

Буделев Ж.И.

Б2-2-86-419

С 323.2

4409/86



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б2-2-86-419

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 1986

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

Б2-2-86-419

Э. Г. Бубелев

"ПОЛОСНАЯ" МОДЕЛЬ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО
В КИНЕМАТИКЕ СТОЛКНОВЕНИЙ ЧАСТИЦ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

Объединенный институт
ядерных исследований
библиотека

Рукопись поступила
в издательский отдел

.. 27: 06 86 г.

Дубна, 1986г.

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе сжато изложено геометрическое существо графического метода в кинематике релятивистских частиц и фотонов, основанного на конформной "полосной" модели плоскости Лобачевского. Рассмотрена квазиконформная объёмная визуализация при помощи неё и модели Пуанкаре инвариантных кинематических фигур в пространстве скоростей Лобачевского для многочастичных реакций при высоких энергиях и гипотез об их структуре. Отмечено методологическое значение этого пространства для физики высоких энергий и необходимость применения в нём для анализа этих гипотез многомерной статистики и кибернетики.

1. Начало применению геометрии Лобачевского^{/1/} к релятивистской кинематике положено еще в 1910-24 гг. работами В. Варичака^{/2/}, Ф. Клейна^{/3/} и других (см. в^{/2,4,6/}). Ныне понятие пространства скоростей Лобачевского, впервые сформулированное в 1923-26 гг. А. П. Котельниковым^{/4/} и возрожденное через 30 лет фактически заново В. А. Фоком^{/5/} и независимо Н. А. Черниковым^{/6/}, является главным источником простых и ясных геометрических представлений и наглядных методов, в которых нуждается физика высоких энергий. Эти представления и методы приобретают точность чертежа при использовании известных конформных интерпретаций Пуанкаре^{/7,8/} геометрии Лобачевского, а также конформной "полосной" модели^{/9/} плоскости Лобачевского, удобной для изучения столкновений частиц при высоких энергиях^{/10-13/}. Полезность подобных представлений отмечал Г. Вик^{/15/}.

2. "Полосная" модель получена^{/9/} преобразованием ординаты z^+ произвольной точки α , заданной на плоскости Лобачевского $\tilde{\varphi}$ гиперболическими координатами z'', z^+ ($-\infty < z'', z^+ < \infty$) (рис. Ia), при помощи известной функции Лобачевского $\Pi(z^+/c) = 2 \operatorname{arctg} \exp(-z^+/c)$, где c — модуль радиуса кривизны плоскости Лобачевского, без изменения (с точностью до c) абсциссы z'' вдоль выделенной прямой (базис) \tilde{B} .

$$(I) \quad \eta = z''/c, \quad \xi = \pi/2 - \Pi(z^+/c).$$

Величины η, ξ служат декартовыми координатами на светодовой полосе φ шириной π (в единицах c) ($-\infty < \eta < \infty, -\pi/2 < \xi < \pi/2$) (рис. Ib). "Опорная" прямая B ($-\infty < \eta < \infty, \xi = 0$) является изометричным образом базиса \tilde{B} , а верхняя A и нижняя A' границы полосы φ и бесконечно удаленные концы прямой B — образом абсолюта плоскости $\tilde{\varphi}$ (рис. I, a, б).

Модель конформна, так как метрика плоскости Лобачевского в координатах η, ξ имеет вид

$$(2) ds^2 = ch^2 (z^{\pm}/c) dz''^2 + dz'^{\pm 2} = \left(\frac{c}{\cos \xi}\right)^2 (d\eta^2 + d\xi^2).$$

Она связана^{/9/} с интерпретациями Пуанкаре геометрии на плоскости Лобачевского соответственно в евклидовом круге-I и на евклидовой полуплоскости-II конформными преобразованиями при помощи известных аналитических функций комплексного переменного $\bar{X} = \eta + i\xi$, заданных на полосе φ ^{/14/} (рис. 1б, в, г):

$$(3) \quad \text{I) } \bar{\omega} = th(\bar{X}/2), \quad \text{II) } \bar{\xi} = \exp \bar{X}.$$

В отличие от интерпретаций Пуанкаре "полосная" модель не обладает круговым свойством, так как пучки прямых трех типов и семейства ортогональных к ним кривых на плоскости Лобачевского представлены в ней трансцендентными кривыми^{/9, 10/} (рис. 2а, г).

Особенным, как и в интерпретациях Пуанкаре, является координатный пучок прямых. Именно, гиперболический пучок прямых, перпендикулярных к базе \tilde{B} , вырождается в семейство отрезков евклидовых перпендикуляров к ее образу B , а семейство ортогональных к ним эквидистант с базой \tilde{B} - в пучок евклидовых прямых, параллельных B (рис. 1а, б).

Отсюда следует инвариантность модели относительно параллельных переносов (трансляций), изоморфных подгруппе неевклидовых движений вдоль \tilde{B} , которые в свою очередь в соответствии с^{/3/} изоморфны коллинеарной однородной подгруппе Лоренца.

3. Это важное для приложений свойство "полосной" модели использовано в графическом методе^{/9/} на основе известной абсолютной (т.е. оправдливой как в релятивистском, так и в нерелятивистском случае) формулировки Черникова^{/6/} механики контактных столкновений в образах пространства скоростей^{/4-6/} (пространства релятивистского годографа^{/5, 6/}). Касательное к миру Минковского^{/6/}, оно является пространством Лобачевского с кривизной $-1/c^2$, где c - скорость света^{/4-6/}.

Лоренцовы преобразования кинематических характеристик частицы с массой покоя $m > 0$ и "мировой"^{/6д/} скоростью^{/6/}, представленной точкой α_m (рис. 1д), сводится в модели

к перекосу начала координат O на прямой B из точки O_1 в точку O_2 , которые представляют (рис.1д) "мировые" скорости инерциальных систем отсчета 1 и 2.

Псевклидова кинематическая характеристика $|z|/z$, являющаяся расстоянием в пространстве скоростей $|4-6|$, названа А.А.Роббом (1911 г.) "быстротой" (*rapidity*) $|2,6г,9|$ в отличие от скорости v (*velocity*). В силу аддитивности она имеет (физический смысл собственной интегральной скорости (интеграла от абсолютного ускорения $|4,6г|$ по собственному времени вдоль прямолинейного годографа) $|12|$. Быстрота $\rho = z/c$ (в единицах c) связана с импульсом p , массой движения $|6|$ $\bar{m} = E/c^2$ (или полной энергией E) частицы, скоростью v ; "полускоростью" $w = (E - mc^2)/p$ $|6|$ и Лоренц-фактором $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ функциями $|6|$

$$(4) \quad \begin{aligned} p/mc &= \beta\gamma = sh\rho, & \bar{m}/m &= E/mc^2 = \gamma = ch\rho \\ v/c &= \beta = th\rho, & w/c &= \omega = th(\rho/2). \end{aligned}$$

Сохраняющиеся в модели углы псевклидова треугольника быстрот O_1 и O_2 равны углам между относительными скоростями (импульсами), соответствующими сторонам, в системах отсчета, представленных вершинами $|5,6|$.

Построение и измерение элементов соответствующего криволинейного тр-ка O_1 и O_2 осуществляется в модели при помощи трансцендентного конформного образа $|9|$ полярной координатной сетки на продольной (аксиальной) полуплоскости $\tilde{\varphi}$ в пространстве скоростей с полюсом на опорной прямой B - образе ось \tilde{B} (рис. 2а). Сетка снабжена вдоль B равномерной шкалой быстрот $\rho = z/c$ и шкалами величин $p, \bar{m} = E/c^2, \gamma$ и др., заданными функциями, обратными (4) $|9, 12|$, и вдоль своей границы Λ - шкалой углов θ ($tg\theta$ и др.), заданной обратной функцией Лобачевского

$$z_0 = -\ln tg(\theta/2) \quad *)$$

*) Эта функция не явно используется физиками-космичками уже 30 лет в виде $lg_{10} tg\theta$ - диаграммы (изображенной вдоль Λ на рис. 2-1, II) для "струй" частиц, регистрируемых в фотоэмульсиях (см. $|9, 10|$).

($\eta_{tg\theta} = \text{arsh}(1/\text{tg}\theta)$ и т.п.)^{/9,10/} (рис. 2а). Процедура решения треугольника аналогична номограмме с ориентированным транспарантом^{/12/}; сетка выполняет роль двух одинаковых бинарных полей (θ_1, p_1) и (θ_2, p_2) ве, а полуполоса φ с нанесенными на нее точками a, a_1 и a_2 - роль транспаранта (подвижной плоскости), перемещаемого на расстояние ρ''_{12} (Рис. 1д).

Для фотона γ с $m_\gamma = 0$ точка - скорость a_γ лежит на образе Λ абсолюта плоскости $\tilde{\varphi}$ (рис. 2а) и треугольник бистрот $\tilde{a}_1 a_\gamma a_2$ вырожден. Углы $\theta_{1(2)}^\gamma$ вылета фотона в системах отсчета 1 и 2 связаны^{/8/}, как углы параллельности $\theta_{1(2)}^\gamma = \Pi(\eta_{1(2)}^\gamma)$ для направленных отрезков, равных в модели абсциссам точки a_γ относительно точек a_1 и a_2 с разностью $\rho''_{12} = \text{arsh}(\eta_{1(2)}^\gamma)$, равной относительной бистроте систем отсчета (рис. 1г).
 Отношение p_2/p_1 импульсов фотона в системах отсчета 1 и 2, связано зависимостью^{/8,9/}

$$(5) \quad p_2/p_1 = \text{ch} \rho_{12} - \text{sh} \rho_{12} \cos \theta_1 = \exp(-l_{12}/c)$$

с расстоянием l_{12} между соосными срединками с центром в точке a_γ , проходящими через точки s_1 и $s_2^{\text{ОНО}}$ определяется в модели с использованием "орицимической" асимптотики "полуокружностей" сетки и логарифмической асимптотики ее шкал (выполняющихся с погрешностью $\delta = \exp(-2\eta) < 0,01$ в области $|\eta| > 2,3$ ^{/9/} (рис. 2а) после графического переворота тр-ка $a_1 a_\gamma a_2$ вокруг биссектрисы угла θ_1 при вершине a_1 ^{/9/} (рис. 1е).

Графическое решение основной задачи механики контактных столкновений^{/6г/} в соединении двух частиц в одну и о распаде одной частицы на две осуществляется^{/12/} построением в "полосной" модели "рычага Архимеда"^{/6/} $a_1 a_2$ в пространстве скоростей для масс покоя m_1, m_2 составляющих частиц и m_0 - составной частицы, как целого, и измерением $m_0 = m_1 + m_2$ и неевклидовых длин плеч $a_1 a_0$ и $a_2 a_0$ рычага на основе абсолютной геометрической формулировки^{/6/} (как законов рычага Архимеда I и II рода) фундаментального закона сохранения 4-импульса, являющегося решением этой задачи.

4. "Мировые" скорости частиц, возникающих в результате столкновения частиц высокой энергии $\sim 10^2 + 10^4$ Гэв, изображаются в пространстве скоростей точками сильно вытяну-

той, почти осесимметричной /II/ "кинематической фигуры" /6/ (К.Ф.). Эта фигура есть инвариантный геометрический образ кинематики столкновения, содержащий всю имеющуюся информацию о ней, поскольку каждой точке К.Ф. сопоставлена /6/ масса покоя соответствующей частицы в качестве своеобразной нагрузки.

"Полосная" модель свертки К.Ф. на аксиальную плоскость (интеграла по азимутальному углу φ) вокруг ее оси \vec{B} , описывающей точки - скорости частиц до столкновения, или "продольная" (L) диаграмма скоростей /9-II/ есть трансляционно инвариантный евклидов образ - наглядная продольная карта кинематики столкновения. На ней сохраняются "продольная быстрота" /9/ $\rho'' = \frac{v''}{c}$ - расстояние вдоль оси К.Ф. и углы, а размеры и форма частей К.Ф., соответствующим коррелированным группам частиц, образующимся при высокой энергии, не зависят от ρ'' (или лоренц фактора $\gamma'' = ch\rho''$) группы, как целого.

Для объемного представления с К.Ф. столкновения L-диаграмма дополнена "ω[±] - диаграммой" /II/ удвоенных поперечных полускоростей $2\omega^{\pm} (2\tilde{\omega}^{\pm} = 2th(\frac{1}{2}\tilde{\rho}^{\pm}) \cdot e^{i\varphi}$ где $\varphi = \arg \tilde{\rho}^{\pm}$ - азимутальный угол (рис. 2б)). Она является моделью Пуанкаре I другой проекции К.Ф. - эквидистантного переноса (см. рис. 2а) ее на перпендикулярную к \vec{B} (азимутальную) плоскость и тоже сохраняет углы (рис. 1а, в и 2б, в).

Изменение масштабов этих диаграмм с увеличением поперечной (к оси \vec{B}) быстроты $\rho^{\pm} = \frac{v^{\pm}}{c}$ показано на "полярных" (рис. 2а, б) и "прямоугольных" или эквидистантных к перпендикулярно

$\tilde{D} (\tilde{D} \perp \vec{B})$ (рис. 2в, г) - координатных сетках, построенных с равномерным по быстрой шагом $\Delta\rho = 0,5$.

Вместе эти взаимно ортогональные L- и ω[±]-диаграммы скоростей (рис. 2 и 3) составляет трансляционно и ротационно инвариантный цилиндрический евклидов образ /II, I2/ К.Ф. в пространстве скоростей Лобачевского, сохраняющий проекции углов на аксиальную и азимутальную плоскости и размеры частей К.Ф. вдоль ее оси. Они существенно облегчают изучение столкновений частиц высокой энергии разных типов, отличающихся структурой их К.Ф.-р /10-13/ (рис. 2-I и II; рис. 3 - а и б, в).

В качестве примера на рис. 2-1, I приведены L-"проекции" и соответствующие их частям ω[±]-"проекции" К.Ф.-р для столкновений нуклонов с энергией 20 и 1 Тэв (10³ Гэв) /11/, а на рис. 3 для 5-частичных событий π⁻ p-реакций при импульсе 7,5 Гэв /6, 13/

"Полосная" и Пуанкаре I модели в качестве наглядных продольной и поперечной евклидовых карт для аксиальной и азимутальной плоскостей в пространстве скоростей Лобачевского геометрически аналогичны карте Меркатора и стереографической проекции для земной сферы. Они могут облегчить анализ этих отношений /9-13/, включая качественное формирование гипотез о типах и структуре К.Ф.-р на графических дисплеях ЭВМ.

Статистическая природа динамики столкновений в микромире и образование в них многих частиц приводят нас к многомерной статистике в пространстве скоростей Лобачевского, как к средству эвристического исследования этой динамики /12, 16/.

А сложность многомерного подхода и необходимость статистического анализа многих тысяч столкновений, осуществимого лишь при помощи больших ЭВМ, — требуют автоматизации такого анализа, то есть применения методов современной кибернетики в пространстве Лобачевского.

В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность А.Д.Александрову за полезное замечание о пионерской роли работ В.Варичака и Н.А.Черникову, А.П.Нордену, А.П.Широкову за стимулирующие обсуждения приложений "полосной" модели геометрии Лобачевского в релятивистской физике.

Примечание при депонировании.

В настоящей работе использованы материалы докладов автора на V и VIII Всесоюзных конференциях по современным проблемам геометрии (1972 и 84 гг.) и его выступлений в дискуссиях по применению геометрии в физике.

Журавлев

Л и т е р а т у р а

1. Н.И.Лобачевский. "О началах геометрии" (1829), "Новые начала геометрии" (Вступление) (1835). Сб. Об основаниях геометрии. ГИТЛ. М. 1956.
2. v. Varičak. *Physikalische Zeitschrift*. 11, 93, 287, 586 (1910); "Darstellung der Relativitätstheorie im dreidimensionalen Lobatscheffskijischen Raume". Zagreb. 1924, pp. 1-104.
3. Ф.Клейн. О геометрических основаниях Лоренцовой группы. Сб. "Новые идеи в математике. № 5, стр. 144, СПб, 1914.
4. А.П.Котельников. Принцип относительности и геометрия Лобачевского. Сб. "In memoriam N.I. Lobachevski", 2, 37-66, Казань, 1927.
5. В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТЛ. М., 1955.
6. Н.А.Черников. а) Научные доклады высшей школы физ.-мат. науки, № 2, 158 (1958); б) Препринт ИТФ АН УССР, 68-44, Киев, 1968; в) Препринт ОИЯИ, P-723, Дубна, 1961; Сб. "Гравитация и теория относительности", вып. 2, 9, Казань, 1965; г) Лекции в Зимней школе теор. физики при ОИЯИ, 23, 151, Дубна, 1964; д) ЭЧАЯ, т. 4, вып. 3, Атомиздат, 1973г., сс. 773 - 810.
7. Е.В.Майков, Н.А.Черников, ИДВШ, Ф.-м.н. № 4, 129 (1958).
8. Э.Г.Бубелев, Н.А.Черников. *Acta Phys. Pol.*, 26, №1, 155 (1964).
9. Э.Г.Бубелев, Препринт ОИЯИ, P-1320, Дубна, 1963; *Acta Phys. Pol.*, 26, №2, 279 (1964); *Nukleonika IX*, № 4-5, 409 (1964).
10. Э.Г.Бубелев. Изв. АН СССР, сер. физ., 28, №11, 1829 (1964).
11. Э.Г.Бубелев. Там же, 31, №9, 1487 (1967); 28, 1835 (1964).
12. Э.Г.Бубелев. Препринт ОИЯИ I-3888, Дубна, 1963.
13. а) В.А.Беляков, Э.Г.Бубелев, Изв. АН СССР, сер. физ., 31, № 9, 1491, (1967); б) В.А.Беляков, Э.Г.Бубелев, Е.С.Кузнецова. *Письма ЖЭТФ*, 8, № 4, 197 (1963).
14. М.А.Лаврентьев и Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., "Наука", 1973.
15. G.C.Wick. *Visual Aids in Relativistic Kinematics*, CERN, 73-3, Geneva, 1973.
16. E.G.Bubelev. On Pattern Recognition of Fireballs and Isobars in the Lobachevsky Velocity Space. In: *Proc. XV Intern. Conf. on Cosmic Rays*, Plovdiv, 1977, v. 7, p. 535; Preprint JINR, E-I0926, Dubna, 1977.

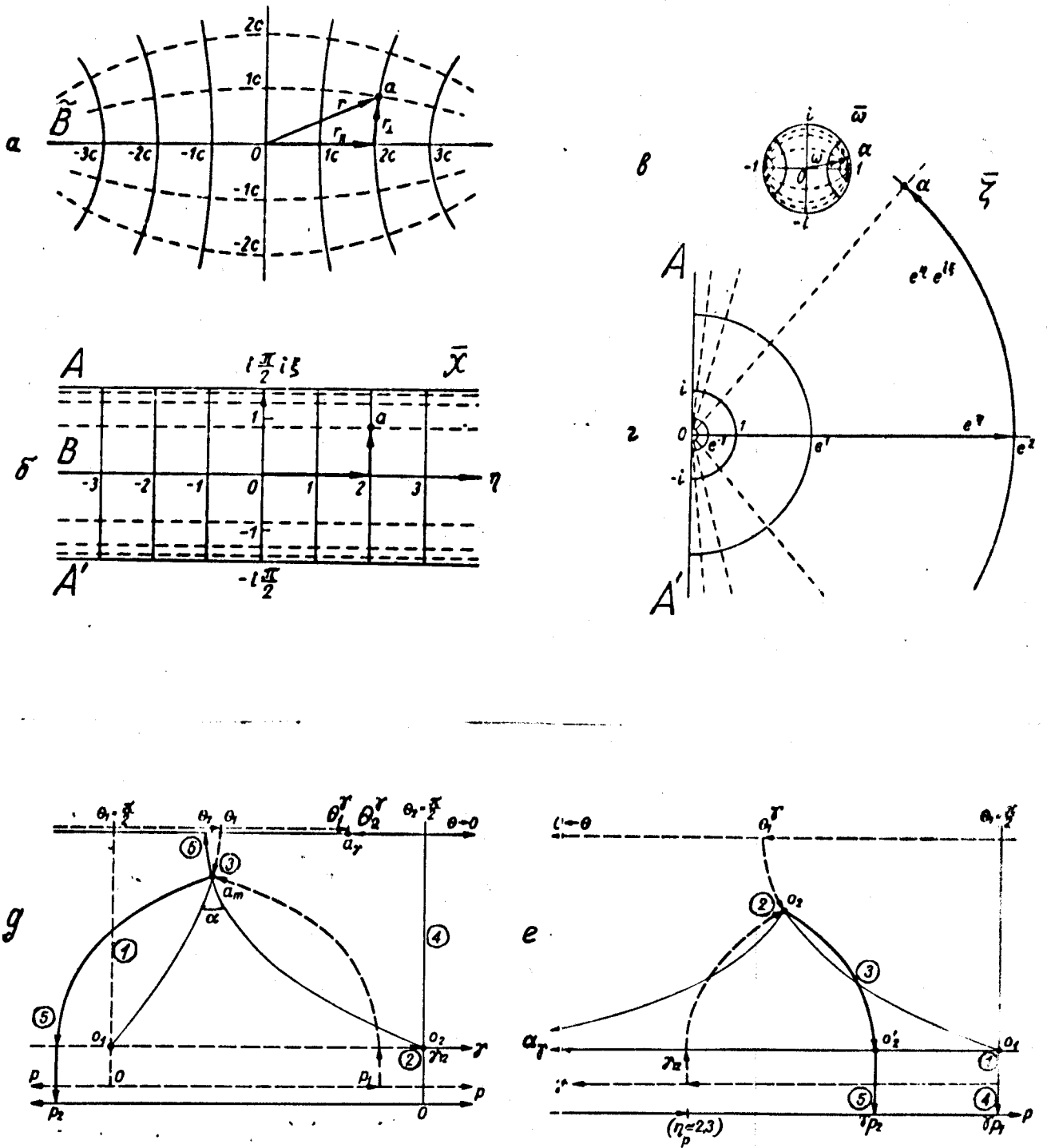


Рис. 1. Гиперболическая координатная сетка на плоскости Лобачевского (а) и ее конформные отображения в евклидову плоскость: на полосу (б), на единичный круг (в), на полуплоскость (г). Эквидистанты к базе \tilde{B} и их образы показаны пунктиром, ортогональные к ним прямые гиперболического пучка, база \tilde{B} и их образы - сплошными линиями; (д, е) - схемы графических преобразований Лоренца для частиц с $m > 0$ и $m = 0$, цифрами в кружках обозначена последовательность построений и измерений.

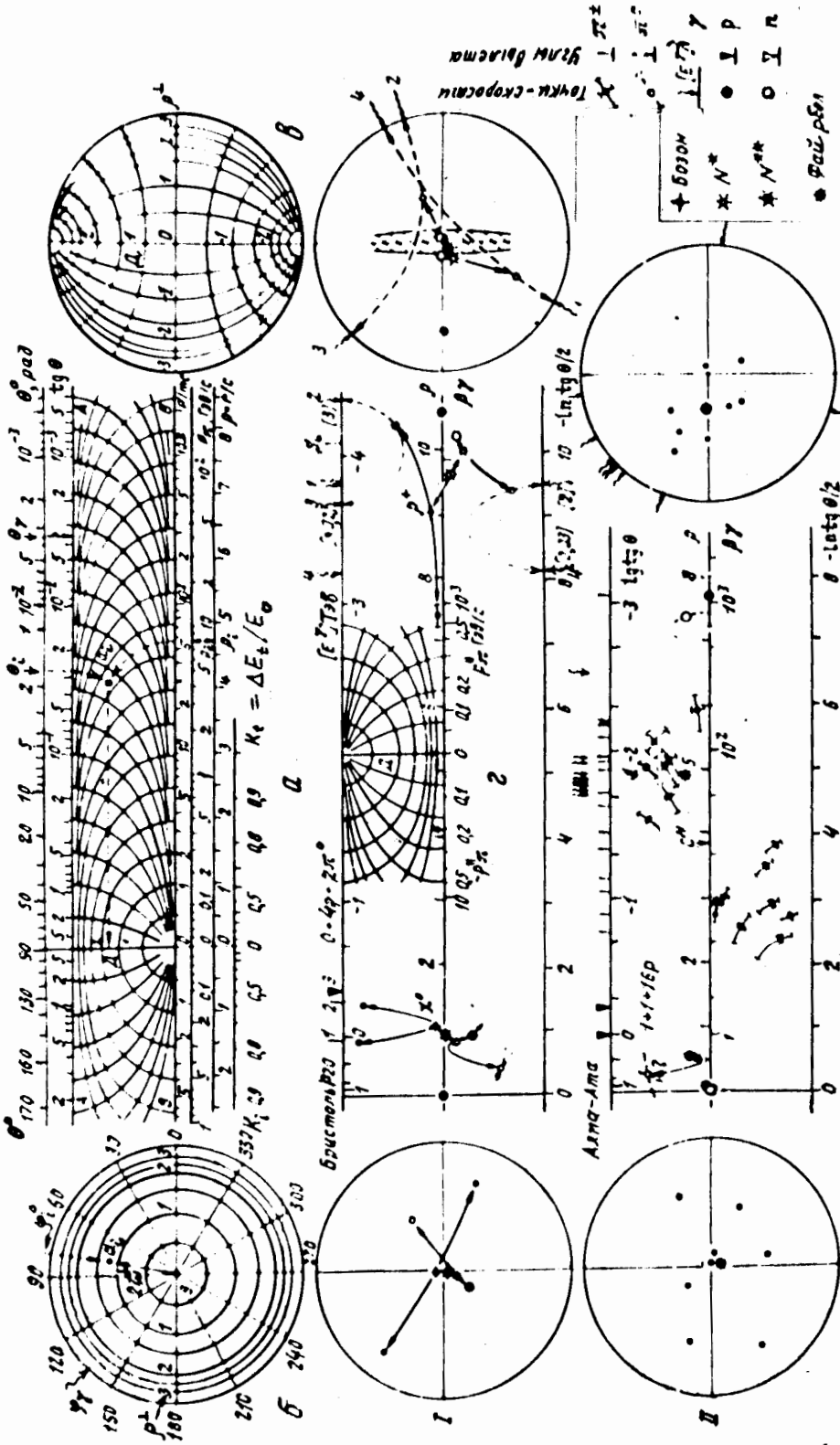
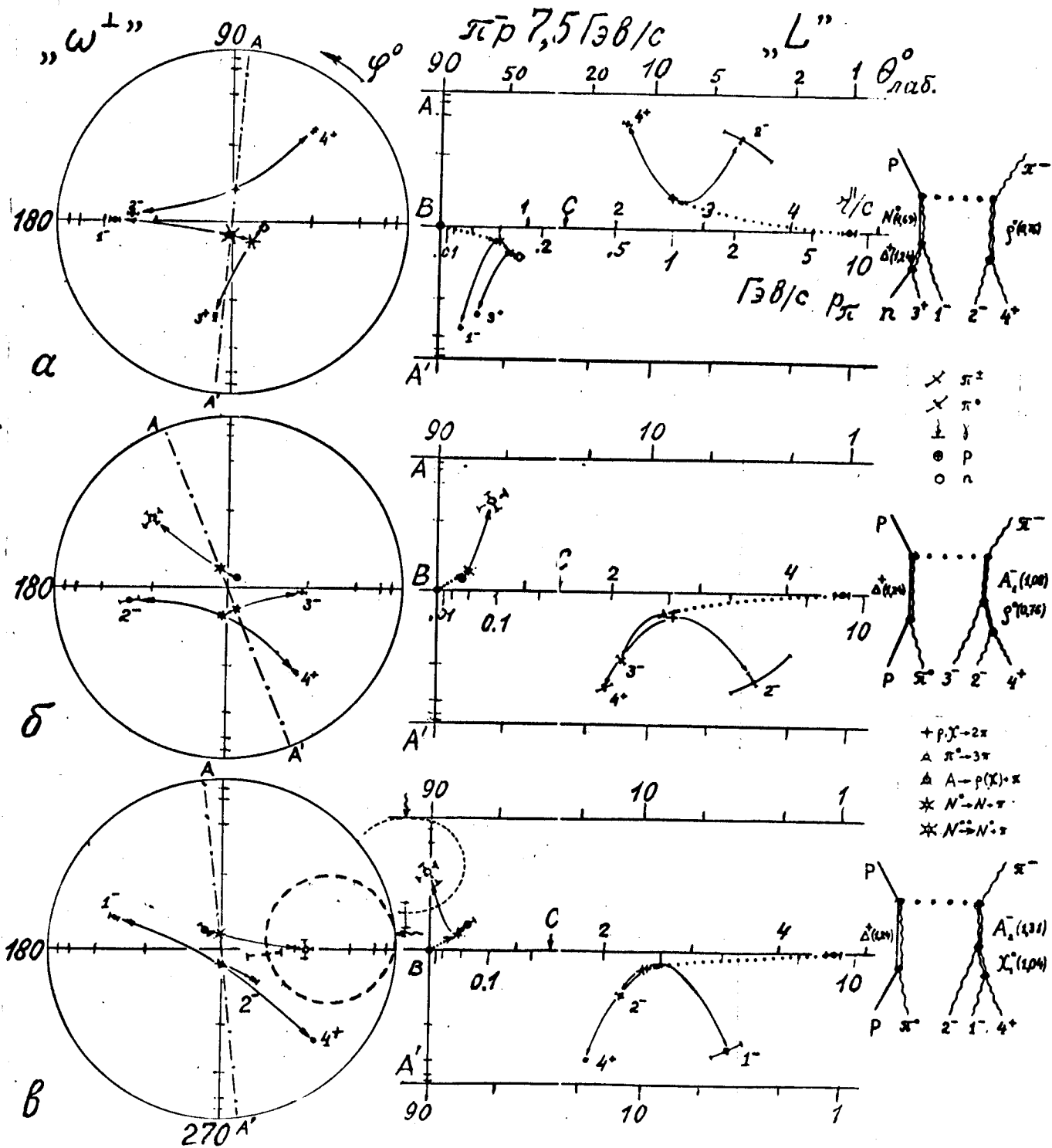


Рис. 2. Координатные сетки для L - и ω^+ -диаграмм: а, б - основные, "полярные"; в, г - вспомогательные, "прямоугольные" или "эквицистантные". I, II - L - и ω^+ - "проекции" кинематических фигур для двух струй с энергией 20 и I Тэв; I - бинарная реакция с сильным возбуждением обоих нуклонов, II - тетрарная реакция, по-видимому, со слабым возбуждением нуклона-мишени; эллиптичность ω^+ - "проекции" Файрболов указывает на приплюснутость их к продольной плоскости в пространстве скоростей Лобачевского.



с.3. L - и ω^\perp - "проекции" характерных кинематических фигур (К.Ф.) для 5-частичных событий $\pi^- p$ -реакции при импульсе $7,5 \pm 0,6$ ГэВ/с из классов с похожими (близкими) К.Ф.-ми 136 . Устойчивые элементы структуры К.Ф.-р в классах показаны "проекциями" рычагов Архимеда, соответствующих вершинам "графов отношений" $^{6\gamma}$ частиц для этих классов в процессах их образования и распада, где в скобках приведены в ГэВ/с массы их групп как целого. Пунктирный круг и овальная область - в - представляют ω^\perp - и L - "проекции" геометрического места всех возможных положений "мировой" скорости недостающего π^0 -мезона, т.е. "проекций" орисферы, соответствующей углам вылета θ, φ и импульсу зарегистрированного γ -кванта (от распада π^0 -мезона) в лабораторной системе.