

С 3450

3450

Ж-696

Жидков Е. П. и Полякова Р. В.

+

БЗ-11-11928.



4866/78

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

БЗ-11-11928

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 1978

4 скт Ж

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТРАНСПОРТИРОВКИ  
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В УСКОРИТЕЛЯХ НЕПРЕРЫВНЫМ АНАЛОГОМ  
МЕТОДА НЬЮТОНА

Е.П.Жидков, Р.В.Полякова

Объединенный институт ядерных исследований

I. Введение

В последнее время возник интерес к вопросам определения оптимальных (в смысле каких-либо критериев качества) параметров систем транспортировки заряженных частиц с учетом нелинейных эффектов<sup>/1,2/</sup>.

Эту задачу можно рассматривать как краевую задачу для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. На ряде физических задач<sup>/3/</sup>, приводящих к решению обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений, была практически показана эффективность непрерывного аналога метода Ньютона (МНН)<sup>/4,5/</sup>.

Достоинством этого метода является сведение достаточно произвольной нелинейной задачи к строгой и сравнительно легко реализуемой на ЭВМ последовательности линейных задач, методы решения которых хорошо разработаны.

В настоящей работе описывается алгоритм решения задачи транспортировки заряженных частиц с учетом нелинейных эффектов методом непрерывного параметра. Затем приводятся результаты численных расчетов двух конкретных физических задач:

1. Расчет поворотно-фокусирующей системы транспортировки протонов при быстром выводе первичного пучка на синхрофазотроне ЛВЭ.

2. Оптимизация длинных согласованных промежутков синхротрона и анализ нелинейных аберраций в них.





## 2. Физическая постановка задачи

На рис. I приведена модель транспортировки заряженных частиц с выбранной системой координат. Физическая задача ставится следующим образом.

Задаются направление и координаты пучка заряженных частиц на входе системы  $(\alpha_0, \alpha_{0\perp}, x_0, y_0, z_0)$ ,

$$\left. \begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \right\} \quad - \text{координаты начальной точки траектории,}$$

$\alpha_0$  - угол в радианах между касательной к проекции траектории в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  на плоскость  $XOY$  и осью  $X$ .

$\alpha_{0\perp}$  - угол в радианах между касательной к проекции траектории на плоскость  $XOZ$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  и осью  $X$

Требуется подобрать параметры системы (магнитные поля, градиенты линз, расположение элементов системы в пространстве) так, чтобы по заданному начальному положению и направлению пучка в пространстве получить его заданное же конечное положение и направление  $(\alpha_k, \alpha_{k\perp}, x_k, y_k, z_k)$ , где  $\alpha_k, \alpha_{k\perp}, x_k, y_k, z_k$  определяются аналогично  $\alpha_0, \alpha_{0\perp}, x_0, y_0, z_0$ .

## 3. Математическая постановка задачи и описание метода решения

Движение заряженных частиц в магнитном поле описывается полными уравнениями в прямоугольной системе координат<sup>/6/</sup>

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{\sqrt{A}}{B\rho} [B_x z'_x - (1 + y'^2_x) B_z + y'_x z'_x B_y] \\ z''_{xx} &= \frac{\sqrt{A}}{B\rho} [B_x y'_x - (1 + z'^2_x) B_y + y'_x z'_x B_z] \end{aligned} \quad (I)$$

$$A = 1 + y'^2_x + z'^2_x,$$

$B\rho$  - магнитная жесткость частицы.

Краевые условия:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 & y'_x(x_0) &= \operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0 \\ z(x_0) &= z_0 & z'_x(x_0) &= \operatorname{tg} \alpha_{0\perp} = z'_0 \\ y(x_k) &= y_k & y'_x(x_k) &= \operatorname{tg} \alpha_k = y'_k \\ z(x_k) &= z_k & z'_x(x_k) &= \operatorname{tg} \alpha_{k\perp} = z'_k \end{aligned} \quad (2)$$

Необходимо подобрать параметры системы так, чтобы траектория движения заряженных частиц удовлетворяла уравнениям (I) и краевым условиям (2).

Систему уравнений (I) 2-го порядка сводим к системе уравнений I-го порядка, заменой

$$y'_x = y_1, \quad z'_x = z_1$$

$$y_{1,x}' = \frac{\sqrt{A}}{B\rho} [z_1 B_x - (1 + y_1^2) B_z + y_1 z_1 B_y]$$

$$z_{1,x}' = \frac{\sqrt{A}}{B\rho} [y_1 B_x - (1 + z_1^2) B_y + y_1 z_1 B_z] \quad (3)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad y_1(x_0) = y'_x(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0$$

$$z(x_0) = z_0 \quad z_1(x_0) = z'_x(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_{0\perp}$$

$$y(x_k) = a, \quad y_1(x_k) = c, \quad z(x_k) = b, \quad z_1(x_k) = d$$

Параметры системы (обозначим их  $P_i, i=1,2,\dots,N$ ) подбираем так, чтобы

$$y_k(P_i) = a$$

$$y'_k(P_i) = c$$

$$z_k(P_i) = b$$

$$z'_k(P_i) = d \quad (4)$$

или

$$y_k - a = f_1 = 0$$

$$y'_k - c = f_2 = 0$$

$$z_k - b = f_3 = 0$$

$$z'_k - d = f_4 = 0 \quad (5)$$

Эту систему будем решать методом введения параметра  $t$  [7,8], считая, что  $P_i$  есть функции  $t$ :

$$P_1 = P_1(t), \quad P_2 = P_2(t) \quad \text{и т.д.}$$

На основании данного метода имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1 = -f_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_2 = -f_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_3 = -f_3$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_4 = -f_4 \quad (6)$$

Из системы (6) мы можем определить четыре параметра системы, поэтому из всего набора параметров выбираем те, которые существенно влияют на поведение траектории движения заряженных частиц (обычно этот выбор делается из физических соображений). Обозначим искомые параметры

$$P_1(t), P_2(t), P_3(t), P_4(t).$$

Система уравнений (6) для определения этих параметров будет:

$$\begin{cases} (y_k)'_{P_1} P_{1t}' + (y_k)'_{P_2} P_{2t}' + (y_k)'_{P_3} P_{3t}' + (y_k)'_{P_4} P_{4t}' = -(y_k - a) \\ (y_k')'_{P_1} P_{1t}' + (y_k')'_{P_2} P_{2t}' + (y_k')'_{P_3} P_{3t}' + (y_k')'_{P_4} P_{4t}' = -(y_k' - c) \\ (z_k)'_{P_1} P_{1t}' + (z_k)'_{P_2} P_{2t}' + (z_k)'_{P_3} P_{3t}' + (z_k)'_{P_4} P_{4t}' = -(z_k - b) \\ (z_k')'_{P_1} P_{1t}' + (z_k')'_{P_2} P_{2t}' + (z_k')'_{P_3} P_{3t}' + (z_k')'_{P_4} P_{4t}' = -(z_k' - d) \end{cases} \quad (7)$$

Из этой системы определяем производные  $P_{1t}', P_{2t}', P_{3t}', P_{4t}'$ .  
Затем по формуле

$$P_{it}' = \frac{P_i(t + \Delta t) - P_i(t)}{\Delta t}, \quad \text{где} \quad (8)$$

$\Delta t$  — шаг по переменной  $t$ , получаем значения параметров  $P_i$  на следующем шаге по  $t$ :

$$P_i(t + \Delta t) = P_i(t) + P_{it}' \cdot \Delta t$$

Начальное приближение  $P_1(t_0), P_2(t_0), P_3(t_0), P_4(t_0)$  задано.  
Для построения системы уравнений (7) необходимо определить

$$(y_k)'_{P_i}, (y_k')'_{P_i}, (z_k)'_{P_i}, (z_k')'_{P_i}$$

Для этого решаем следующие задачи Коши для системы уравнений (3)

I. Задача Коши для набора параметров  $P_1, P_2, P_3, P_4$ .  
Решив эту задачу, получаем

$$\begin{matrix} y_k(P_i) & y_k'(P_i) \\ z_k(P_i) & z_k'(P_i) \end{matrix} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (9)$$

2. Задача Коши для набора параметров  $P_1 + \Delta P_1, P_2, P_3, P_4$ , где  $\Delta P_i$  - шаг приращения по соответствующему параметру.

Получаем

$$\begin{aligned} & y_k (P_1 + \Delta P_1, P_2, P_3, P_4) \\ & z_k (P_1 + \Delta P_1, P_2, P_3, P_4) \\ & y_k' (P_1 + \Delta P_1, P_2, P_3, P_4) \\ & z_k' (P_1 + \Delta P_1, P_2, P_3, P_4) \end{aligned} \quad (10)$$

Из (9) и (10) можно определить

$$\begin{aligned} (y_k)'_{P_1} &\approx \frac{y_k (P_1 + \Delta P_1, P_2, P_3, P_4) - y_k (P_1, P_2, P_3, P_4)}{\Delta P_1} \\ (y_k')'_{P_1} &\approx \frac{y_k' (P_1 + \Delta P_1, P_2, P_3, P_4) - y_k' (P_1, P_2, P_3, P_4)}{\Delta P_1} \end{aligned}$$

Аналогично определяем  $(z_k)'_{P_1}, (z_k')'_{P_1}$ . Давая приращения по остальным параметрам и решив задачи Коши для соответствующих наборов параметров, определим значения производных от  $y_k, y_k', z_k, z_k'$  по всем параметрам. Так выполняется один шаг интегрирования по переменной  $t$ . Следующий шаг выполняется с новыми значениями искоемых параметров, найденных по формуле (8).

Таким образом, определение искоемых параметров производится методом итераций и может быть осуществлено с заданной точностью.

#### 4. Результаты численных расчетов

Чтобы проиллюстрировать возможности МНП при решении нелинейных краевых задач транспортировки заряженных частиц, были рассчитаны параметры системы транспортировки протонов при быстром выводе пучка на синхрофазотроне ЛВЭ (рис.2) и длинного согласованного промежутка (с.п.) сверхпроводящего синхротрона на 1.5 Гэв (рис.3). В процессе решения первой задачи можно сразу оценить необходимую точность установки магнитов системы. В табл. I приведены координаты и углы пучка на выходе системы в зависимости от изменения выбранных варьируемых параметров  $B_1, B_2, d_1, d_2$  ( $B_1, B_2$  - напряженности магнитных полей магнитов  $M_1, M_2$ ;  $d_1, d_2$  - смещение магнитов от оси "X"). Результаты приводятся для  $X=468$  см.

Как видно из этих данных, изменение  $B_1$  и  $B_2$  на 1% меняет горизонтальное направление пучка на 0.0004 рад и практически не влияет на вертикальное направление пучка. Изменение  $d_1$  и  $d_2$  на 2 см меняет угол  $\alpha$  на 0.004 мрад и  $\alpha_{\perp}$  на 0.0001 мрад, что на расстоянии 20 см сдвинет пучок на 8 см. Таким образом, точность установки магнитов для заданного  $\epsilon$  (в расчетах  $\epsilon = 0.0005$ ) должна быть  $\sim 0.25$  см. Аналогичная таблица была получена при вариации  $B_1, B_2, \chi_1, \chi_2$  ( $\chi_1, \chi_2$  — горизонтальные углы разворота магнитов относительно оси  $Z$ ). Изменение  $\chi_1, \chi_2$  на 0.005 рад вызывает изменение горизонтального угла на  $\sim 0.0008$  рад. и вертикального угла на  $\sim 0.0002$  рад., что не оказывает существенного влияния на ось пучка, т.е. при установке магнитов точность  $\Delta\chi = 0.005$  для величины  $\chi_1$  и  $\chi_2$  достаточна.

В современных жесткофокусирующих синхротронах организация системы ввода-вывода пучка, размещение ускоряющей станции и т.д. требует длинных с.п. Стремление сделать промежуток согласованным, т.е. невозмущающим регулярную структуру — проблема, к которой в последнее время стали обращаться исследователи. Численный расчет с.п. сверхпроводящего синхротрона на 1.5 ГэВ проводился с учетом додекаполюльной нелинейности в линзах  $F_1, F_2, F_3$ . При этом исследовался не только эффект рассогласования уже согласованного линейным расчетом промежутка, но и, что является новым, был рассчитан промежуток, согласованный с учетом нелинейных aberrаций в квадрупольных линзах. На практике, если известны величины этих нелинейностей в линзах и они достаточно велики, с использованием разработанного алгоритма можно улучшить согласование промежутка, варьируя те параметры системы, которые легко реализовать. Так, в частности, были проделаны численные расчеты согласования с помощью варьирования градиентов линз ("линейное" согласование)  $G_2, G_3, G'_2, G'_3$  ( $G'_2, G'_3$  — градиенты линз, симметричных линзам  $F_2, F_3$ ). Набег фаз для "линейно" согласованного промежутка в зависимости от эмиттанса пучка для додекаполюльной нелинейности в линзах в 1% показан на рис.4.

Однако наилучшее согласование, как показали численные расчеты, дает так называемое "нелинейное" согласование, которое достигается путем введения в структуру промежутка нелинейных корректирующих элементов. Набеги фаз для "нелинейно" согласованного промежутка в зависимости от эмиттанса пучка приведены на рис.5. Из рис.4,5 видно, что "нелинейное" согласование примерно на порядок уменьшает вызванный нелинейностями в линзах набег фаз на проме-

## 5. Выводы

1. Развитый метод оказался эффективным для решения описанной краевой задачи транспортировки заряженных частиц и позволяет подобрать параметры системы и произвести расстановку элементов системы по заданным начальному и конечному положениям и направлениям пучка в пространстве и одновременно с этим оценить влияние допусков на установку элементов системы.

2. Решены две конкретные физические задачи, относящиеся к синхрофазотрону ОИЯИ:

а) найдены параметры системы транспортировки протонов при быстром выводе пучка и произведена оценка допусков на точность установки магнитов в системе.

б) сделан численный расчет длинного согласованного промежутка сверхпроводящего синхротрона на 1.5 ГэВ с учетом нелинейных aberrаций в квадрупольных линзах. Полученные расчеты показали, что в согласованных промежутках нелинейные aberrации в линзах вызывают заметное рассогласование. Для устранения этого эффекта наиболее оптимальным является применение соответствующих корректирующих нелинейных элементов.

3. Дальнейшим развитием данной методики применительно к расчету описываемых систем транспортировки может быть оптимальный выбор параметров системы с учетом не только направления пучка, но и размеров "пятна" пучка.



Таблица I.

$d_1$	$d_2$	$B_1$	$B_2$	$\gamma$	$\operatorname{tg} \alpha$
55	77	-100	-99	143,4899	0,2573
55	77	-99	-99	143,314	0,2569
55	77	-99	-100	143,364	0,2573
77	77	-99	-99	144,373	0,2610
77	79	-99	-99	143,653	0,260

Таблица II.

$\gamma_1$	$\gamma_2$	$B_1$	$B_2$	$Z$	$\operatorname{tg} \alpha_1$	$\gamma$	$\operatorname{tg} \alpha$
0,169	0,129	-100	-100	1,6764	0,003616	143,866	0,25858
0,159	0,209	-100	-100	1,715	0,003809	143,192	0,25513
0,164	0,209	-100	-100	1,69704	0,00373	143,437	0,2558
0,159	0,214	-100	-100	1,714	0,00379	143,287	0,266

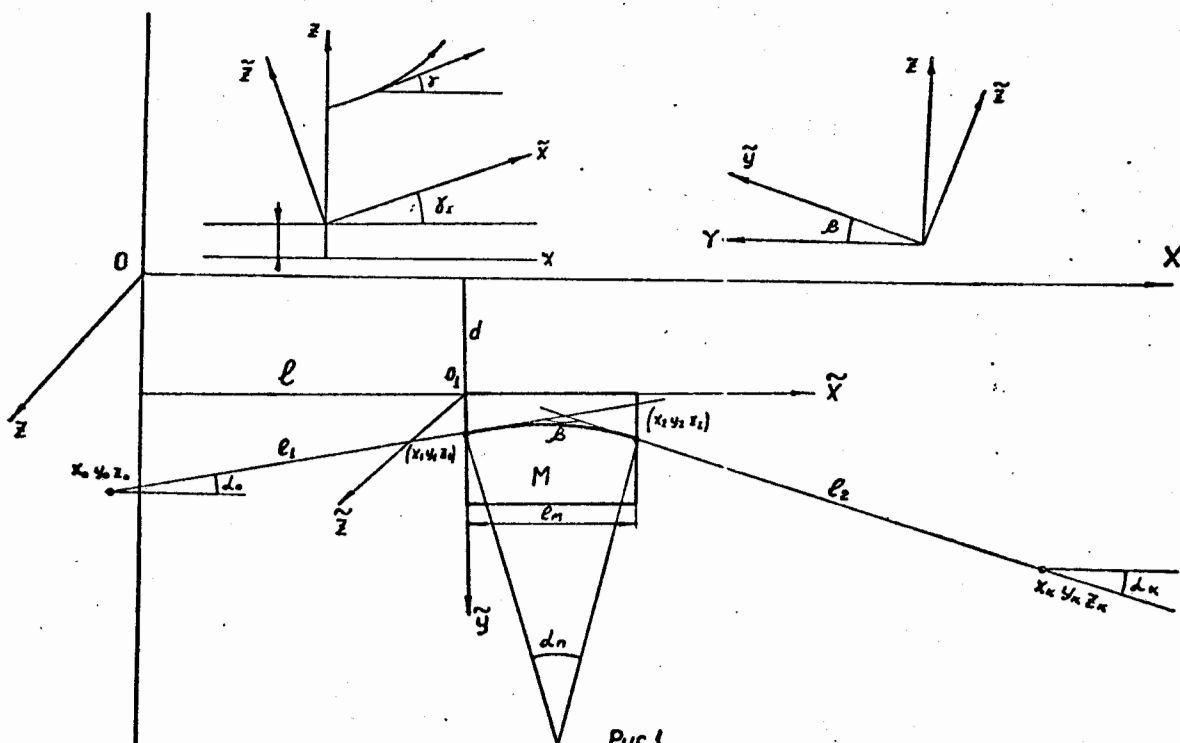


Рис 1

Модель системы транспортировки из одного поворотного носителя М с выбранными системами координат.

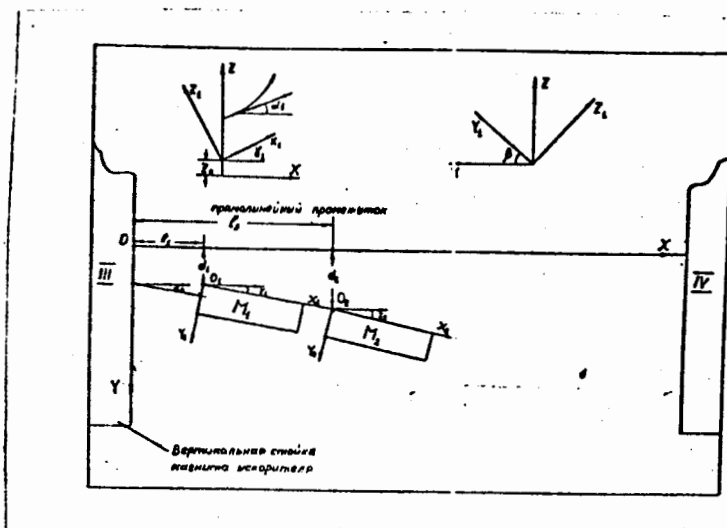


Рис.2. Схема системы транспортировки протонов при быстром выводе пучка на синхрофазотроне ЛВЭ.

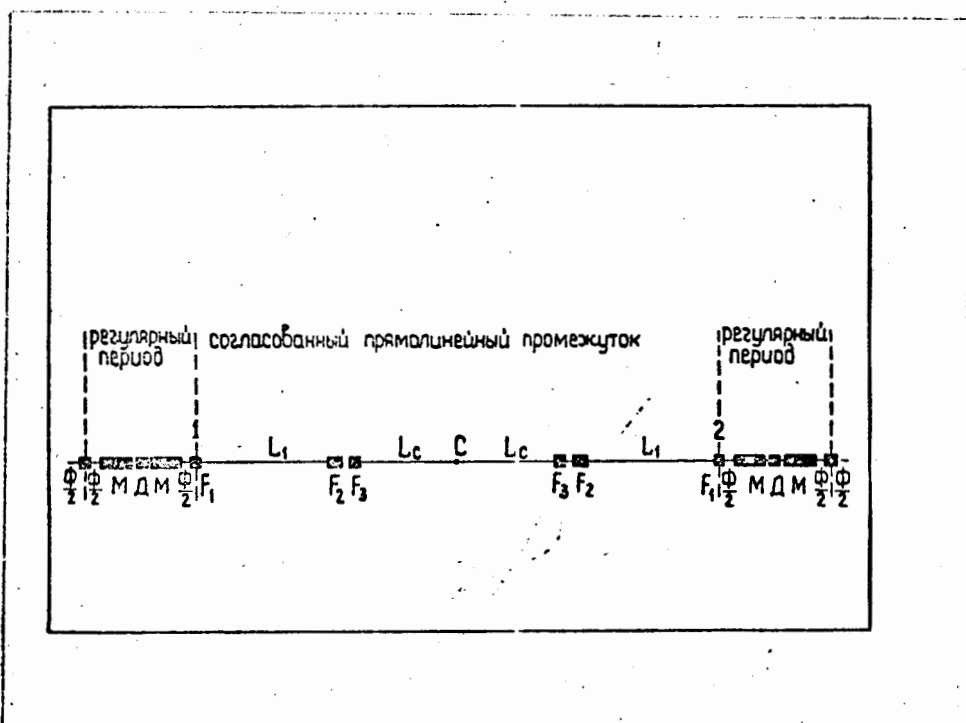


Рис.3. Структура "невидимого" промежутка.

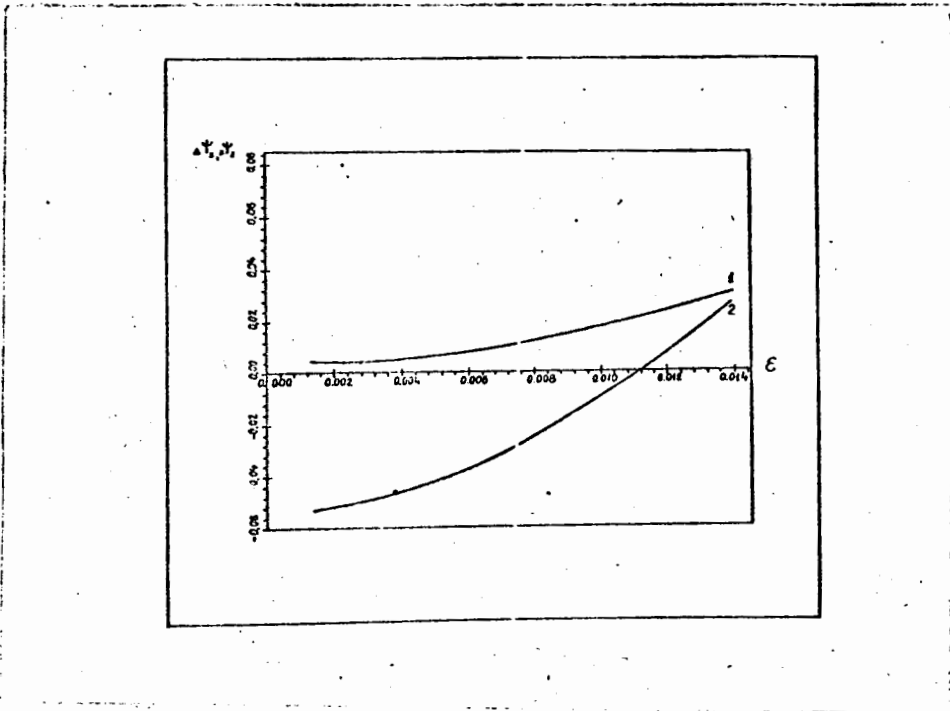


Рис. 4. Зависимость набега фаз  $\Delta\psi_x(1)$  и  $\Delta\psi_z(2)$  от величины эмиттанса пучка для "линейного" согласования.

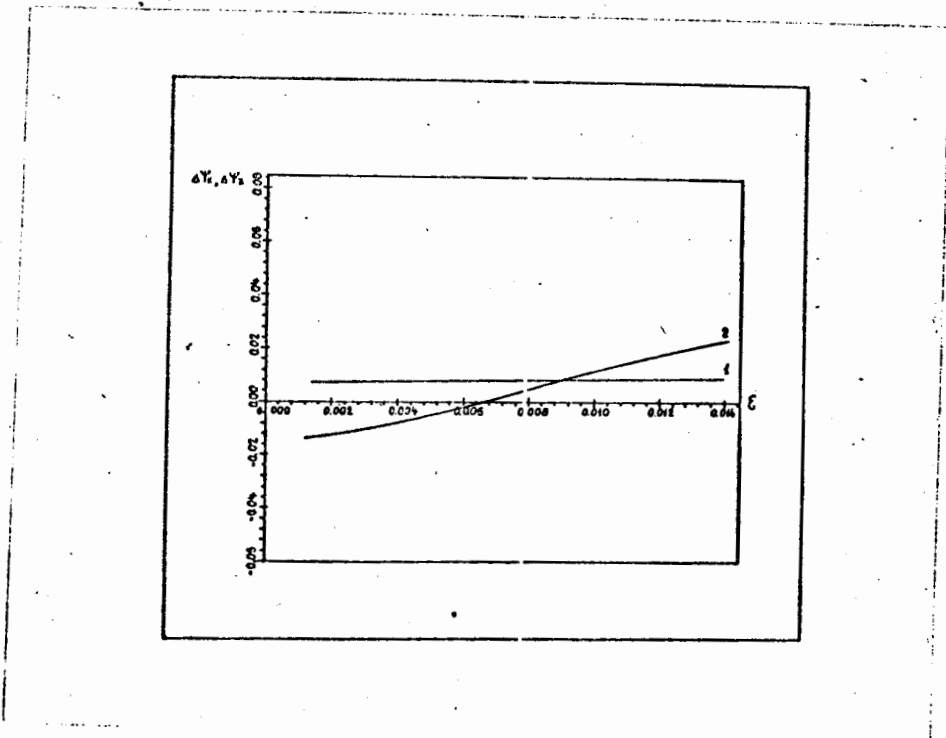


Рис. 5. Зависимость набега фаз  $\Delta\psi_x(1)$  и  $\Delta\psi_z(2)$  от величины эмиттанса пучка для "линейного" согласования.

Литература

1. Андрианов С.Н., Дымников А.Д. и др. Совещание по программированию и математическим методам решения физических задач. ДЮ, II-II264, Дубна, 1978.
2. Жидков Е.П., Кулакова Е.М., Полякова Р.В. и др. Р9-6430, Дубна ОИЯИ, 1972.
3. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. ЭЧАЯ, 4, в. I, 1973.
4. Гавурин М.К. Изв. ВУЗов. Математика. 5, 18, 1958.
5. Жидков Е.П., Макаренко Г.И. ДАН СССР, 187, 723, 1969.
6. Штеффен К. Оптика пучков высокой энергии. Москва, изд-во "Мир" 1969.
7. Жидков Е.П., Рыльцева Т.В., Феоктистов Б.В. ЖВМ и МФ АН СССР, 10, 5. II99 (1970).
8. Жидков Е.П., Пузынин И.В. ЖВМ и МФ АН СССР, 7, 5, 1086 (1967).