

Бонч-Осмоловский А.Г.

С36

Б-817

Б2-9-6785.

+



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б2-9-6785

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 1972

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Отдел новых методов ускорения

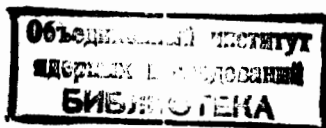
А.Г.Бонч-Осмоловский

С36
Б-817

Б2-9-6785

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТОКОВ БУКЭ ПО ТОНКИМ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ
ПОВЕРХНОСТЯМ.

31 октября 72



г.Дубна , 1972 год.

3443 с.р.

Хорошо известно применение металлических поверхностей в качестве магнитных экранов, в том числе и при экранировании магнитного поля достаточно высокой частоты. Однако, подчас возникает обратная задача: металл, находящийся в сфере действия переменного магнитного поля, должен минимально исказить внешнее поле. Помимо изменения величины и пространственного распределения внешнего магнитного поля токи Фуко, индуцируемые в металле, приводят к значительным потерям энергии на Джоулево тепло, а также к возникновению ^{ро}пандемоторных напряжений в металлических поверхностях.

Для оценки роли этих эффектов необходимо знать распределение токов Фуко на металлических поверхностях различной конфигурации. Такого рода вопросы неоднократно рассматривались в литературе, упомянем в качестве примера [1-3]. Общего математического метода, пригодного для нахождения распределения токов Фуко по металлу, не существует, поэтому обычно производятся оценки на основании идеализированных моделей (бесконечно длинные цилиндры, неограниченные плоскости) или решаются конкретные задачи, в основном численными методами.

Определение величины и распределения токов Фуко в металле относится к классу задач теории скин-эффекта, которые, как известно, решаются в очень редких случаях. Дело сводится, в сущности, к решению уравнения в частных производных вида

$$\Delta \vec{j} = \frac{4\pi b \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \quad (1)$$

\vec{j} - плотность тока, индуцированного в металле, в дальнейшем положим $\mu = 1$.

Для металлической поверхности произвольной формы ^{это} приводит к необходимости решать внешнюю и внутреннюю задачи электродинамики и сшивать решения на границе металла. Такая программа ⁺ выполнима в большинстве случаев лишь численными методами.

Однако, в дальнейшем нас будет интересовать случай, в известном смысле противоположный традиционному в теории скин-эффекта и часто встречающийся на практике; именно, мы будем считать, что толщина металлической поверхности h гораздо меньше глубины скин-слоя для характерной частоты процесса :

$$h \ll \delta, \quad \delta = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi b \omega}}. \quad (2)$$

Тогда можно ввести физическое предположение, которое приводит к появлению малого параметра : магнитный поток, создаваемый токами Фуко (поток самоиндукции), мал по сравнению с магнитным потоком индукции внешнего поля через произвольную поверхность в металле. Таким образом :

$$\epsilon = \left| \frac{\Phi_{с.и.}}{\Phi_{вн}} \right| \ll 1. \quad (3)$$

Здесь $\Phi_{с.и.}$ - поток самоиндукции, $\Phi_{вн}$ - поток индукции внешнего поля.

Если выполнено условие (3), то можно применить метод последовательных приближений, считая, что в нулевом приближении по ϵ плотность токов Фуко в металле равна

$$\vec{j}^{(0)}(\vec{x}, t) = \sigma \vec{E}_{инд}(\vec{x}, t), \quad (4)$$

где $\vec{E}_{\text{инд}}$ - напряженность электрического поля индукции, наведенной на контуре, ограничивающем выделенную поверхность :

$$\vec{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{\Phi}_{\text{вн}} \quad (5)$$

По найденной плотности тока в нулевом приближении можно определить магнитное поле в первом приближении (поправку первого порядка по \mathcal{E} к внешнему магнитному полю), а затем поправку первого порядка к току (4) и т.д. Перейдем к конкретным примерам.

1. Цилиндр конечной длины в однородном магнитном поле.

Пусть ось цилиндра длиной $2L$ параллельна внешнему полю. Внешний радиус цилиндра $R_0 \gg h$ - толщины его стенки, так что в дальнейшем R_0 будет обозначать просто радиус цилиндра.

Пусть выполнены условия (2) и (3). Ток на единицу длины цилиндра \mathcal{J} может быть найден из уравнения:

$$\mathcal{J}R = \frac{i\omega}{c} (\Phi_{\text{вн}} - \Phi_{\text{с.и.}}) \quad (6)$$

В уравнении (6) ω - циклическая частота изменения внешнего поля, $R = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{2\pi R_0}{h}$ - омическое сопротивление единицы длины цилиндра. Теперь применим метод последовательных приближений; в нулевом приближении:

$$\mathcal{J}^{(0)} = \frac{i\omega \Phi_{\text{вн}}}{cR} = \frac{iR_0 h c}{4\pi \delta^2} H_{\text{вн}} \quad (7)$$

Магнитное поле конечного по длине соленоида с однородным током на единицу длины рассчитывается по известным формулам (см. напр. [4]) и , таким образом, находится поле в первом приближении. Для иллюстрации упростим задачу, считая, что $L \gg R_0$ и применим формулы для поля на торце полубесконечного соленоида. В центральной области цилиндра магнитное поле токов Фуко будет равно

$$H_{\phi}|_{z=0} \approx 2 \frac{4\pi y^{(0)}}{2c} = \frac{4\pi y^{(0)}}{c}, \quad (8)$$

а на краю

$$H_{\phi}|_{z=L} \approx \frac{2\pi y^{(0)}}{c} \quad (9)$$

Поле первого приближения внутри цилиндра является суперпозицией H_{eH} и $H_{\phi} = \frac{4\pi y^{(0)}}{c} K(z)$, где $K(z)$ - некоторый коэффициент, меняющийся в пределах $\frac{1}{2} \leq K \leq 1$ (в данном случае длинного цилиндра). Определение вида функции $K(z)$ нетрудно выполнить, аналогичное вычисление будет проведено в следующем примере. Максимальное ослабление внешнего поля происходит в центральной области цилиндра

$$\frac{H_{eH} - H_{\phi}}{H_{eH}} \approx 1 - i \frac{R_0 h}{\delta^2}.$$

Ток на единицу длины в первом приближении равен

$$y^{(1)} \approx i \frac{R_0 h c}{4\pi \delta^2} \left[1 - i K(z) \frac{R_0 h}{\delta^2} \right] \quad (10)$$

Процедура может быть продолжена далее и теперь видно, что конкретное выражение малого параметра ε для данной задачи таково:

$$\varepsilon = \frac{R_0 h}{\delta^2} \quad (11)$$

2. Диск с отверстием в однородном магнитном поле.

Пусть металлический диск толщиной h , внешним радиусом R_1 и внутренним R_2 расположен перпендикулярно внешнему магнитному полю $\vec{H}_{eH} = H_{eH} \frac{\vec{z}}{z}$, частота изменения которого равна ω . В нулевом приближении плотность тока Фуко на радиусе r в диске равна:

$$j_{\theta}^{(0)}(r) = \sigma \varepsilon_{\text{инд}}(r) = i \frac{r \omega \sigma}{2c} H_{eH} = \frac{icr}{4\pi \delta^2} H_{eH} \quad (12)$$

Элементарный ток на радиусе r равен $dJ = h j_{\theta}^{(0)} dr$ и магнитное поле токов Фуко может быть найдено суммированием полей круговых контуров с током dJ ; например, осевое поле в точке с координатами r', z равно:

$$H_{z\varphi}(r', z) = \frac{ich H_{eH}}{2\pi \delta^2} \int_{R_2}^{R_1} r dr \frac{K(\kappa) + \frac{r^2 - r'^2 - z^2}{(r - r')^2 + z^2} E(\kappa)}{\sqrt{(r + r')^2 + z^2}} \quad (13)$$

Здесь $\kappa^2 = \frac{4rz'}{(r+r')^2 + z^2}$, $E(\kappa)$ и $K(\kappa)$ - полные эллиптические интегралы 1^{го} и 2^{го} рода.

Выражение (13) и аналогичное для H_r определяет поправку первого порядка к внешнему полю.

Нетрудно показать, что максимальное отношение $\left| \frac{H_{z\varphi}}{H_{eH}} \right|$ снова порядка ϵ в форме, аналогичной (11). Например, вблизи оси диска ($z \approx z' \approx 0$)

$$\left| \frac{H_{z\varphi}}{H_{eH}} \right| \approx \frac{1}{2} \frac{h(R_1 - R_2)}{\delta^2} \quad (14)$$

Для вычисления поправок первого порядка к плотности тока нужно вычислить поток индукции поля (13) через круговой контур радиуса R ($R_2 \leq R \leq R_1$) при $z=0$. Плотность тока в первом приближении запишем в виде:

$$j_{\theta}^{(1)}(R) = \frac{icR H_{eH}}{4\pi\delta^2} \left(1 - \frac{1}{\pi R^2 H_{eH}} \int H_{z\varphi} \Big|_{z=0} dS \right)$$

или

$$j_{\theta}^{(1)}(R) = \frac{icR H_{eH}}{4\pi\delta^2} \left\{ 1 - \frac{ich}{\pi\delta^2 R^2} \int_0^R \int_{R_2}^{R_1} \left[\frac{1}{z+z'} K(\kappa) + \frac{1}{z-z'} E(\kappa) \right] r z' dr dz' \right\} \quad (15)$$

Итак, дело сводится к вычислению интеграла

$$I = \int_0^R r dr \int_{R_2}^{R_1} \frac{z' dr'}{z'-z} \left[\kappa' K(\kappa) + E(\kappa) \right], \quad \kappa' = \frac{z'-z}{z'+z}. \quad (16)$$

Представим I в виде суммы трех интегралов следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3, \\ I_1 &= \int_0^{R_2} r dr \int_{R_2}^{R_1} \frac{z' dr'}{z'-z} (\kappa' K + E), \quad z' > z, \\ I_2 &= \int_{R_2}^R r dr \int_{R_2}^z \frac{z' dr'}{z-z'} (\kappa' K - E), \quad z' < z. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$I_3 = \int_{R_2}^R z dz \int_z^{R_1} \frac{z' dz'}{z'^2 - z^2} (\kappa' K + E), \quad z' > z \quad (17)$$

В этих интегралах применим преобразование, эквивалентные преобразованием Ландена [5] :

$$\left. \begin{aligned} K(\kappa) &= \frac{2}{1+\kappa'} K\left(\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right), \\ \kappa' K(\kappa) + E(\kappa) &= (1+\kappa') E\left(\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right), \\ \kappa' K(\kappa) - E(\kappa) &= \frac{4\kappa'}{1+\kappa'} K\left(\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right) - (1-\kappa') E\left(\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right) \end{aligned} \right\} (18)$$

Тогда после некоторых преобразований нетрудно убедиться, что I_1, I_2, I_3 будут выражаться через интегралы сходного вида; выпишем и вычислим в качестве примера I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int_{R_2}^{R_1} z'^2 dz' \int_0^{R_2} \frac{E\left(\frac{z}{z'}\right) z dz}{z'^2 - z^2} = 2 \int_{R_2}^{R_1} z'^2 dz' \left[K\left(\frac{R_2}{z'}\right) - E\left(\frac{R_2}{z'}\right) \right] = \\ &= 2 R_2^3 \int_1^{R_2/R_1} \frac{dy}{y^4} [E(y) - K(y)] = 2 R_2^3 \int_1^{R_2/R_1} \frac{E(y)}{y^3} + 6 R_2^3 \int_1^{R_2/R_1} \frac{E(y)}{y^4} dy. \end{aligned}$$

Последний интеграл табличный [5] и окончательно :

$$I_1 = -\frac{2}{3}R_2^3 + \frac{2}{3}R_1^3 \left(2\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1\right) E\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{2}{3}R_1^3 \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2}\right) K\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

(19)

Аналогично вычисляются I_2 и I_3 ; приведем окончательный результат для I :

$$I = -\frac{2}{3}R_1(R_1^2 - 2R_2^2) E\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{2}{3}R_1(R_1^2 - R_2^2) K\left(\frac{R_2}{R_1}\right) +$$

$$+ \frac{2}{3}R_2(R_2^2 - 2R_1^2) E\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{4}{3}R_2(R_2^2 - R_1^2) K\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

(20)

Если положить $R_2 = 0$ (сплошной диск) и подставить полученное выражение в формулу для плотности тока в первом приближении (20), то результат совпадет с формулой, приведенной без вывода в книге Смайта ([2], стр. 411).

Положим $f(x) = \frac{I(x)}{R_2^3}$, $x = \frac{R_2}{R_1}$. Тогда

$$j^{(1)} \frac{4\pi\delta^2}{cR_2 H_{en}} = ix + \frac{hR_2}{\pi\delta^2} \cdot \frac{f(x)}{x}. \quad (21)$$

Приведем для иллюстрации результат численного расчета тока Фуко первого порядка для случая $\frac{R_1}{R_2} = 5$ и $\frac{hR_2}{\pi\delta^2} = 0.03$ (при этом $\frac{1}{2} \frac{h}{\delta^2} (R_1 - R_2) \approx 0.2$).

На рис. по оси ординат отложены абсолютные значения первого (нулевой порядок) и второго (поправка первого порядка) слагаемых в формуле (21), по оси абсцисс x .

Автор отмечает плодотворность дискуссий с Г.А.Ивановым по вопросам, затронутым в данной работе.

А.Б.Иванов - Риль

Л И Т Е Р А Т У Р А .

1. Л.Д.Ландау , Е.М.Лифшиц.

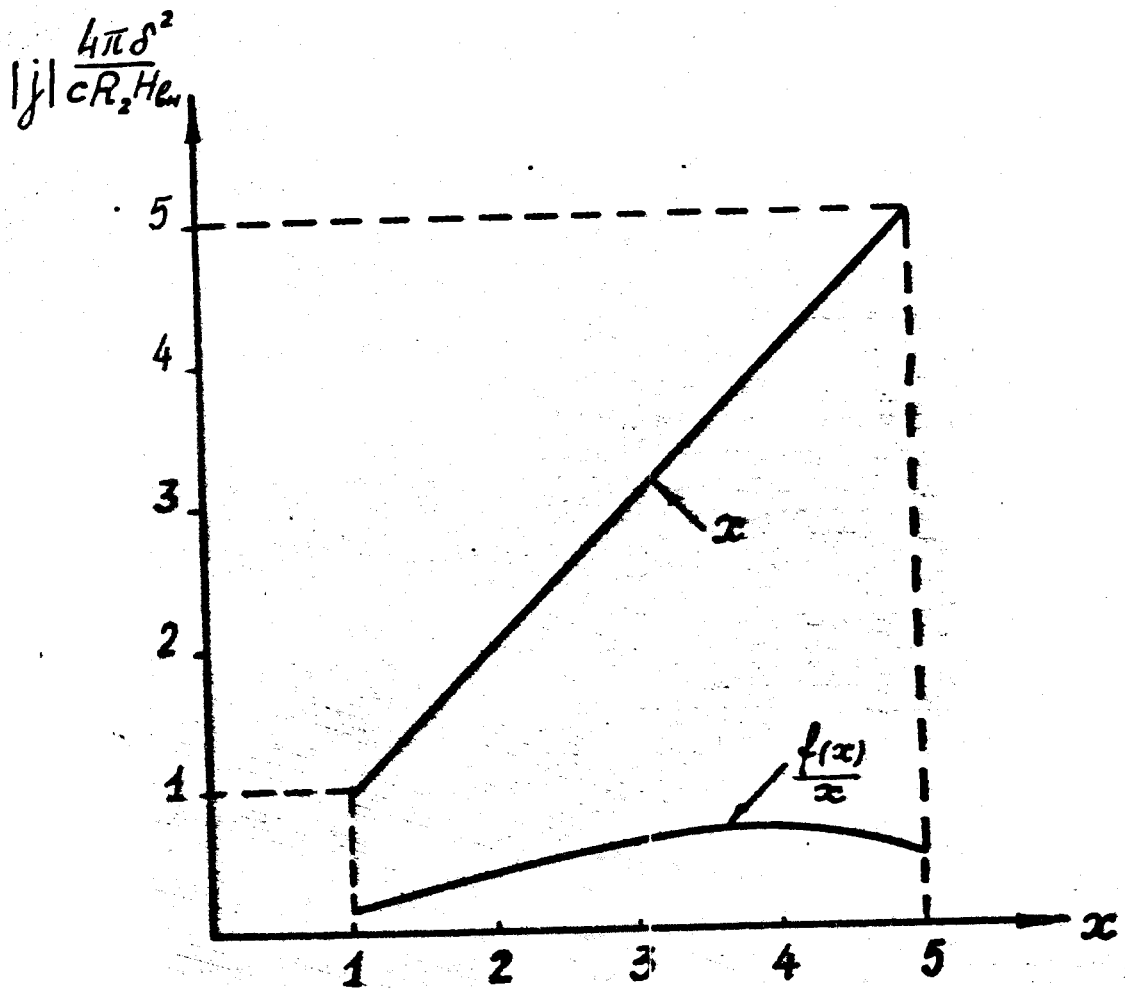
"Электродинамика сплошных сред" , ГИТТЛ, Москва, 1957 год.

2. В.Смайт "Электростатика и электродинамика". Изд.иностр. литер., Москва, 1954г.

3. И.Ламмеранер, М.Штафль "Вихревые токи" , Изд. "Энергия" , М.-Л., 1967г.

4. В.Р.Карасик "Физика и техника сильных магнитных полей" , изд. "Наука" , Москва , 1964г.

5. Е.Янке , Ф.Эмде , Ф.Лёш "Специальные функции" , изд. "Наука" , Москва, 1964г.



Плотность тока Фуко на диске
с отверстием:

$$j = \frac{c R_2 H_{ex}}{4\pi \delta^2} \left(x \sin \omega t + \frac{f(x)}{x} \cos \omega t \right).$$