ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б2-15-6111

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 1971 г.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория нейтронной физики

Б.Сикора, И.Тыкэ, Я.Тыкэ.

ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ИЗМЕРЯЕМЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СЕЧЕНИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ.

Дубна, 1971г.

I. Введение.

Влияние конечной геометрии на измеряемое дифференциальное сечение реакции исследовалось ранее многими авторами (/I/ ÷ /4/). Обычно такие исследования сводились к поискам некоторых аддитивных поправок, связывающих измеряемое и истинное дифференциальные сечения. Ввиду того, что сами эти поправки зависят явно от искомых, истинных сечений через производные последних по углу, их нельзя на основании эксперимента однозначно определить.

Покажем, как можно с помощью формализма так называемой функции распределения учесть искажения, вводимые конечной геометрией в угловое распределение в случае, если на последнее наложены некоторые естественные связи. Основное наше рассмотрение относится к угловым распределениям реакции, идущих через составное ядро, когда связи выступают в виде требования, чтобы в системе центра масс такие распределения представлялись линейной комбинацией немногих полиномов Лежандра.

В последней части статьи (пример II) покажем, как можно учесть влияние конечной геометрии на дифференциальное сечение, измеряемое под углом 0^{o}. Эта часть, подобно самому формализму функции распределения, не связана с вышеупомянутыми ограничениями на форму углового распределения.

II. Функция распределения.

Рассмотрим общий случай геометрии эксперимента, рис.I. Бесконечно малый выход продуктов реакции из элемента мишени dV в элемент поверхности детектора dS определяется формулой:

$$dY = dV \cdot dS \cdot \frac{\cos\psi(\tau_1, \tau_2)}{r^2(\tau_1, \tau_2)} \, \sigma\left(\tilde{\Theta}(\tau_1, \tau_2)\right) N \cdot n \qquad (I)$$

где τ_1, τ_2 – ~~картезианские~~ декартовые координаты элементов мишени и детектора, соответственно,

$r(\tau_1, \tau_2)$ – расстояние между элементами мишени и детектора,

$\sigma(\theta)$ – дифференциальное сечение в лабораторной системе координат под углом реакции θ,

$\tilde{\theta}(\tau_1, \tau_2)$ – функция τ_1 и τ_2 численно равна углу реакции; тильда используется для различия этой функции от используемого обозначения θ для угла реакции, как аргумента,

$\psi(\tau_1, \tau_2)$ – угол между нормалью в точке τ_2 к поверхности детектора и вектором $\vec{r}$ соединяющим элементы dS и dV,

N – число частиц, падающих на I см^2 мишени в I сек,

n – плотность ядер в мишени.

Будем предполагать, что мишень "тонкая", т.е. что потери энергии падающих и регистрируемых частиц в ней несущественны. Тогда полный выход под углом θ_0 получаем путем интегрирования выражения (I):

$$Y(\theta_0) = N \cdot n \cdot \int_V dV \int_S \cos\psi(\tau_1, \tau_2) \cdot \frac{1}{r^2(\tau_1, \tau_2)} \sigma(\tilde{\theta}(\tau_1, \tau_2)) \, dS =$$

$$= N \cdot n \cdot \int_V dV \int d\theta \int_{L(\theta, \tau_1)} \cos\psi(\tau_1, \tau_2) \cdot \frac{\sigma(\tilde{\theta}(\tau_1, \tau_2))}{r^2(\tau_1, \tau_2) \, |\nabla_2 \tilde{\theta}(\tau_1, \tau_2)|} \, dl \quad (2)$$

где $L(\theta, \tau_1)$ – кривая на поверхности детектора, задаваемая уравнением;

$$\tilde{\theta}(\tau_1, \tau_2) = \theta$$

$\nabla_2 \tilde{\theta}(\tau_1, \tau_2)$ – градиент $\tilde{\theta}(\tau_1, \tau_2)$ при фиксированном τ_1 в точке τ_2,

Θ_0 – угол установки детектора (условный); в (2) подразумевается зависимость $\psi(\tau_1,\tau_2)$, $r(\tau_1,\tau_2)$, $\tilde{\Theta}(\tau_1,\tau_2)$ и $L(\Theta,\tau_1)$ от Θ_0.

Введем нормированную функцию распределения $\Omega(\Theta_0,\Theta)$ такую, что:

$$\Omega(\Theta_0,\Theta)=\frac{1}{G(\Theta_0)}\int\limits_V dV\int\limits_{L(\Theta,\tau_1)}\frac{\cos\psi(\tau_1,\tau_2)}{r^2(\tau_1,\tau_2)\left|\nabla_2\tilde{\Theta}(\tau_1,\tau_2)\right|}\,dl \tag{3}$$

и

$$\int\Omega(\Theta_0,\Theta)\,d\Theta=1 \tag{4}$$

Легко заметить, что нормировочная функция $G(\Theta_0)$ представляет собой полный телесный угол детек~~ции~~тирования ~~(геометрический фактор)~~ под углом Θ_0.

$$G(\Theta_0)=\int d\Theta\int\limits_V dV\int\limits_{L(\Theta,\tau_1)}\frac{\cos\psi(\tau_1,\tau_2)}{r^2(\tau_1,\tau_2)\left|\nabla_2\tilde{\Theta}(\tau_1,\tau_2)\right|}\,dl \tag{5}$$

Используя (3) для преобразования (2) получаем:

$$Y(\Theta_0)=N\cdot n\cdot G(\Theta_0)\int\Omega(\Theta_0,\Theta)\,\sigma(\Theta)\,d\Theta \tag{6}$$

С другой стороны имеем:

$$Y(\Theta_0)=N\cdot n\cdot G(\Theta_0)\cdot\sigma^{эксп}(\Theta_0) \tag{7}$$

где $\sigma^{эксп}(\Theta_0)$ – экспериментально полученное значение дифференциального сечения (без учёта влияния конечной геометрии)

Сравнивая (6) и (7) получаем окончательно

$$\sigma^{эксп}(\Theta_0)=\int\Omega(\Theta_0,\Theta)\,\sigma(\Theta)\,d\Theta \tag{8}$$

Функция распределения $\Omega(\theta_0,\theta)\,d\theta$ представляет собой относительный (нормированный) телесный угол для регистрации продуктов реакции, вылетающих в угловом интервале $\theta, \theta+d\theta$, с помощью детектора, установленного под углом θ_0.

Ш. Учёт влияния конечной геометрии.

Задача определения истинного дифференциального сечения сводится к решению интегрального уравнения (7) Фредгольма первого рода. В общем случае такого типа уравнения не решаются (см.например, /7/).

Приближения, используемые в /I/ - /4/ заключаются в разложении $\sigma(\theta)$ в ряд по степеням $(\theta-\theta_0)$ и пренебрежении членами выше второй степени. В итоге получаются поправки вида:

$$\sigma(\theta_0)-\sigma^{экс}(\theta_0) = b\cdot \frac{d\sigma}{d\theta}\Big|_{\theta=\theta_0} + C\cdot \frac{d^2\sigma}{d\theta^2}\Big|_{\theta=\theta_0}$$

где b и C некоторые постоянные, в формализме функции распределения,выражающиеся формулами:

$$b = \int \Omega(\theta_0,\theta)\,\theta\,d\theta - \theta_0$$

и

$$C = -\frac{1}{2}\left[\theta_0^2 + \int \theta^2\,\Omega(\theta_0,\theta)\,d\theta - 2\theta_0 \int \Omega(\theta_0,\theta)\,\theta\,d\theta\right]$$

Рассмотрим следствия уравнения (7) в случае, когда измеряются угловые распределения продуктов реакции, идущей через механизм составного ядра. Тогда дифференциальное сечение в системе центра масс может быть представлено в виде линейной комбинации нескольких полиномов Лежандра:

$$\sigma_{цм}(\vartheta) = \sum_{L=0}^{L_{макс}} a_L\, P_L(\cos\vartheta) \qquad (9)$$

где $P_L(\cos\vartheta)$ - полиномы Лежандра.

В лабораторной системе координат можем написать

$$\sigma(\theta) = \sum_{L=0}^{L_{макс}} a_L B_L(\theta) \qquad (10)$$

где $B_L(\theta)$ переведенные в лабораторную систему полиномы Лежандра.

После подстановки (9) в (8) имеем:

$$\sigma^{экс}(\theta_0) = \sum_{L=0}^{L_{макс}} a_L \tilde{B}_L(\theta_0)$$

где $\tilde{B}_L(\theta_0) \equiv \int B_L(\theta)\,\Omega(\theta_0,\theta)\,d\theta$

Функции $\tilde{B}_L(\theta_0)$, где $L = 0, 1, 2 \dots L_{макс}$ являются линейно независимыми, поскольку $L_{макс}$ конечное и притом небольшое число. Поэтому разложение (10) однозначное.

Для получения истинного углового распределения достаточно разложить измеренное угловое распределение в ряд по функциям $\tilde{B}_L$ (применяя метод наименьших квадратов и критерии χ^2) и полученные коэффициенты подставить в уравнение (9).

Если не учитывать влияния конечной геометрии разложение $\sigma^{экс}(\theta_0)$ имеет вид:

$$\sigma^{экс}(\theta_0) = \sum_{K=0}^{K_{макс}} b_K B_K(\theta_0) \qquad (11)$$

И если теперь перевести функции $\tilde{B}_L(\theta)$ в систему центра масс затем разложить их в ряды по полиномам Лежандра, то полученные коэффициенты разложения образуют матрицу D, связывающую истинные коэффициенты a_L с измеряемыми b_K, определенными по (11).

$$b_K = \sum_{L=0}^{L_{макс}} D_{KL} a_L \qquad (12)$$

Матрица D описывает влияние данной конечной геометрии на измеряемое угловое распределение и имеет в общем бесконечные размеры. При переходе к идеальной геометрии она превращается в единичную матрицу.

Для практических целей более удобная матрица поправок , такая, что

$$a_L = b_L + \sum_{K=0}^{L_{макс}} C_{LK} b_K \qquad (13)$$

При определенном $L_{макс}$, матрица C задается однозначно уравнениями (12) и (13).

В пределе идеальной геометрии матрица C становится нулевой.

Пример I

Рассмотрим геометрию, применяемую нами для измерения нейтронных спектров из реакции $^7Li(d,n)$ (/6/, /7/). На рис.2 даны функции распределения для некоторых значений углов θ_0 , рассчитанные на ЭВМ БЭСМ-4. На этом же рисунке изображена схема геометрии эксперимента. Как показали расчеты, компоненты матриц C соответствующих различным энергиям падающих дейтонов не превышают 0,05. Так, например, для E_d = 2 Мэв и нейтронов n_0 (Q = 15,02 Мэв) в предположении $L_{макс}$=6 матрица C равна:

$$C = \begin{pmatrix} -1,8 & +1,7 & -1,3 & +0,3 & -0,0 & -0,3 & -0,6 \\ -5,0 & -5,6 & +2,3 & -2,5 & +0,2 & -0,4 & +0,3 \\ -2,7 & +3,5 & -3,2 & +2,2 & -3,0 & +1,0 & -0,3 \\ -0,3 & -0,6 & +3,5 & -2,8 & +3,1 & -3,5 & +0,8 \\ +0,7 & +0,1 & -1,2 & +2,7 & -3,4 & +2,7 & -4,1 \\ +1,2 & -0,6 & +0,3 & +0,5 & +2,9 & -2,9 & +3,4 \\ -2,1 & +1,5 & -0,4 & -0,3 & +0,2 & +3,3 & +0,5 \end{pmatrix} \times 10^{-2}$$

Видим, что угловое разрешение $6^0 \div 8^0$ (полуширина функции распределения) требует введения поправок порядка $2 \div 5\%$ для доминирующих коэффициентов разложения по полиномам Лежандра. Для коэффициентов, которые малы в силу механизма реакции эти поправки могут быть весомыми.

Пример II.

Формализм функции распределения позволяет легко учесть влияние конечной геометрии на дифференциальное сечение, измеряемое под углом 0^0. Рассмотрим это на примере геометрии, используемой нами для измерения с газовой мишенью [redacted]. Схема геометрии и соответствующая функция распределения $\Omega(0,\theta)$ дана на рис.3.

Разложим $\sigma(\theta)$:

$$\sigma(\theta) = \sigma(0) + \sigma'(0)\cdot\theta + \frac{1}{2}\sigma''(0)\,\theta^2 + \ldots$$

и подставим в формулу (8). Тогда получаем

$$\sigma^{эксп}(0) = \sigma(0) + \sigma'(0)\cdot\theta_1 + \frac{1}{2}\sigma''(0)\,\theta_2^2 \tag{14}$$

где $\qquad \theta_1 \equiv \int \Omega(0,\theta)\cdot\theta\, d\theta$

и $\qquad \theta_2 \equiv \left(\int \Omega(0,\theta)\cdot\theta^2\, d\theta\right)^{1/2}$

Для указанной геометрии $\Theta_1 = 1{,}14^0$ и $\Theta_2 = 1{,}24^0$.
Введем эффективный угол $\Theta_{эфф}$ такой, что

$$\sigma^{экс}(0) = \sigma(\Theta_{эфф})$$

и заметим, что

$$\sigma(\Theta_{эфф}) = \sigma(0) + \sigma'(0)\cdot\Theta_{эфф} + \frac{1}{2}\sigma''(0)\,\Theta_{эфф}^2 \tag{15}$$

Возможны два случая:

1. $$\frac{\sigma'(0)}{\sigma''(0)} \geq 0 \tag{16}$$

Этот случай чаще всего встречается на практике. Легко показать на основании (14) - (16), что, тогда

$$\Theta_1 \leq \Theta_{эфф} \leq \Theta_2$$

откуда $\Theta_{эфф} = 1{,}19^0 \pm 0{,}05^0$

2. $$\frac{\sigma'(0)}{\sigma''(0)} < 0$$

За исключением редких случаев, когда $-0.04 < \frac{\sigma'(0)}{\sigma''(0)} < 0$ выполняется для нашей геометрии

$$1{,}02^0 < \Theta_{эфф} < 1{,}14^0, \text{ т.е. } \Theta_{эфф} = 1{,}08^0 \pm 0{,}06^0$$

Для случаев $-0.04 < \frac{\sigma'(0)}{\sigma''(0)} < 0$ требуется более детальное знание производных $\sigma'(0)$ и $\sigma''(0)$.

Метод эффективного угла имеет большое преимущество по сравнению с методами, указанными в /1/ - /4/, поскольку, как правило, требует он лишь качественного знания поведения $\sigma(\Theta)$ вблизи 0^0, в то время, когда поправки в /1/ - /4/ прямо зависят от $\sigma'(0)$ и $\sigma''(0)$.

Отметим еще, что в случае, рассматриваемом в примере I, имеем $\sigma'(0) \cong 0$ (из-за механизма реакции) и $\Theta_{эфф} = \Theta_2 \cong 4^\circ$

Заключение.

Использование формализма функции распределения в значительной мере улучшает качество физической информации, извлекаемой из измерений угловых распределений, проводимых с плохим угловым разрешением в случае, когда реакция протекает путём механизма составного ядра. Этот формализм полезен также при описании угловых распределений прямых реакций с помощью теоретических кривых (кривые Баттлера или метод искаженных волн). В этих случаях с экспериментом следует сравнивать „исправленную" теоретическую кривую:

$$\sigma^{испр}(\Theta_0) = \int \Omega(\Theta_0, \Theta)\, \sigma^{теор}(\Theta)\, d\Theta .$$

При измерении дифференциального сечения под углом 0° этот формализм позволяет легко скомпенсировать влияние конечной геометрии.

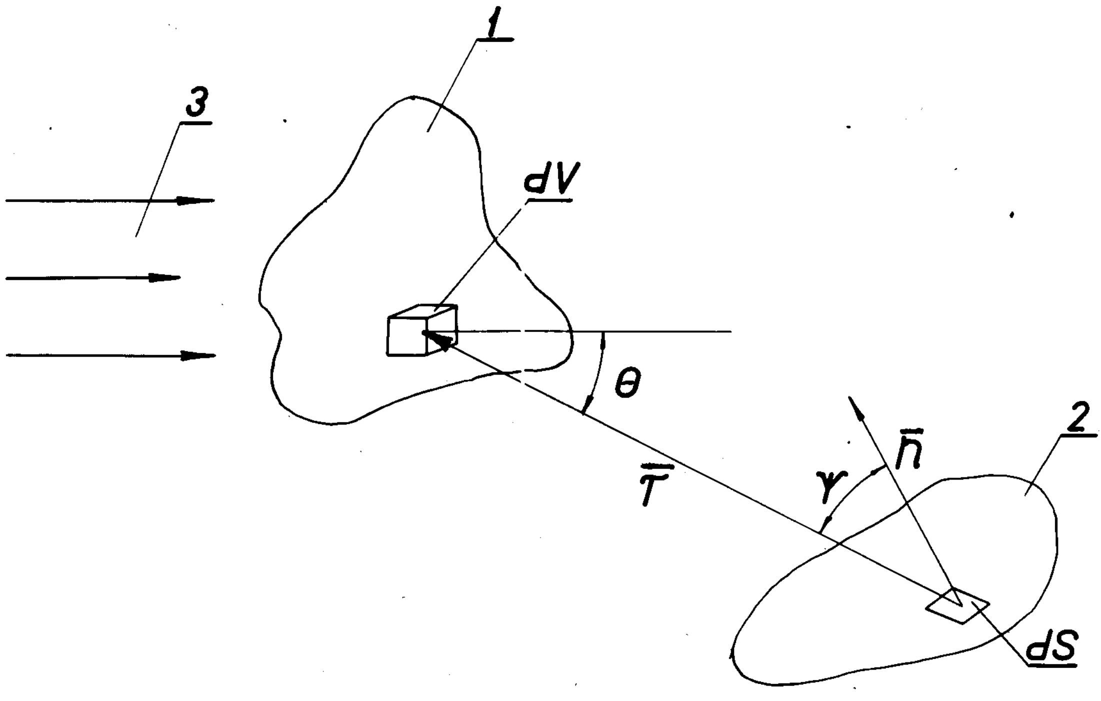

Рис. I Геометрия измерения выхода продуктов реакции. I - объем мишени; 2 - поверхность детектора; 3 - поток падающих частиц; $\vec{n}$ - нормаль к поверхности детектора.

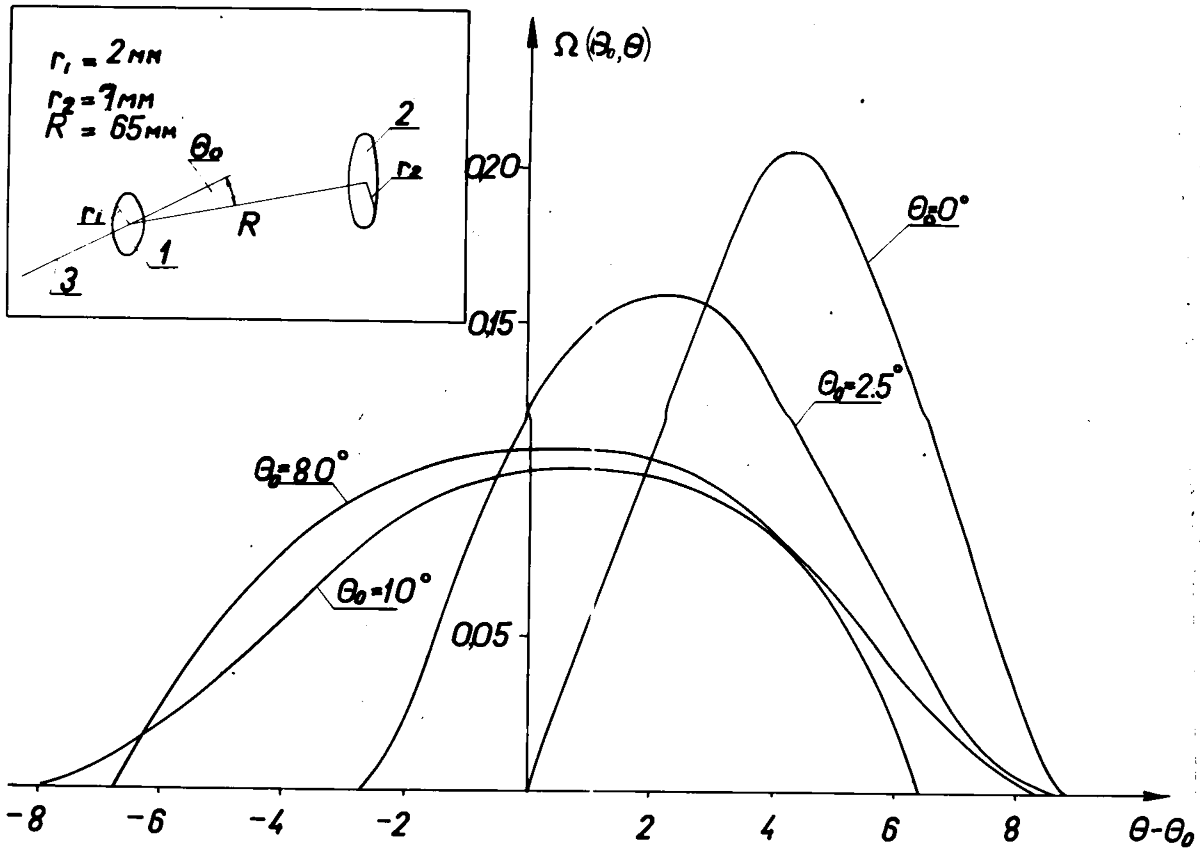

рис. 2 Функция распределения для геометрии нейтронного спектрометра (пример I).

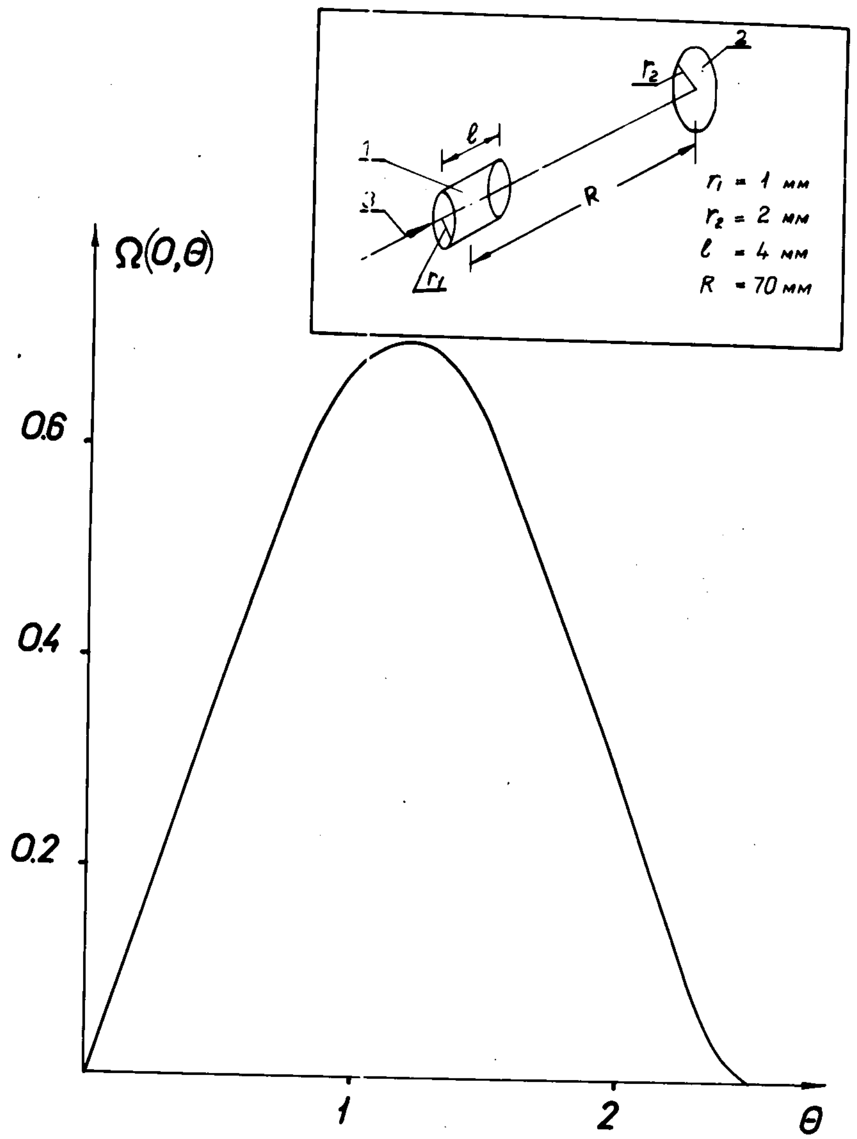

Рис.3 Функция распределения для измерений с использованием газовой мишени.

Литература:

/I/ E.M. Lyman, H.O. Hanson, M.B. Scott Phys. Rev. 84, 626 (1951)

/2/ I.E. Dayton, G. Schrank Phys. Rev 101, 1358 (1956)

/3/ Люк К.Л.Юан, Ву Цзянь-сюн. Измерение характеристик ядерных реакций и пучков частиц, Изд."Мир", Москва (I965), гл.I, § 5.

/4/ А.Собичевски, Я.Тыс, Препринт ОИЯИ 2899.(1966)

/5/ В.И.Смирнов, Курс высшей математики т.4, гл.I, Москва, I958. Изд."Высшая школа".

/6/ Г.М.Осетинский, Б.Сикора, Я.Тыкэ, Б.Фрыщин. Препринт ОИЯИ PI5-5I43 (I970).

/7/ Я.Тыкэ, Б,Фрыщин, Б.Сикора ПТЭ № 3 (I970) 77-79.