

2088/92

+

Андреев В.В., Юдин И.П.

БЗ-1-92-31



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

3450

БЗ-1-92-31

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 1992

# ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория сверхвысоких энергий

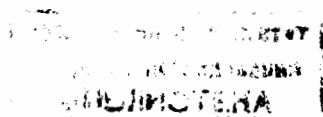
Депонированное сообщение ОИЯИ БЗ-1-92-31

В. В. Андреев, И. П. Юдин

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНЫХ МАТРИЦ  
ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ  
ПРОМЕЖУТКА УСКОРЕНИЯ (ЗАМЕДЛЕНИЯ)  
И СОЛЕНОИДАЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ ЛИНЗЫ

22 01 92

ДУБНА, 1992



# Построение полных матриц линейных преобразований промежутка ускорения (замедления) и соленоидальной магнитной линзы

В. В. Андреев, И. П. Юдин

Данная работа посвящена одному из важных вопросов, касающихся работы произвольной ускоряющей установки, а именно, вопросу о формировании необходимых параметров инжектируемого в установку пучка. В сущности, работа продолжает цикл исследований, связанных с проблемой инъекции пучка в ускоритель, долгое время проводимые в ЛВЭ ОИЯИ [1-3]. Как показала длительная практика, существенное улучшение параметров пучка в процессе ускорения - достаточно сложная и трудоемкая работа.

Здесь, на основе линейной оптической модели предпринята попытка описать динамику пучка, начиная с самого его формирования, определить его начальные и конечные параметры.

## 1. Общее устройство форинжектора.

### Линейный модельный потенциал.

Довольно часто [1,2], в качестве устройства, формирующего пучок, используют ионный источник типа "Дуоплазматрон", который может обеспечить получение пучков тяжелых ионов или электронов с зарядом  $Z=1-7$  и током 10-50 мА при нормализованном эмиттансе  $\epsilon_n = 1 \cdot \pi \cdot \text{mm} \cdot \text{mrad}$  [4].

В рамках данной работы мы не будем подробно останавливаться на описании конструкции источника указанного типа, отметим лишь, что обычно он состоит из катода, вытягивающего и фокусирующего (анода) электродов. Затем, сформированный системой электродов, пучок

предварительно ускоряется, например, линейным ускорителем до энергии  $\Phi_0 \cdot Z$  МэВ, где  $\Phi_0$  - рабочий потенциал  $\sim 0,5-0,7$  МэВ.

Модельное распределение потенциала  $\Phi(s)$  вблизи оси форинжектора будет следующим. Для формирования пучка положительно заряженных частиц  $\Phi(s)$  падает от значения  $\Phi_0$  на катоде до значения  $\Phi_k = \kappa \Phi_0$  ( $\kappa < 1$ ) на вытягивающем электроде, плавно затем возрастая до  $\sim \Phi_0$  на фокусирующем электроде. Далее, в линейном ускорителе  $\Phi(s)$  падает до значения  $\Phi_{II}$ , которое зависит от типа источника и не превышает величины  $\sim 100$  В [5]. Примерное распределение потенциала  $\Phi(s)$  показано на рис. 1 (пунктир).

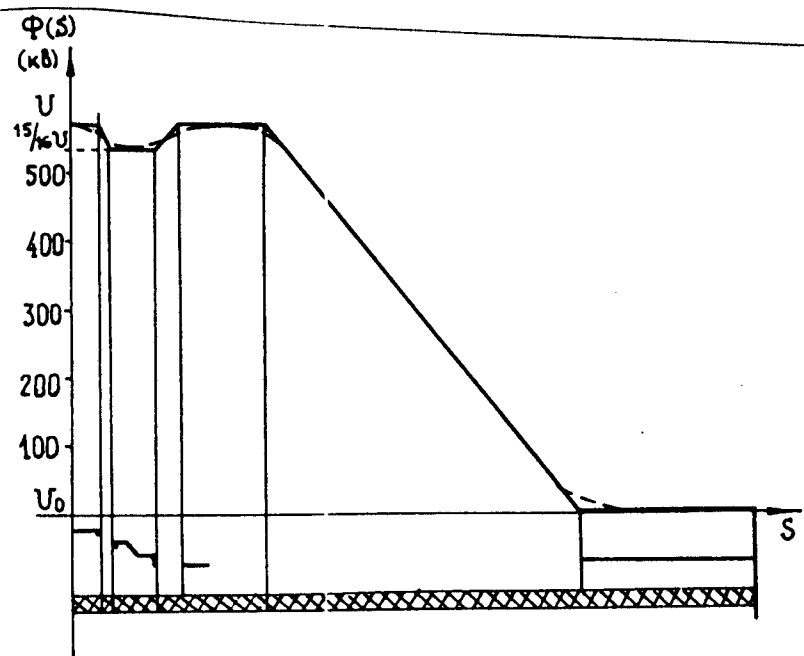


Рис. 1.

Модельный потенциал выделен сплошной линией.

Для формирования пучка отрицательно заряженных частиц распределение  $\Phi(s)$  будет противоположным.  $\Phi(s)$  возрастает от  $\Phi_{II}$  на катоде до  $\Phi_k = \kappa \Phi_{II}$  ( $\kappa > 1$ ) на вытягивающем электроде. Начиная со значения  $\Phi_{II}$  на фокусирующем электроде, потенциал растет в ускоряющей трубке линейного ускорителя до значения  $\Phi_0$ . Такое распределение  $\Phi(s)$  см. в [6]. Модельное распределение потенциала нетрудно построить для форинжектора с ионным источником любого типа. Оно будет состоять из некоторого числа линейных участков  $\Phi(s) = \text{const}$ , соединенных между собой отрезками прямых вида

$$\Phi(s) = \Phi_0 \cdot \left(1 + \frac{\Phi_k / \Phi_0 - 1}{\ell} \cdot s\right), \quad (1.1)$$

где  $\Phi_0$  и  $\Phi_k$  - начальный и конечный потенциалы,  $\ell$  - длина участка действия потенциала.

## 2. Расчет параметров пучка частиц при его движении в модельном поле форинжектора.

Уравнение для плоской траектории  $r(s)$  частицы ( $q$ ) в электростатическом поле с потенциалом  $\Phi(s)$  вблизи оси в линейном приближении запишется так [7]:

$$\text{Sign}(q) \cdot r'' - \frac{\Phi'}{2\Phi} \cdot r' - \frac{\Phi''}{4\Phi} \cdot r = 0. \quad (2.1)$$

Введем по аналогии с оптикой [8] показатель преломления среды для протонов  $n = \sqrt{\Phi_0 / \Phi_k}$  (для электронов  $n = \sqrt{\Phi_k / \Phi_0}$ ). Найдем решение уравнения (2.1) с потенциалом (1.1):

$$\left\{ \begin{aligned} r_1(s) &= r_0 + 2r_0' \cdot \frac{\ell}{n^2 - 1} [\sqrt{1 + (n^2 - 1) \cdot s/\ell} - 1], \end{aligned} \right. \quad (2.2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} r_1'(s) &= \frac{r_0'}{\sqrt{1 + (n^2 - 1) \cdot s/\ell}} \end{aligned} \right., \quad (2.3)$$

где  $r_0 = r(s=0)$ ,  $r_0' = r'(s=0)$ , - начальные параметры пучка. Решения (2.2)-(2.3) отвечают значению  $n > 1$ . При  $n < 1$  решения (2.1) следующие:

$$\left\{ \begin{aligned} r_2(s) &= r_0 + 2r_0' \cdot \frac{\ell}{1 - n^2} [1 - \sqrt{1 - (1 - n^2) \cdot s/\ell}], \end{aligned} \right. \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} r_2'(s) &= \frac{r_0'}{\sqrt{1 - (1 - n^2) \cdot s/\ell}} \end{aligned} \right., \quad (2.5)$$

Заметим, что решение "1" (т.е.  $r_1$  и  $r_1'$ ) отвечает ускорению ( $n > 1$ ) протонов в падающем поле (электронов - в растущем), а решение "2" - их замедлению ( $n < 1$ ). Ясно, что при этом траектория частицы не зависит от отношения

$\frac{q}{m}$ . Если  $s/l \ll 1$ , то решения "1-2" дадут в разложении

$$r_{1,2}(s) = r_0 + r'_0 \cdot s \quad (2.6)$$

что совпадает с решениями в случае отсутствия градиента потенциала ( $n=1$ ). При  $s=l$

$$\begin{cases} r_{1,2}(l) = r_0 + \frac{2l}{n+1} \cdot r'_0 & (2.7) \\ r'_{1,2}(l) = r'_0/n & (2.8) \end{cases}$$

Если градиент потенциала велик ( $n \gg 1$ ), то  $r_1(s) \rightarrow r_0$  (при  $r'_1(s) \rightarrow 0$ ), а  $r_2(s) \rightarrow \infty$  ( $r'_2(s) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ), что говорит о выходе за пределы приближения. Общая картина поведения решений "1" и "2" представлена на рис. 2.

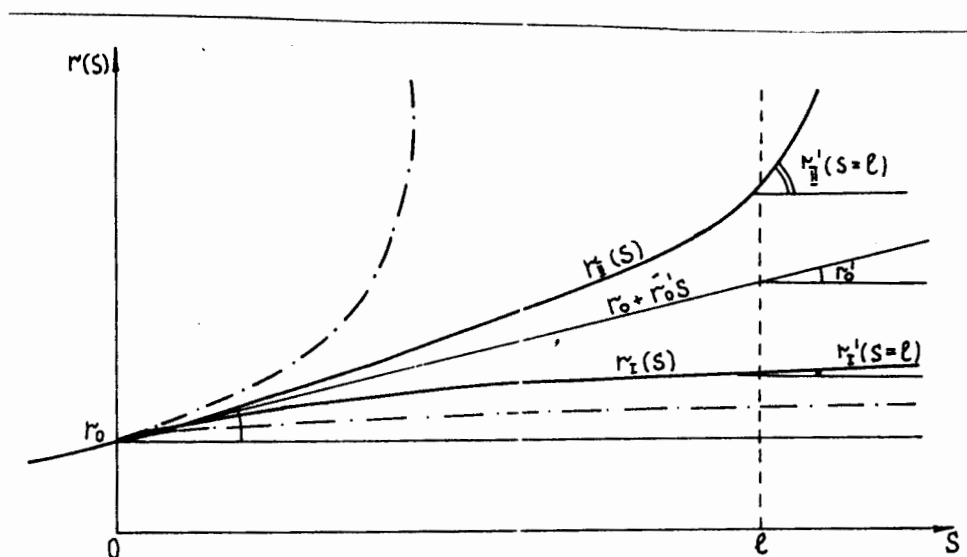


Рис. 2.

Заметим, что такое рассмотрение будет неполным, так как существует необходимость учета краевых эффектов в точках излома потенциала. Для этого сделаем очевидное предположение [7]: в некоторой  $\Delta s$  - окрестности точки излома  $s_0$  ( $\Delta s \rightarrow 0$ ) потенциал  $\Phi(s)$  и координата  $r(s)$  частицы постоянны. Тогда вычислим интеграл ( см. (2.1) для  $\text{sign}(q) < 0$ )

$$\int_{s_0 - \Delta s}^{s_0 + \Delta s} r'' ds = \int_{s_0 - \Delta s}^{s_0 + \Delta s} \left[ \frac{\Phi''}{4\Phi} r - \frac{\Phi'}{2\Phi} r' \right] ds$$

Интегрирование дает:

$$r'(s_0 + \Delta s) - r'(s_0 - \Delta s) = \frac{\Phi'(s_0 - \Delta s) - \Phi'(s_0 + \Delta s)}{4\Phi(s_0)} \quad (2.9)$$

Для не очень больших  $n$  определим фокусирующий и дефокусирующий эффекты в точках излома потенциала ( $n > 1$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} r'_1 = r'_0 - (n^2 - 1) \cdot \frac{r_0}{4l} \end{array} \right. , \quad (2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r'_3 = r'_2 + \left( \frac{n^2 - 1}{n^2} \right) \cdot \frac{r_2}{4l} \end{array} \right. , \quad (2.11)$$

где фокусирующий эффект достигается в точке  $s=0$ , а дефокусирующий - в точке  $s=l$  ( $r_2 = r(D)$ ,  $r'_2 = r'(D)$ ). При замедлении частиц ( $n < 1$ ), учитывая знаки в (2.10)-(2.11), получим дефокусирующий и фокусирующий эффекты в точках 0 и  $l$

$$\left\{ \begin{array}{l} r'_1 = r'_0 + (1 - n^2) \cdot \frac{r_0}{4l} \end{array} \right. , \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r'_3 = r'_2 - \left( \frac{1 - n^2}{n^2} \right) \cdot \frac{r_2}{4l} \end{array} \right. . \quad (2.13)$$

Если же  $n \gg 1$ , то определение этих эффектов связано с применением операции  $\arctg$  в (2.10)-(2.13), например:

$$\left\{ \begin{array}{l} r'_1 = r'_0 - \arctg \left[ (n^2 - 1) \cdot \frac{r_0}{4l} \right] \end{array} \right. , \quad (2.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r'_3 = r'_2 + \arctg \left[ \left( \frac{n^2 - 1}{n^2} \right) \cdot \frac{r_2}{4l} \right] \end{array} \right. , \quad (2.15)$$

Ясно, что правый член уравнения (2.9) равен отношению изображения на линзе ( $s=s_0$ ) к фокусному расстоянию  $f$  такой линзы, оцениваемому обычно по формуле [9,10]

$$f = \frac{4W}{E} , \quad (2.16)$$

где  $W$  - начальная энергия частицы,  $E$  - ускоряющее поле.

Из (2.10)-(2.15) видно, что фокусирующий эффект всегда больше, чем дефокусирующий. Это подтверждает тот факт, что нельзя создать рассеивающей иммерсионной линзы [7]. Эффекты сравнимы при  $n \approx 1$ .

Формулы (2.10)-(2.11) определяют тонкие линзы с фокусными



расстояниями  $f_1 = \frac{4\ell}{n^2-1}$  и  $f_2 = \frac{4\ell \cdot n^2}{n^2-1}$  ( $n > 1$ ), а из (2.12)–(2.13) следует, что  $f_1 = \frac{4\ell}{1-n^2}$  и  $f_2 = \frac{4\ell \cdot n^2}{1-n^2}$  ( $n < 1$ ), расположенных в плоскостях  $s=0$  и  $s=\ell$ .

По аналогии с оптикой [11] найдем радиусы кривизны этих линз (т. е. радиусы кривизны эквипотенциальных поверхностей)

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{n-1}{n} \cdot f_1, \quad R_2 = (n-1) \cdot f_2 \quad (n > 1) \end{array} \right. , \quad (2.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = (1-n) \cdot f_1, \quad R_2 = \frac{1-n}{n} \cdot f_2 \quad (n < 1) \end{array} \right. , \quad (2.18)$$

Кроме того, из очевидных соображений, радиус кривизны эквипотенциалей связан с производными потенциала  $\Phi(s)$  как

$$R = \frac{2\Phi'}{\Phi''} \quad (2.19)$$

Эти соотношения будут необходимы при составлении полной матрицы линейного преобразования, создаваемого ускоряющим (замедляющим) промежутком длины  $\ell$  с показателем преломления  $n$ . Ясно, что подобные матрицы можно построить лишь для таких параметров  $n$  и  $\ell$ , для которых выражения под знаком  $\arctg$  в (2.14)–(2.15) не больше 1.

### 3. Полная матрица линейного преобразования ускоряющего (замедляющего) промежутка.

Приведенные в п. 2 соотношения практически решают вопрос о составлении полной матрицы перехода промежутка ускорения (замедления). Рассмотрим лишь дисперсию  $\frac{\Delta p}{p}$ . В результате ускорения (замедления) импульс частицы меняется в  $n$  раз. Поэтому соотношение  $\frac{\Delta p}{p}$  также изменится в  $n$  раз, т. к.  $\Delta \vec{p}$ , оставаясь все время ортогональным  $\vec{E}$ , не меняется (за исключением точек излома потенциала  $\Phi(s)$ ). Учитывая (2.7) и (2.8), получаем матрицу линейного



преобразования ускоряющего (замедляющего) промежутка в виде:

$$M_2 = M_{2x} = M_{2y} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2\ell}{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\text{с } \det \| M_2 \| = \frac{1}{n^2}.$$

Составляющие напряженности электрического поля в параксиальном приближении [7]:

$$\begin{cases} E_s = -\Phi'(s) & , & (3.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_r = \frac{r}{2} \cdot \Phi''(s) & . & (3.3) \end{cases}$$

$\Phi''(s) \equiv 0$  во всех точках промежутка  $(0; D)$ .

Решая уравнение движения частицы ( $q$ ) в поле  $E_r$  ( $m\dot{V}_r = -qE_r$ ) получим для поперечной скорости  $V_r$  следующее выражение:

$$V_r = \sqrt{\frac{|q| \cdot |\Phi''|}{2m}} \cdot r \quad , \quad (3.4)$$

Аналогично получим выражение для продольной скорости

$$V_s = \sqrt{\frac{2|q| \cdot \Phi}{m}}$$

Изменение дисперсии в точках изломов потенциала обязано существованию в них поперечной составляющей скорости  $V_r$

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{V_r}{V_s} = \sqrt{|\Phi''|/|\Phi|} \cdot \frac{r}{2} \quad . \quad (3.5)$$

Учитывая далее (2.12)–(2.19) определим изменения дисперсии в краевых точках (для любых не очень больших  $n$ )

$$\begin{cases} \Delta_1 = (n+1) \cdot \sqrt{2n \cdot |n-1|} \cdot \frac{r_1}{4\ell} & , & (3.6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_2 = \frac{n+1}{n^2} \cdot \sqrt{2|n-1|} \cdot \frac{r_2}{4\ell} & , & (3.7) \end{cases}$$

Таким образом, полная матрица  $M$  линейного преобразования ускоряющего ( $n > 1$ ) промежутка длины  $\ell$  определяется из

последовательного умножения вектор-столбца  $\begin{pmatrix} r \\ r' \\ \Delta p \\ p \end{pmatrix}$  на матрицы  $M_1, M_2$  и  $M_3$  ( $M = M_3 \otimes M_2 \otimes M_1$ ), где

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{n^2-1}{4\ell} & 1 & 0 \\ \frac{n+1}{2\ell} \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n^2-1}{4\ell n^2} & 1 & 0 \\ \frac{n+1}{2\ell \cdot n} \sqrt{\frac{n-1}{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

а  $M_2$  см. (3.1).

Окончательно, искомая матрица представима в виде

$$M_{x_y} = M = \begin{pmatrix} \frac{3-n}{2} & \frac{2\ell}{n+1} & 0 \\ \frac{n+1}{2\ell} \sqrt{\frac{n-1}{2n}} \left( -\frac{3(n-1)}{2n} \sqrt{\frac{n-1}{2n}} \right) & \frac{\ell}{n} \left( 1 + \frac{n-1}{2n} \right) & 0 \\ \frac{n+1}{n2\ell} \sqrt{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{3-n}{2n} \right) & \frac{\ell}{n} \sqrt{\frac{n-1}{2}} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Ясно, что при  $n=1$  найденная матрица является матрицей перехода промежутка дрейфа длины  $\ell$ :

$$M = M_x = M_y = \begin{pmatrix} 1 & \ell & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В случае замедления частиц ( $n < 1$ ), матрицы  $M_1$  и  $M_3$  таковы:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1-n^2}{4\ell} & 1 & 0 \\ \frac{n+1}{2\ell} \sqrt{\frac{n(1-n)}{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1-n^2}{4\ell n^2} & 1 & 0 \\ \frac{n+1}{2\ell \cdot n} \sqrt{\frac{1-n}{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

тогда

$$M_{x_y} = M = \begin{pmatrix} \frac{3-n}{2} & \frac{2\ell}{n+1} & 0 \\ \frac{n+1}{2\ell} \sqrt{\frac{1-n}{2n}} \left( \frac{3(1-n)}{2n} \sqrt{\frac{1-n}{2n}} \right) & \frac{\ell}{n} \left( 1 - \frac{1-n}{2n} \right) & 0 \\ \frac{n+1}{n2\ell} \sqrt{\frac{1-n}{2}} \left( \frac{3-n}{2n} \right) & \frac{\ell}{n} \sqrt{\frac{1-n}{2}} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

#### 4. ФОРМИРОВАНИЕ ПУЧКА ЧАСТИЦ. ЭМИТТАНС И ТОК ПУЧКА.

Приведенные выше формулы позволяют сделать ряд замечаний насчет начальных параметров формируемого пучка. Обычно, плазменная граница формируется в так называемом экспандере. В пределах рассматриваемой модели считалось, что она находится вблизи границы экспандера. Кроме того, известно, что плазменная граница - эквипотенциальная поверхность. Пренебрегая колебаниями границы вокруг положения равновесия, легко определим радиус ее кривизны

$$R_p = \frac{R_3}{\sin(\alpha_m)}, \quad (4.1)$$

где  $\alpha_m = \arctg[(n^2-1) \cdot \frac{R_3}{4\ell}]$ ,  $R_3$  - радиус экспандера,  $\ell$  - расстояние от экспандера до вытягивающего электрода,  $n$  - показатель преломления этого промежутка. Ясно, что  $\alpha_m$  (угол вылета крайней частицы) является углом поворота фазового портрета пучка. Так как обычно  $\alpha_m$  не велик, можно считать, что

$$R_p \approx \frac{4\ell}{n^2-1}. \quad (4.2)$$

Исходя из известного соотношения, определим значение эмиттанса пучка по формуле

$$\varepsilon = \varepsilon_n \cdot \sqrt{E_0/2W_T} \cdot \sqrt{1-2W_T/E_0}, \quad (4.3)$$

где  $E_0 = m_q c^2$ ,  $W_T = \frac{mV^2}{2}$  - средняя величина кинетической энергии частиц плазмы. Следуя [12], нормализованный эмиттанс формируемого пучка при термическом равновесии плазмы с температурой  $T$  следующий

$$\varepsilon_n = 2 R_p \cdot \sqrt{kT/E_0}, \quad (4.4)$$

или учитывая [8] то, что  $W_T = \frac{3}{2}kT$

$$\varepsilon_n = 2 R_p \cdot \sqrt{2W_T/3E_0}. \quad (4.5)$$

Подставим (4.5), (4.2) в (4.3) и получим

$$\varepsilon \approx \frac{8\ell}{\sqrt{3}(n^2-1)} \cdot \sqrt{1-3kT/E_0}. \quad (4.6)$$

Кроме того, энергию  $W_T$  можно представить в виде  $W_T = q\Phi_{II}$ , тогда

$$\varepsilon \approx \frac{4\sqrt{2}l}{n^2-1} \cdot \sqrt{1-2q\Phi_{II}/E_0} \quad (4.7)$$

При определении начальных параметров частиц в пучке (в фазовой плоскости) необходимо учесть кривизну плазменной границы.

Плотность тока частиц в пучке ограничивается известным законом Чайлда-Ленгмюра [12] (система СИ):

$$j = 1.67 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{q/E_0} \cdot \frac{U^{3/2}}{l^2}, \quad (4.8)$$

где  $U = \Phi_{\text{Э}} - \Phi_{\text{ВЭ}}$ , разность потенциалов между экспандером (Э) и вытягивающим электродом (ВЭ) (вытягивающее напряжение). Представим  $U$  в виде (см. п. 1)

$$U = \Phi_{\text{Э}} \cdot \frac{n^2-1}{n^2} \quad (4.9)$$

Тогда предельное значение тока пучка, получаемое посредством интегрирования по плазменной поверхности выражения (4.8), таково [12]

$$I = 0.52 \cdot 10^{-2} \sqrt{q/E_0} \cdot (R_p/D)^2 \cdot U^{3/2} \quad (4.10)$$

Учитывая (4.2) и (4.9), ток пучка

$$I \approx 0.083 \cdot \sqrt{\frac{q}{E_0(n^2-1)}} \cdot \frac{\Phi_{\text{Э}}^{3/2}}{n^3} \quad (4.11)$$

Приведенный алгоритм легко программируется для любого количества ускоряющих (замедляющих) промежутков.

## 5. Построение матрицы перехода соленоидальной магнитной линзы

Движение заряженной частицы с зарядом  $q$  и массой  $m$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  определяется, как известно, силой Лоренца

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = -q \cdot [ \vec{v} \otimes \vec{B} ] , \quad (5.1)$$

где  $\vec{v}$  - скорость частицы,  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ ,  $c$  - скорость света.

Выберем правую систему координат  $XYZ$  так, чтобы ось  $OY$  указывала в направлении движения частицы. Тогда, расписывая (1) в этой системе, после несложных преобразований найдем [13]

$$\begin{cases} x'' = \frac{q}{\gamma p} \cdot \sqrt{1+x'^2+z'^2} \cdot [ (1+x'^2)B_z - x'z'B_x - z'B_y ] , \\ z'' = \frac{q}{\gamma p} \cdot \sqrt{1+x'^2+z'^2} \cdot [ x'z'B_z - (1+z'^2)B_x + x'B_y ] , \end{cases} \quad (5.2)$$

где  $p = m\beta c$ ,  $\beta = v/c$ . Здесь учтено, что модуль скорости частицы в магнитном поле сохраняется.

В линейном приближении поле соленоида можно считать следующим

$$\vec{B} = (0, B, 0) , \quad (5.3)$$

где  $B = \mu_0 N I$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м,  $N$  - число витков на единицу длины,  $I$  - ток. Подставляя (3) в (2), получим

$$\begin{cases} x'' = - \frac{qB}{\gamma p} \cdot \sqrt{1+x'^2+z'^2} \cdot z' , \\ z'' = \frac{qB}{\gamma p} \cdot \sqrt{1+x'^2+z'^2} \cdot x' , \end{cases} \quad (5.4)$$

Учитывая то, что  $v = v_y \gg v_{x,z}$ , легко приходим к дифференциальным уравнениям траекторий параксиальных частиц в плоскостях  $XY$  и  $YX$

$$\begin{cases} x'' + k^2 x = 0 , \\ z'' + k^2 z = 0 , \end{cases} \quad (5.5)$$

где  $k^2 = \left(\frac{\omega_1}{\beta c}\right)^2$ ,  $\omega_1 = \frac{qB}{2\gamma m}$  - ларморова частота.

Тогда матрица перехода  $M$  соленоида длины  $l$  такова

$$M = M_x = M_z = \begin{bmatrix} \cos kl & 1/k \cdot \sin kl & 0 \\ -k \cdot \sin kl & \cos kl & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Фокусное расстояние такой линзы нетрудно определить, оно равно

$$f^{-1} = k \cdot \sin kl. \quad (5.7)$$

В отличие от квадрупольных линз, соленоид является фокусирующей линзой в обеих плоскостях.

Реальное поле на оси соленоида имеет "колоколообразный" вид [14]

$$B_y = B(y) = \frac{B_0}{1 + (2y/l)^2}. \quad (5.8)$$

В рамках "прямоугольной" модели [15] элемента определим для такого распределения поля эффективную длину соленоида из выражения

$$l_{\text{eff}} B_0 = \int_{-\infty}^{\infty} B(y) dy, \quad (5.9)$$

откуда

$$l_{\text{eff}} = \frac{\pi}{2} l. \quad (5.10)$$

Подставляя (5.10) в (5.6), окончательно получим матрицу перехода в виде

$$M = M_x = M_z = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} kl & 1/k \cdot \sin \frac{\pi}{2} kl & 0 \\ -k \cdot \sin \frac{\pi}{2} kl & \cos \frac{\pi}{2} kl & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Антонов Ю. Н. и др. 600-киловольтный инжектор протонов для линейного ускорителя. Препринт ОИЯИ, Р-346, Дубна, 1959.
2. Матюшевский Е. А., Шелаев И. А., Юдин И. П. Инжекционный канал установки СПИН. Выбор конструкции и параметры. Препринт ОИЯИ, Р9-83-817, Дубна, 1983.
3. Андреев В. В. и др. Оценка потерь интенсивности пучка протонов в инжекционном канале синхротрона СПИН. Препринт ОИЯИ, Р9-87-763, Дубна, 1987.
4. Аброян М. А. и др. Сильноточный инжектор. В кн.: Материалы Международной конференции по ускорителям, "Наука", М., 1963.
5. M. Von Ardenne. Tabellen der Elektronenphysik, Ionenphysik und Ultramikroskopie. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1957, B1, s. 544.
6. Фор Ж. Абберации пространственного заряда. В кн.: Труды второго Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Т1, "Наука", М., 1972.
7. Кельман В. М., Явор С. Я. Электронная оптика. АН СССР, 1959.
8. Арцимович Л. А., Лукьянов С. Ю. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. "Наука", М., 1972.
9. L. McKibern. LADC Report, N604, 1949.
10. M. Elkind. Rev. Scient. Instrum., 24, 129, 1953.
11. Основные формулы физики. Под редакцией Д. Мензела. "Иностранная литература", М., 1957.
12. M. Reiser. IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-32, Oct. 1985.
13. Бенфорд А. Транспортировка пучков заряженных частиц. "Атомиздат", М., 1969.
14. Котов В. И., Миллер В. В. Фокусировка и разделение по массам частиц высоких энергий. "Атомиздат", М., 1969.
15. P. Loschialpo et al. J. Appl. Phys. 57(1), 1985.