_1$  коэффициентом является  $t_6$ ;

II. изменение  $t_6$  необходимо переопределить  $t_9$  и  $t_{10}$ , содержащие  $t_6$ , а также величину катод - анодного зазора  $x_{in}$  для удовлетворения условия  $\gamma_0(x_{in}) = \gamma_0$ ;

I2. определив таким образом  $x_{in}$ , используя значения коэффициентов  $a_1, a_2, t_{12}$  и новое значение  $t_6$  повторяются процедуры I + II до тех пор, пока не выполнится условие  $\gamma_1(x_{in}) = 0$ .

I3. для стыковки решений со стороны катод - анодного зазора определяются значения  $\psi_0(x_{in}), (\psi'_0/\psi_0)_{x_{in}}, \Theta(x_{in})$ , где  $x_{in}$  - координата нахождения сетки по оси симметрии системы;

I4. просчет aberrаций в катод - анодном зазоре.

#### 4.3. Программа "TUBE".

Программа учитывает собственный заряд пучка, транспортируемого в трубе дрейфа. Первый член ряда в уравнении (24) является определяющим, поэтому можно записать более удобную формулу для определения осевой энергии электрона в трубе:

$$\gamma_0(x) \simeq \gamma_0(x=0) - \frac{I_b}{I_a} \frac{1}{\beta(x)} \left[ 1 + 2 \ln \left( \frac{R_{tp}}{r(x)} \right) \right] \cdot \\ \cdot \left( 1 - \exp(-\lambda_1 x / R_{tp}) \right), \quad (30)$$

где  $\lambda_1$  - нуль функции Бесселя  $J_0(\lambda_1) = 0$ ;  $\gamma_0(x=0)$  - энергия электронов на сетке, т.е.  $\gamma_0(x=0) = \gamma_a$ ;  $\beta(x) = v/c$  - безразмерная скорость электронов;  $R_{tp}$  - радиус трубы дрейфа;  $r(x)$  - радиус транспортируемого пучка;  $I_a$  - ток пучка,  $I_b = I_c/P_a$ ,  $I_c$  - ток снимаемый с катода,  $P_a$  - прозрачность сетки;  $I_a = m_a c^3/e$ .

Магнитное поле на оси трубы дрейфа формируется соленоидом и магнитной линзой. Если магнитное поле линзы взято реальное (26) -- (27), то магнитное поле соленоида -- модельное.

В работе рассматривается важный для практики случай формирования брызговикового потока в продольном магнитном поле, монотонно стремящемся при  $q_1 \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow \infty$ ) к конечному значению  $\ell_f$ . Представим внешнее магнитное поле на оси трубы дрейфа без учета диамагнетизма в виде :

$$\ell_o(x) = \ell_f \operatorname{th} \left[ a(x) \left( 1 - \frac{x_B}{x_B + R_c} e^{-2x/x_B} \right) \right],$$

$$a(x) = x^2 / ((x + x_2)x_B), \quad (31)$$

где  $x_2$  -- длина квадратичного роста магнитного поля ;  $x_B$  -- длина фронта ;  $R_c$  -- радиус катода ;  $x$  -- некоторая переменная, причем  $\ell_o(x \leq 0) = 0$  ;  $\ell_f \equiv \ell_o(x \rightarrow \infty)$ .

В программе "ТИВЕ" решается с учетом собственного поля пучка, транспортируемого в трубе дрейфа, уравнение огибающей (14), причем можно вводить и нечеловеководимую величину нормализованного эмптанса  $\zeta$ . В этом случае уравнение огибающей будет иметь вид :

$$\gamma_{10}^{12} \frac{(3 + \gamma_{10})^2}{(1 + \gamma_{10})^2} = \frac{1}{\Theta^2} - \ell_o^2 - 4\gamma_{10}^2 \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{4\gamma_{10}^2}{(r_0 \Theta)^4} x_0^2 \zeta^2, \quad (32)$$

где  $r_0$  -- некоторый характерный радиус.

Уравнение (14) решается относительно огибающей  $\Theta$  при некоторых  $\gamma_{10}(x)$ ,  $\gamma'_{10}(x)$ ,  $\ell_o(x)$ , поэтому необходимо определить начальные значения  $\Theta_0$ ,  $\Theta'_0$ .

Программа "ТИВЕ" построена таким образом, что можно организовать решение уравнения огибающей либо в направлении движения пучка в трубе дрейфа, что удобно при исследовании воздействия пучка на образцы различных материалов, т.к. не требуется согласования с водушками

магнитным полем, либо в обратном направлении, что позволяет формировать транспортировать пучок, согласованный с внешним магнитным полем.

Одной частью программы "ТИВЕ", связанную с формированием согласованного пучка. Для магнитного поля  $\ell_0(x)$  вида (32) нетрудно записать асимптотику при  $x > x_f$  введя новую переменную  $y = x - x_f$ :

$$\ell_0^{ad}(y) = \ell_f [1 - \varepsilon e^{-dy}] , \quad (33)$$

где  $\varepsilon = 2e^{-2x_f/x_B}$  ;  $d = 2/x_B$  ;  $x_f$  - конечная точка ,  
 $\ell_0(x_f) = \ell_f$  .

Из уравнения огибающей (I4) при постоянном импульсе осевого электрона  $\eta_{10} = \eta_{10f}$  для магнитного поля  $\ell_0^{ad}(y)$  получается асимптотический вид огибающей пучка:

$$\Theta^{ad}(y) \approx \frac{1}{\ell_f} \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{1+2\left(\frac{d\eta_{10f}}{\ell_f}\right)} e^{-dy} \right] , \quad (34)$$

где  $\eta_{10f} = \sqrt{\gamma_0^2 - 1}$  , откуда нетрудно определить и вид  $\Theta^{ad}(y)$

Параметры программы "ТИВЕ" являются :

$PQ$  - прозрачность анодной сетки ;

$GMF$  - гальванический фактор, определяющий энергию алькtronов на анодной сетке ;

$NST$  - число шагов с длиной шага ;

$RT$  - радиус трубы дрейфа ;

$CTC$  - ток пучка, снимаемый с катода.

На рис.3 изображены параметры магнитного поля.

$b_0(x)$



$b_f$   $b_L$

$R_{tp}$

$$\begin{array}{c} xL\phi \\ \times \\ x\phi \\ \times \\ x^2 \\ \times \\ xB \end{array} \rightarrow x$$

рас. 3

Действия программы "ТИВЕ" :

1. по величине тока пучка, транспортируемого в трубе дрейфа, по энергии электронов, по радиусу трубы дрейфа и величине внешнего магнитного поля определяется значение согласованного радиуса пучка  $r_f$  (19) ; при этом организуется итерация по энергии осевых электронов, т.к. необходимо учесть собственный заряд пучка ;
2. определяется энергия осевых электронов на радиусе, где торец трубы дрейфа не влияет на пучок (34), полагая  $\beta_f \approx 1$  ; очевидно, что транспортировка электронов в трубе дрейфа возможна, если  $\gamma_{of} > 1$
3. организуется итерационный поиск зависимости радиуса пучка от продольной координаты ; в качестве первого приближения полагаем, что радиус пучка в трубе дрейфа постоянен и равен согласованному значению  $r(x) = r_f$  , а энергия осевого электрона есть

$$\gamma_0(x) \approx \gamma_0(x=0) - \frac{I_b}{I_a} \frac{1}{\beta(x)} \left[ 1 + 2 \ln \left( \frac{R_{tp}}{r_f} \right) \right] \left( 1 - e^{-J_1 x / R_{tp}} \right),$$

где  $J_1$  - цуль функции Бесселя  $J_0(a_1) = 0$  ;  $\gamma_0(x=0) = \gamma_a$  - энергия осевых электронов на анодной острке ;  $\beta(x) \approx \sqrt{\gamma_a^2 - 1} / \gamma_a$  ;

4. определив таким образом  $\gamma_0(x)$  , а значит  $\gamma_{10}(x)$  ,  $\gamma'_{10}(x)$  , решается уравнение огибающей относительно  $\Theta$  , начальные условия выражаются согласно асимптотическому виду огибающей (34) ;

5. определив  $\Theta(x)$  вычисляется зависимость  $r(x)$ , используя соотношение  $\Theta(x) = \sqrt{\eta_{10}} \frac{r(x)}{R}$ , где  $R$  - радиус катода;
6. для нового вида зависимости  $r(x)$  определяется  $y_0(x)$  и вновь решается уравнение сгибающей относительно  $\Theta$  при прежних начальных условиях; так итерации повторяются пока  $y_0(x_f)_{i+1} \approx y_0(x_f)_i$ , где  $x_f$  - конечная точка;  $i$  - номер итерации;
7. рассматривается удовлетворение условий симметрии (30); если эти условия не выполнены, то меняются параметры, связанные с внешним магнитным полем.

Блок - схема работы этой части программы "TUBE" показана на рис.4.1. В качестве начальных условий при решении уравнения сгибающей относительно  $\Theta$  можно использовать значения  $\Theta$  и  $\Theta'$  на сетке. Тогда изменения параметры, связанные с внешним магнитным полем, можно добиться желаемого размера пучка на некотором расстоянии от сетки, но без согласования с магнитным полем.

### 5. Результаты счета программы "POL".

Рассмотрим следующую задачу. Необходимо получить согласованный с внешним магнитным полем пучок. Распределение плотности заряда по сечению пучка должно иметь постоянный. Энергия электронов на сетке  $y_a = 1.4$ . Ток пучка, снимаемый с катода  $I_d = 1$  кА. Радиус катода  $R_k = 1$  см. Прозрачность анодной сетки  $P_Q = 0.6$ .

Для получения пучка с требуемой энергией электронов на аноде и с заданным током, снимаемым с катода необходимо обеспечить выполнение следующих требований:

1. пучок выпущен с радиусом кривизны

$$R_d = 5 \text{ см} (\alpha_1 = -0.1);$$

2. расстояние между катодом и анодом

$$x_a = 0.85 \text{ см}.$$

Согласуем полученный пучок с внешним магнитным полем в трубе дрейфа

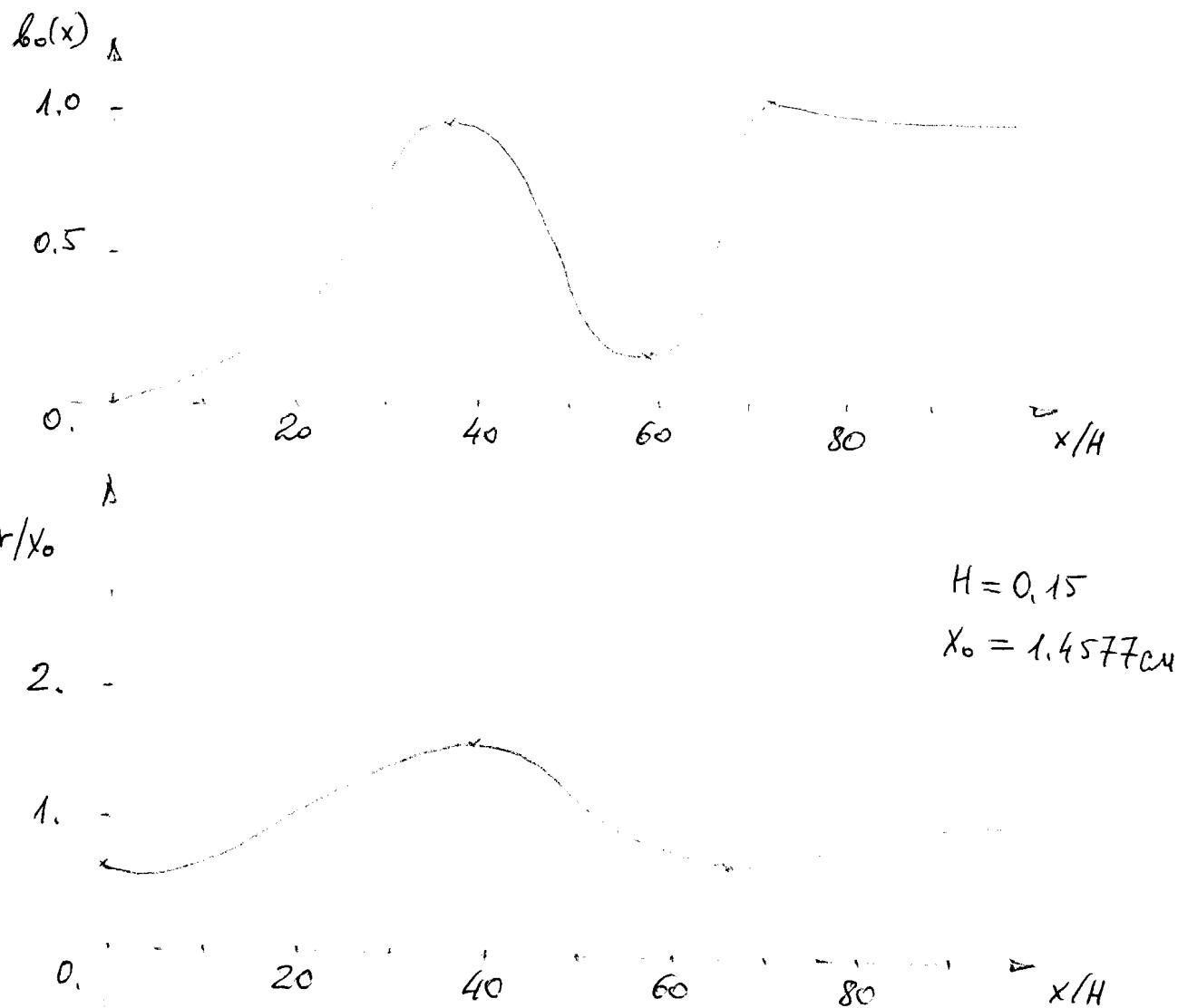
- 20 -

радиуса  $R_{TP} = 2.9$  см. Пусть лоле соленоида на оси симметрии  $B_0 = 1.017$  кГс,  $X_0 \approx 12$  см,  $X_B = 0.73$  см,  $X_2 = 6.35$  см. Тогда для получения согласованного пучка необходимо использовать магнитную линзу с параметрами:

$$B_{z1} = 0.958 \text{ кГс}, X_{01} = 4,66 \text{ см}, L = 4,37 \text{ см}.$$

При этом радиус согласованного пучка  $r_s = 1.33$  см, энергия осевого электрона на расстоянии  $L \gg \lambda$ ,  $R_{TP}$   $\gamma_{of} = 1.2435$ .

На рис. 4 показаны зависимости  $f_0(x)$  и  $r(x)$ , полученные при указанных параметрах.



$$x_{peak} = (x/H) \times H \times X_0$$

рис. 4

Приложение I.

Представление характеристики потока в виде аналитических функций агрегата  $u = \left(\frac{3}{2} q_1\right)^{1/3}$ :

$$\begin{aligned}
 \eta_{10} = & u^2 + \frac{32}{45} a_1 u^5 + \frac{19}{126} u^6 + \left(-\frac{8}{5} t_6 + \frac{4292}{10125} a_1^2\right) u^8 + \\
 & + \frac{4336}{14175} a_1 u^9 + \left(-\frac{19}{34650} b_k^2 + \frac{4507}{2182950}\right) u^{10} + \\
 & + \left(-\frac{8312}{2475} t_6 a_1 + \frac{8101744}{15035625} a_1^3 - \frac{4736}{13365} a_2\right) u^{11} + \\
 & + \left(-\frac{916}{1365} t_6 + \frac{1072454}{2764125} a_1^2\right) u^{12} + \\
 & + a_1 \left(-\frac{104528}{70945875} b_k^2 + \frac{222064}{212837625}\right) u^{13} + \quad (\text{II.I}) \\
 & + \left(\frac{32731}{20738025} b_k^2 - \frac{67}{19} t_{12} + \frac{281}{950} t_6^2 - \right. \\
 & - \frac{30536024}{10580625} t_6 a_1^2 + \frac{25229898704}{64277296875} a_1^4 - \frac{120320}{457083} a_1 a_2 + \\
 & \left. + \frac{17705981}{10451964600}\right) u^{14} = u^2 + u^4 \sum_{i=1}^{10} e_i u^i,
 \end{aligned}$$

здесь  $b_k$  — величина магнитного поля на катоде;

$$\begin{aligned}
 \Theta = & u + \left(-\frac{44}{45}\right) a_1 u^4 + \left(-\frac{1}{126}\right) u^5 + t_6 u^7 + \\
 & + \frac{22}{1575} a_1 u^8 + \left(-\frac{257}{34650} b_k^2 - \frac{4511}{1455300}\right) u^9 + \\
 & + \left(\frac{392}{495} t_6 a_1 - \frac{286904}{3007125} a_1^3 + \frac{1856}{13365} a_2\right) u^{10} +
 \end{aligned}$$

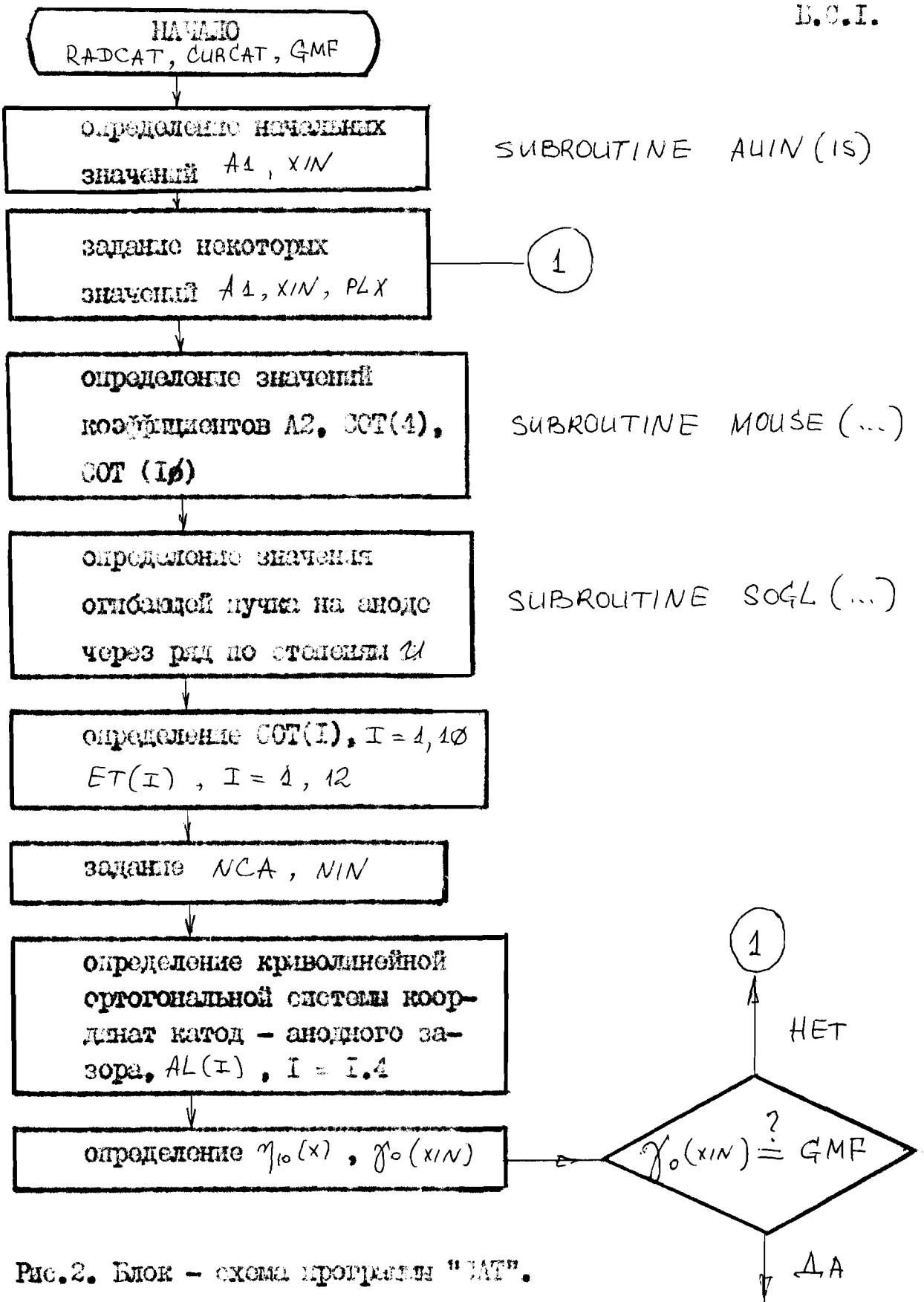
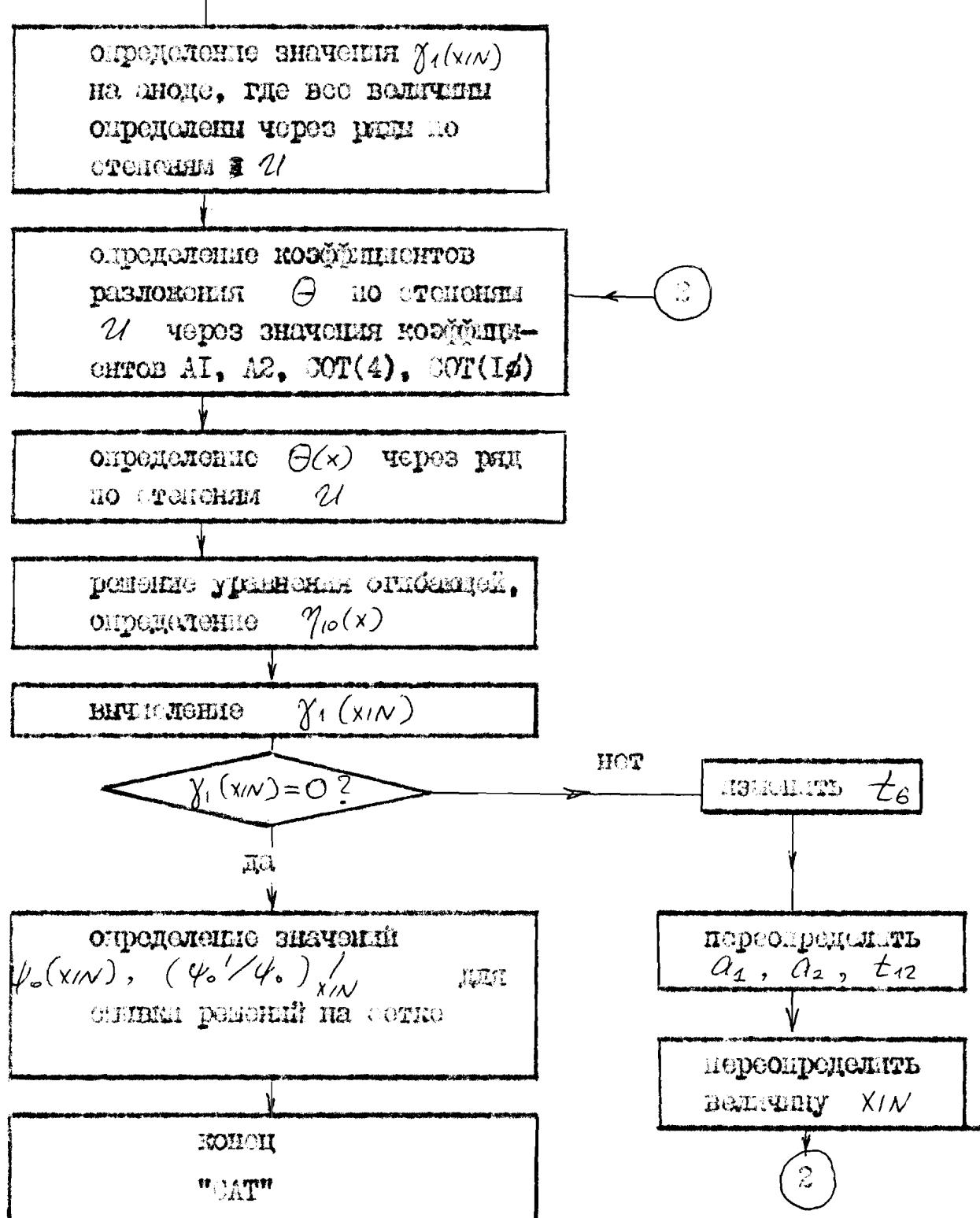


Рис.2. Блок – схема программы "RADCAT".



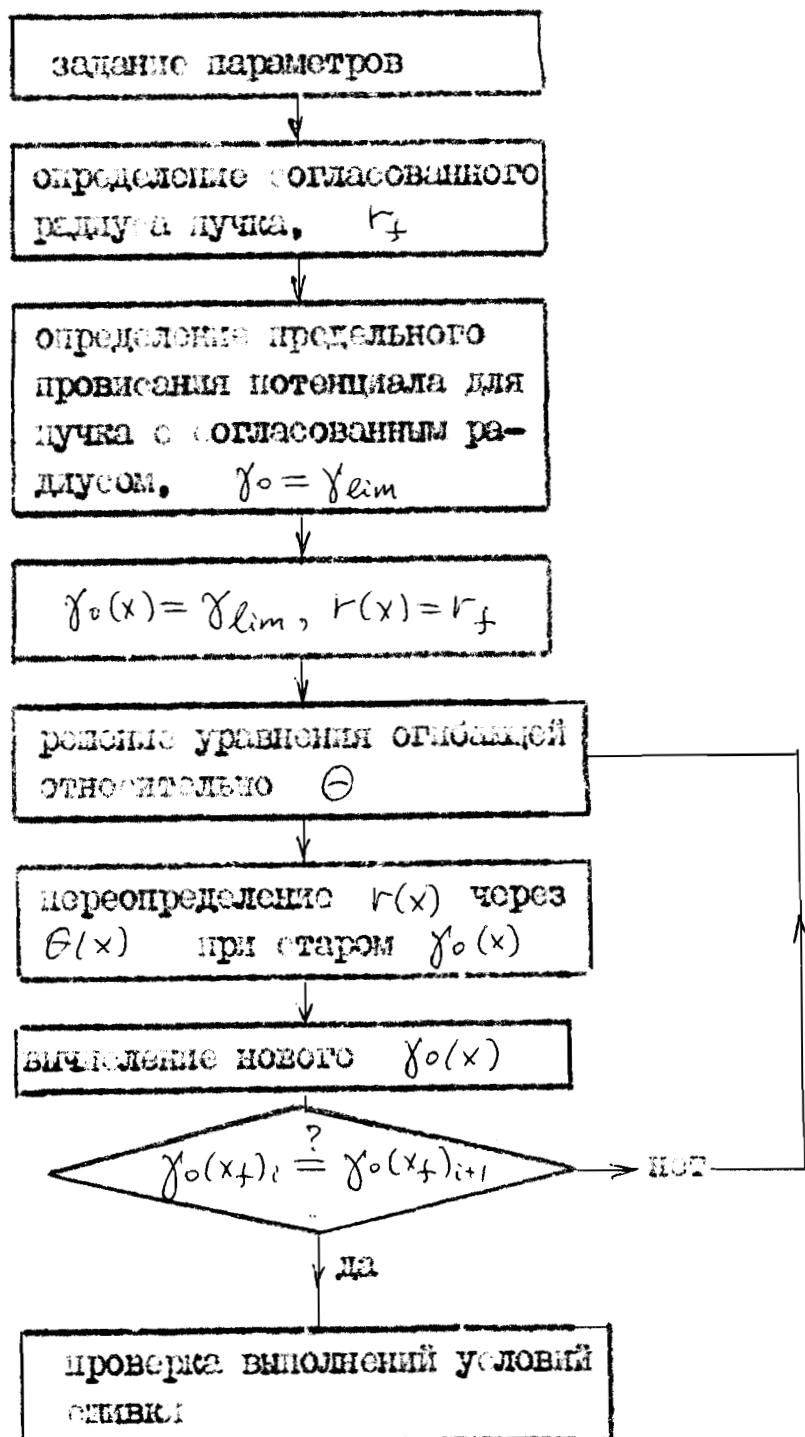


Рис.4.1.

Литература.

1. Алексахин Ю.Н. ОИПР РЗ-65-271, Дубна, 1965.
2. Алексахин Ю.Н. ОИПР РЗ-65-941, Дубна, 1965.
3. Алексахин Ю.Н. ОИПР РЗ-64-619, Дубна, 1964.
4. Александр К., Хинтце В. - ФСЧА , т.13 , в.2 , 1982.
5. Морс Ф.М., Фейнбах Г. Методы математической физики. II., Изд-во иностранной литературы, 1960.
6. Миллер Р. Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М., "Мир", 1984 .
7. Сировой В.А. Рю, 1985, т.30 , №4 , с.793.
8. Гердт В.Н., Тарасов О.В., Ерков Д.В., УФН. 130 , №1 (1981).
9. Каутейн Л.Т., Кафко Г.С., Уотерс У.Е. Формирование электронных пучков. М., "Мир" , 1970.
10. Ландсбаум Л.Д., Лейбниц Л.М. "Электродинамика сильных полей". ГИТГИ , Н. , 1957.





$\sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{3}{5}$ ,  $\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{4}{5}$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\psi}{dt} \right) = - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial w} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial w} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial w} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{I}(\{1\}) = 1 \\
 & \text{I}(\{2\}) = 2 \\
 & \text{I}(\{1, 2\}) = 1 + 2 - 1/2 = 3/2 \\
 & \text{I}(\{1, 2, 3\}) = 1 + 2 + 3 - 1/2 - 1/3 + 1/6 = 11/3 \\
 & \text{I}(\{1, 2, 3, 4\}) = 1 + 2 + 3 + 4 - 1/2 - 1/3 - 1/4 + 1/12 = 25/4
 \end{aligned}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( + \right) \cdot \frac{X^{***} 2 / 3}{\left( 1 + 1 \right)^{1/2}} + 1_2 \left( z \right)^{**} + 1_2 \left( z \right)^{**} X^{***} 2 / 2 + 1_2 \left( z \right)^{**} X^{***} 2 / 3 =$$

$$\frac{J_1}{J_2} \leq 1 + \left( \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{1}{\lambda_1} + \left( -\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) = T(\lambda_1) + T(\lambda_2)$$

$$\begin{aligned} & \text{Tr}((\pm 1)^{\alpha}) = \pm 1^{\# \text{ of } 1's} \\ & \text{Tr}((\pm 1)^{\alpha}) = \pm (-1)^{\# \text{ of } 1's} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \text{if } z_1 = 1 \text{ and } z_2 = 1 \\ \text{if } z_1 = 1 \text{ and } z_2 = -1 \\ \text{if } z_1 = -1 \text{ and } z_2 = 1 \\ \text{if } z_1 = -1 \text{ and } z_2 = -1 \end{array} \right. \\ & \quad \left. \begin{array}{l} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \\ \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \end{array} \right\} \in T(\Gamma) \cap D_0 \end{aligned}$$

$$= (-1 \times (-1)) \cdot (1, -1) = 1 \cdot (1, -1) = (1, -1)$$

1970-1971  
1971-1972  
1972-1973  
1973-1974  
1974-1975  
1975-1976  
1976-1977  
1977-1978  
1978-1979  
1979-1980  
1980-1981  
1981-1982  
1982-1983  
1983-1984  
1984-1985  
1985-1986  
1986-1987  
1987-1988  
1988-1989  
1989-1990  
1990-1991  
1991-1992  
1992-1993  
1993-1994  
1994-1995  
1995-1996  
1996-1997  
1997-1998  
1998-1999  
1999-2000  
2000-2001  
2001-2002  
2002-2003  
2003-2004  
2004-2005  
2005-2006  
2006-2007  
2007-2008  
2008-2009  
2009-2010  
2010-2011  
2011-2012  
2012-2013  
2013-2014  
2014-2015  
2015-2016  
2016-2017  
2017-2018  
2018-2019  
2019-2020  
2020-2021  
2021-2022  
2022-2023  
2023-2024  
2024-2025  
2025-2026  
2026-2027  
2027-2028  
2028-2029  
2029-2030  
2030-2031  
2031-2032  
2032-2033  
2033-2034  
2034-2035  
2035-2036  
2036-2037  
2037-2038  
2038-2039  
2039-2040  
2040-2041  
2041-2042  
2042-2043  
2043-2044  
2044-2045  
2045-2046  
2046-2047  
2047-2048  
2048-2049  
2049-2050  
2050-2051  
2051-2052  
2052-2053  
2053-2054  
2054-2055  
2055-2056  
2056-2057  
2057-2058  
2058-2059  
2059-2060  
2060-2061  
2061-2062  
2062-2063  
2063-2064  
2064-2065  
2065-2066  
2066-2067  
2067-2068  
2068-2069  
2069-2070  
2070-2071  
2071-2072  
2072-2073  
2073-2074  
2074-2075  
2075-2076  
2076-2077  
2077-2078  
2078-2079  
2079-2080  
2080-2081  
2081-2082  
2082-2083  
2083-2084  
2084-2085  
2085-2086  
2086-2087  
2087-2088  
2088-2089  
2089-2090  
2090-2091  
2091-2092  
2092-2093  
2093-2094  
2094-2095  
2095-2096  
2096-2097  
2097-2098  
2098-2099  
2099-20100

$\phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x) < \epsilon$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdots \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \cdots + \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

<sup>10</sup> See also the discussion in the previous section.

( $\alpha_1, (\beta_1, \gamma_1), \beta_2, (\gamma_2, \gamma_3)$ ) (9) 70 33

$$f(z) = z + x(\bar{z})$$

1. *Leucosia* *leucostoma* *leucostoma* *leucostoma* *leucostoma* *leucostoma* *leucostoma*







1.  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CH}_3\text{CHO} + \text{H}_2\text{O}$  (Ex. C. 1. 1. 1) , 1%  $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$  --- A.B.R.  
2.  $\text{CH}_3\text{CHO} + \text{H}_2\text{O} \xrightarrow{\text{H}_2\text{N}-\text{CH}_2-\text{CO}_2\text{Na}}$   
3.  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CO}_2\text{Na} + \text{H}_2\text{O} \xrightarrow{\text{H}_2\text{N}-\text{CH}_2-\text{CO}_2\text{Na}}$   
4.  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CO}_2\text{Na} + \text{H}_2\text{O} \xrightarrow{\text{H}_2\text{N}-\text{CH}_2-\text{CO}_2\text{Na}}$   
5.  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CO}_2\text{Na} + \text{H}_2\text{O} \xrightarrow{\text{H}_2\text{N}-\text{CH}_2-\text{CO}_2\text{Na}}$

6.  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$

卷之三

10384-0117(04) FOR 307 (+)

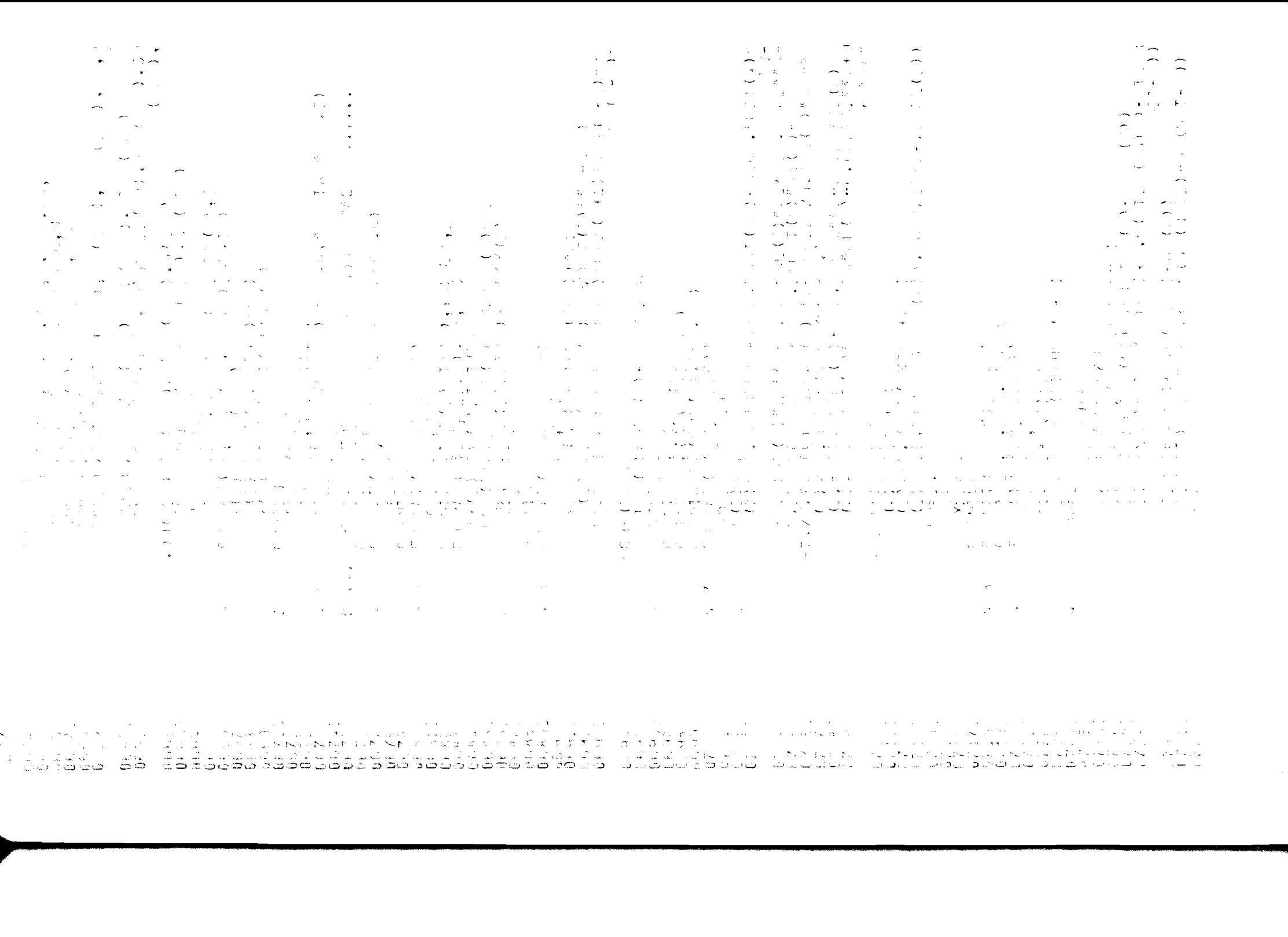
1



1. *W. E. B. DuBois*  
2. *W. E. B. DuBois*  
3. *W. E. B. DuBois*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + \psi_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_3 - \psi_4) \right) = \frac{1}{2}, \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 - \psi_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_3 + \psi_4) \right) = \frac{1}{2}, \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + \psi_2) - \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_3 + \psi_4) \right) = \frac{1}{2}, \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 - \psi_2) - \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_3 - \psi_4) \right) = \frac{1}{2}, \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + \psi_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_3 - \psi_4) \right) = \frac{1}{2}, \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 - \psi_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_3 + \psi_4) \right) = \frac{1}{2}, \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + \psi_2) - \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_3 + \psi_4) \right) = \frac{1}{2}, \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 - \psi_2) - \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_3 - \psi_4) \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1























$$\begin{aligned}
& \text{Left side: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} H_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{H_k^2}{k} \\
& \text{Right side: } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{H_k^2}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{H_k^2}{k} \\
& \text{Conclusion: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{H_k^2}{k}
\end{aligned}$$





the first time, the author has been able to find a complete solution.

The author wishes to thank Dr. J. C. O'Connor for his help in the preparation of the manuscript and Dr. R. E. L. Paley for his valuable suggestions.

He also wishes to thank the referee for his useful comments which have greatly improved the presentation of the paper.

Finally, the author would like to thank the editor for his permission to publish this paper.

Received by the editor January 1, 1968; revised April 1, 1968.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.

Present address: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1.





1.  $\text{P}(\text{X}_1 = \text{X}_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$   
 2.  $\text{P}(\text{X}_1 < \text{X}_2) = 1 - \text{P}(\text{X}_1 = \text{X}_2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$   
 3.  $\text{P}(\text{X}_1 > \text{X}_2) = 1 - \text{P}(\text{X}_1 = \text{X}_2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$   
 4.  $\text{P}(\text{X}_1 \leq \text{X}_2) = \text{P}(\text{X}_1 = \text{X}_2) + \text{P}(\text{X}_1 < \text{X}_2) = \frac{1}{n^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$   
 5.  $\text{P}(\text{X}_1 \geq \text{X}_2) = \text{P}(\text{X}_1 = \text{X}_2) + \text{P}(\text{X}_1 > \text{X}_2) = \frac{1}{n^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$   
 6.  $\text{P}(\text{X}_1 \neq \text{X}_2) = 1 - \text{P}(\text{X}_1 = \text{X}_2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$   
 7.  $\text{P}(\text{X}_1 \leq \text{X}_2 \leq \text{X}_3) = \text{P}(\text{X}_1 \leq \text{X}_2) \cdot \text{P}(\text{X}_2 \leq \text{X}_3)$   
 8.  $\text{P}(\text{X}_1 \leq \text{X}_2 \leq \text{X}_3 \leq \text{X}_4) = \text{P}(\text{X}_1 \leq \text{X}_2) \cdot \text{P}(\text{X}_2 \leq \text{X}_3) \cdot \text{P}(\text{X}_3 \leq \text{X}_4)$   
 9.  $\text{P}(\text{X}_1 \leq \text{X}_2 \leq \dots \leq \text{X}_n) = \text{P}(\text{X}_1 \leq \text{X}_2) \cdot \text{P}(\text{X}_2 \leq \text{X}_3) \cdots \text{P}(\text{X}_{n-1} \leq \text{X}_n)$   
 10.  $\text{P}(\text{X}_1 \leq \text{X}_2 \leq \dots \leq \text{X}_n \mid \text{YOU WANT TO CHANGE}) = \frac{\text{P}(\text{X}_1 \leq \text{X}_2 \leq \dots \leq \text{X}_n)}{\text{P}(\text{X}_1 \leq \text{X}_2 \leq \dots \leq \text{X}_n) + \text{P}(\text{X}_2 \leq \text{X}_1 \leq \dots \leq \text{X}_n)}$



$$\begin{aligned}
 & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_1^2}{w_1^2} + \frac{x_2^2}{w_2^2} \right)} - e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(x_1 - w_1)^2}{w_1^2} + \frac{(x_2 - w_2)^2}{w_2^2} \right)} \right) \\
 & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_1^2}{w_1^2} + \frac{x_2^2}{w_2^2} \right)} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_1^2}{w_1^2} + \frac{x_2^2}{w_2^2} \right)} \right. \\
 & \quad \times \left. \left( \left( \frac{x_1}{w_1} + \frac{w_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{w_2} + \frac{w_2}{2} \right)^2 \right) \right) \\
 & = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_1^2}{w_1^2} + \frac{x_2^2}{w_2^2} \right)} - \left( \frac{x_1^2}{w_1^2} + \frac{x_2^2}{w_2^2} + \frac{(w_1^2 + w_2^2)}{4} \right) e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_1^2}{w_1^2} + \frac{x_2^2}{w_2^2} \right)} \right) \\
 & = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_1^2}{w_1^2} + \frac{x_2^2}{w_2^2} \right)} - \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_1^2}{w_1^2} + \frac{x_2^2}{w_2^2} \right)} \right) \\
 & = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_1^2}{w_1^2} + \frac{x_2^2}{w_2^2} \right)} - \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(x_1 - w_1)^2}{w_1^2} + \frac{(x_2 - w_2)^2}{w_2^2} \right)} \right) \\
 & = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_1^2}{w_1^2} + \frac{x_2^2}{w_2^2} \right)} - \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(x_1 - w_1)^2}{w_1^2} + \frac{(x_2 - w_2)^2}{w_2^2} \right)} \right) \\
 & \quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(x_1 - w_1)^2}{w_1^2} + \frac{(x_2 - w_2)^2}{w_2^2} \right)} - \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(x_1 - w_1)^2}{w_1^2} + \frac{(x_2 - w_2)^2}{w_2^2} \right)} \right) \\
 & = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_1^2}{w_1^2} + \frac{x_2^2}{w_2^2} \right)} - \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_1^2}{w_1^2} + \frac{x_2^2}{w_2^2} \right)} \right) \\
 & = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_1^2}{w_1^2} + \frac{x_2^2}{w_2^2} \right)} - \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_1^2}{w_1^2} + \frac{x_2^2}{w_2^2} \right)} \right)
 \end{aligned}$$

10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100



1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100  
101  
102  
103  
104  
105  
106  
107  
108  
109  
110  
111  
112  
113  
114  
115  
116  
117  
118  
119  
120  
121  
122  
123  
124  
125  
126  
127  
128  
129  
130  
131  
132  
133  
134  
135  
136  
137  
138  
139  
140  
141  
142  
143  
144  
145  
146  
147  
148  
149  
150  
151  
152  
153  
154  
155  
156  
157  
158  
159  
160  
161  
162  
163  
164  
165  
166  
167  
168  
169  
170  
171  
172  
173  
174  
175  
176  
177  
178  
179  
180  
181  
182  
183  
184  
185  
186  
187  
188  
189  
190  
191  
192  
193  
194  
195  
196  
197  
198  
199  
200  
201  
202  
203  
204  
205  
206  
207  
208  
209  
210  
211  
212  
213  
214  
215  
216  
217  
218  
219  
220  
221  
222  
223  
224  
225  
226  
227  
228  
229  
230  
231  
232  
233  
234  
235  
236  
237  
238  
239  
240  
241  
242  
243  
244  
245  
246  
247  
248  
249  
250  
251  
252  
253  
254  
255  
256  
257  
258  
259  
260  
261  
262  
263  
264  
265  
266  
267  
268  
269  
270  
271  
272  
273  
274  
275  
276  
277  
278  
279  
280  
281  
282  
283  
284  
285  
286  
287  
288  
289  
290  
291  
292  
293  
294  
295  
296  
297  
298  
299  
300  
301  
302  
303  
304  
305  
306  
307  
308  
309  
310  
311  
312  
313  
314  
315  
316  
317  
318  
319  
320  
321  
322  
323  
324  
325  
326  
327  
328  
329  
330  
331  
332  
333  
334  
335  
336  
337  
338  
339  
340  
341  
342  
343  
344  
345  
346  
347  
348  
349  
350  
351  
352  
353  
354  
355  
356  
357  
358  
359  
360  
361  
362  
363  
364  
365  
366  
367  
368  
369  
370  
371  
372  
373  
374  
375  
376  
377  
378  
379  
380  
381  
382  
383  
384  
385  
386  
387  
388  
389  
390  
391  
392  
393  
394  
395  
396  
397  
398  
399  
400  
401  
402  
403  
404  
405  
406  
407  
408  
409  
410  
411  
412  
413  
414  
415  
416  
417  
418  
419  
420  
421  
422  
423  
424  
425  
426  
427  
428  
429  
430  
431  
432  
433  
434  
435  
436  
437  
438  
439  
440  
441  
442  
443  
444  
445  
446  
447  
448  
449  
450  
451  
452  
453  
454  
455  
456  
457  
458  
459  
460  
461  
462  
463  
464  
465  
466  
467  
468  
469  
470  
471  
472  
473  
474  
475  
476  
477  
478  
479  
480  
481  
482  
483  
484  
485  
486  
487  
488  
489  
490  
491  
492  
493  
494  
495  
496  
497  
498  
499  
500  
501  
502  
503  
504  
505  
506  
507  
508  
509  
510  
511  
512  
513  
514  
515  
516  
517  
518  
519  
520  
521  
522  
523  
524  
525  
526  
527  
528  
529  
530  
531  
532  
533  
534  
535  
536  
537  
538  
539  
540  
541  
542  
543  
544  
545  
546  
547  
548  
549  
550  
551  
552  
553  
554  
555  
556  
557  
558  
559  
560  
561  
562  
563  
564  
565  
566  
567  
568  
569  
570  
571  
572  
573  
574  
575  
576  
577  
578  
579  
580  
581  
582  
583  
584  
585  
586  
587  
588  
589  
589  
590  
591  
592  
593  
594  
595  
596  
597  
598  
599  
600  
601  
602  
603  
604  
605  
606  
607  
608  
609  
610  
611  
612  
613  
614  
615  
616  
617  
618  
619  
620  
621  
622  
623  
624  
625  
626  
627  
628  
629  
630  
631  
632  
633  
634  
635  
636  
637  
638  
639  
640  
641  
642  
643  
644  
645  
646  
647  
648  
649  
650  
651  
652  
653  
654  
655  
656  
657  
658  
659  
660  
661  
662  
663  
664  
665  
666  
667  
668  
669  
669  
670  
671  
672  
673  
674  
675  
676  
677  
678  
679  
679  
680  
681  
682  
683  
684  
685  
686  
687  
688  
689  
689  
690  
691  
692  
693  
694  
695  
696  
697  
698  
699  
700  
701  
702  
703  
704  
705  
706  
707  
708  
709  
709  
710  
711  
712  
713  
714  
715  
716  
717  
718  
719  
720  
721  
722  
723  
724  
725  
726  
727  
728  
729  
729  
730  
731  
732  
733  
734  
735  
736  
737  
738  
739  
740  
741  
742  
743  
744  
745  
746  
747  
748  
749  
750  
751  
752  
753  
754  
755  
756  
757  
758  
759  
760  
761  
762  
763  
764  
765  
766  
767  
768  
769  
769  
770  
771  
772  
773  
774  
775  
776  
777  
778  
779  
779  
780  
781  
782  
783  
784  
785  
786  
787  
788  
789  
789  
790  
791  
792  
793  
794  
795  
796  
797  
798  
799  
800  
801  
802  
803  
804  
805  
806  
807  
808  
809  
809  
810  
811  
812  
813  
814  
815  
816  
817  
818  
819  
820  
821  
822  
823  
824  
825  
826  
827  
828  
829  
829  
830  
831  
832  
833  
834  
835  
836  
837  
838  
839  
840  
841  
842  
843  
844  
845  
846  
847  
848  
849  
850  
851  
852  
853  
854  
855  
856  
857  
858  
859  
860  
861  
862  
863  
864  
865  
866  
867  
868  
869  
869  
870  
871  
872  
873  
874  
875  
876  
877  
878  
879  
879  
880  
881  
882  
883  
884  
885  
886  
887  
888  
889  
889  
890  
891  
892  
893  
894  
895  
896  
897  
898  
899  
900  
901  
902  
903  
904  
905  
906  
907  
908  
909  
909  
910  
911  
912  
913  
914  
915  
916  
917  
918  
919  
920  
921  
922  
923  
924  
925  
926  
927  
928  
929  
929  
930  
931  
932  
933  
934  
935  
936  
937  
938  
939  
940  
941  
942  
943  
944  
945  
946  
947  
948  
949  
950  
951  
952  
953  
954  
955  
956  
957  
958  
959  
960  
961  
962  
963  
964  
965  
966  
967  
968  
969  
969  
970  
971  
972  
973  
974  
975  
976  
977  
978  
979  
979  
980  
981  
982  
983  
984  
985  
986  
987  
988  
989  
989  
990  
991  
992  
993  
994  
995  
996  
997  
998  
999  
1000

$$\begin{aligned}
 & \text{Left side: } \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 + y^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^2 + y^2) \right) \\
 & = \frac{1}{2} \left( 2 + 2 \right) = 2 \\
 & \text{Right side: } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x) + \frac{\partial}{\partial y} (2y) \\
 & = 2 + 2 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Left side: } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x) = 2 \\
 & \text{Right side: } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x) = 2 \\
 & \text{Left side: } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2y) = 2 \\
 & \text{Right side: } \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2y) = 2 \\
 & \text{Left side: } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + 2 = 4 \\
 & \text{Right side: } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2 + 2 = 4 \\
 & \text{Left side: } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x) = 2 \\
 & \text{Right side: } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x) = 2 \\
 & \text{Left side: } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2y) = 2 \\
 & \text{Right side: } \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2y) = 2 \\
 & \text{Left side: } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + 2 = 4 \\
 & \text{Right side: } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2 + 2 = 4
 \end{aligned}$$