ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория Ядерных Реакций

Иванов Э.Л. Перельштейн Э.А.

"Программа расчета транспортировки пучка в магнитном поле с квадрупольной симметрией методом погружения в пространство фазовых моментов"

Дубна 1988 г.

Уравнения движения заряженной частицы с зарядом "ze" и импульсом "P" в магнитном поле с квадрупольной симметрией, с учетом нелинейности третьего порядка по фазовым координатам – x, x', y, y' имеют следующий вид /I/.

$$x'' + kx - \frac{k''}{12} x(x^2 + 3y^2) + \frac{k}{2} x(3x'^2 + y'^2) - k'xyy' - kx'yy' = 0$$

$$y'' - ky + \frac{k''}{12} y(y^2 + 3x^2) - \frac{k}{2} y(3y'^2 + x'^2) + k'yxx' + ky'xx' = 0$$

где: $k = k(s) = \frac{ze}{m}\frac{dB_y}{dx} = \frac{ze}{P}\frac{dB_x}{dy}$ " $'$ " $= \frac{d}{ds}$, " $''$ " $= \frac{d^2}{ds^2}$ и s – независимой переменной.

Эта система нелинейных дифференциальных уравнений аналитически решается методом погружения в пространство фазовых моментов. Решений в двух плоскостях ищутся как векторы с компонентами:

$$\vec{Z}^i = \begin{Vmatrix} \vec{Z}_1^i \\ \vec{Z}_2^i \\ \vec{Z}_3^i \end{Vmatrix} \quad \vec{V}^i = \begin{Vmatrix} \vec{V}_1^i \\ \vec{V}_2^i \\ \vec{V}_3^i \end{Vmatrix} \quad \vec{Z}_1^i = \begin{Vmatrix} x \\ x' \end{Vmatrix} \quad \vec{Z}_2^i = \begin{Vmatrix} x.x.x \\ x.x'.x \\ x.x'.x' \\ x'.x'.x' \end{Vmatrix} \quad \vec{Z}_3^i = \begin{Vmatrix} x.y.y \\ x.y.y' \\ x.y'.y' \\ x'.y.y \\ x'.y'.y \\ x'.y'.y' \end{Vmatrix}$$

Компоненты вектора $\vec{V}^i$ – $\vec{V}_1^i, \vec{V}_2^i$ и $\vec{V}_3^i$ получаются заменой x на y, x' на y' и наоборот в компонентах вектора $\vec{Z}^i$. Фазовые координаты в любой точке будут определяться из векторов /2/.

$$\vec{Z}^i(s) = H^{ij}(s/s_0)\vec{Z}^j(s_0) \; ; \; \vec{V}^i(s) = V^{ij}(s/s_0)\vec{V}^j(s_0)$$

где: $\vec{Z}^j(s_0)$, $\vec{V}^j(s_0)$ – векторы начальных условий, а $H^{ij}(s/s_0)$ и $V^{ij}(s/s_0)$ – матриканты системе линейных уравнений вида:

$$[\vec{Z}^i(s)]' = P[k(s)]\vec{Z}^i(s) \; ; \; [\vec{V}^i(s)]' = P[-k(s)]\vec{V}^i(s)$$

Пусть $\varphi(s) = \sqrt{k(s)}\,(s - s_0)$. Тогда для членов матрикантов $H^{ij}(s/s_0)$ и $V^{ij}(s/s_0)$ получаются следующие выражения:

$$H_{11}^{22} = \cos^3\varphi \; ; \; H_{12}^{22} = \frac{3}{\sqrt{k}}\sin\varphi\cos^2\varphi \; ; \; H_{13}^{22} = \frac{3}{k}\cos\varphi\sin^2\varphi \; ; \; H_{14}^{22} = \frac{1}{k^{3/2}}\sin^3\varphi$$

$$H^{11}_{11} = \cos\varphi \; ; \; H^{11}_{12} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\varphi \; ; \; H^{11}_{21} = -\sqrt{k} \sin\varphi \; ; \; H^{11}_{22} = \cos\varphi$$

$$H^{22}_{21} = -\sqrt{k} \cos^2\varphi \sin\varphi \; ; \; H^{22}_{22} = \cos^3\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi \; ; \; H^{22}_{23} = \frac{1}{\sqrt{k}} (2\cos^2\varphi \sin\varphi - \sin^3\varphi)$$

$$H^{22}_{24} = \frac{1}{k} \sin^2\varphi\cos\varphi \; ; \; H^{22}_{31} = k \sin^2\varphi\cos\varphi \; ; \; H^{22}_{32} = \sqrt{k} (\sin^3\varphi - 2\cos^2\varphi \sin\varphi)$$

$$H^{22}_{33} = \cos^3\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi \; ; \; H^{22}_{34} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\varphi\cos^2\varphi \; ; \; H^{22}_{41} = -k^{3/2} \sin^3\varphi$$

$$H^{22}_{42} = 3k \sin^2\varphi\cos\varphi \; ; \; H^{22}_{43} = -3\sqrt{k} \sin\varphi\cos^2\varphi \; ; \; H^{22}_{44} = \cos^3\varphi \; ; \; H^{33}_{11} = \cos\varphi \, ch^2\varphi$$

$$H^{33}_{12} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cos\varphi \, sh 2\varphi \; ; \; H^{33}_{13} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cos\varphi \, sh^2\varphi \; ; \; H^{33}_{14} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\varphi \, ch^2\varphi \; ; \; H^{33}_{15} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\varphi \, sh 2\varphi$$

$$H^{33}_{16} = \frac{1}{k^{3/2}} \sin\varphi \, sh^2\varphi \; ; \; H^{33}_{21} = \frac{\sqrt{k}}{2} \cos\varphi \, sh 2\varphi \; ; \; H^{33}_{22} = \cos\varphi \, ch 2\varphi \; ; \; H^{33}_{23} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \cos\varphi \, sh 2\varphi$$

$$H^{33}_{24} = \frac{1}{2} \sin\varphi \, sh 2\varphi \; ; \; H^{33}_{25} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\varphi \, ch 2\varphi \; ; \; H^{33}_{26} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \sin\varphi \, sh 2\varphi \; ; \; H^{33}_{31} = k \cos\varphi \, sh^2\varphi$$

$$H^{33}_{32} = \sqrt{k} \cos\varphi \, sh 2\varphi \; ; \; H^{33}_{33} = \cos\varphi \, ch^2\varphi \; ; \; H^{33}_{34} = \sqrt{k} \sin\varphi \, sh^2\varphi \; ; \; H^{33}_{35} = \sin\varphi \, sh 2\varphi$$

$$H^{33}_{36} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\varphi \, ch^2\varphi \; ; \; H^{33}_{41} = -\sqrt{k} \sin\varphi \, ch^2\varphi \; ; \; H^{33}_{42} = -\sin\varphi \, sh 2\varphi \; ; \; H^{33}_{43} = -\frac{1}{\sqrt{k}} \sin\varphi \, sh^2\varphi$$

$$H^{33}_{44} = \cos\varphi \, ch^2\varphi \; ; \; H^{33}_{45} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cos\varphi \, sh 2\varphi \; ; \; H^{33}_{46} = \frac{1}{k} \cos\varphi \, sh^2\varphi \; ; \; H^{33}_{51} = -\frac{k}{2} \sin\varphi \, sh 2\varphi$$

$$H^{33}_{52} = -\sqrt{k} \sin\varphi \, ch 2\varphi \; ; \; H^{33}_{53} = -\frac{1}{2} \sin\varphi \, sh 2\varphi \; ; \; H^{33}_{54} = \frac{\sqrt{k}}{2} \cos\varphi \, sh 2\varphi \; ; \; H^{33}_{55} = \cos\varphi \, ch 2\varphi$$

$$H^{33}_{56} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \cos\varphi \, sh 2\varphi \; ; \; H^{33}_{61} = -k^{3/2} \sin\varphi \, sh^2\varphi \; ; \; H^{33}_{62} = -k \sin\varphi \, sh 2\varphi$$

$$H^{33}_{63} = -\sqrt{k} \sin\varphi \, ch^2\varphi \; ; \; H^{33}_{64} = k \cos\varphi \, sh^2\varphi \; ; \; H^{33}_{65} = \sqrt{k} \cos\varphi \, sh 2\varphi \; ; \; H^{33}_{66} = \cos\varphi \, ch^2\varphi$$

$$H^{12}_{11} = \left(\frac{k'' + 18k}{384k}\right)(\cos\varphi - \cos 3\varphi) + \left(\frac{k'' - 6k^2}{32k}\right) \varphi \sin\varphi$$

$$H^{12}_{12} = \left(\frac{7k'' + 30k^2}{128k^{3/2}}\right) \sin\varphi + \left(\frac{6k^2 - k''}{32k^{3/2}}\right) \varphi\cos\varphi - \left(\frac{k'' + 18k^2}{128k^{3/2}}\right) \varphi \sin\varphi$$

$$H^{12}_{13} = \left(\frac{k'' - 6k^2}{128k^2}\right) \varphi \sin\varphi + \left(\frac{k'' + 18k^2}{128k^2}\right)(\cos 3\varphi - \cos\varphi)$$

$$H^{12}_{14} = \left(\frac{3k'' - 42k^2}{128k^{3/2}}\right) \sin\varphi + \left(\frac{k'' + 18k}{384k^{3/2}}\right) \sin 3\varphi - \left(\frac{k'' + 6k^2}{32k^{3/2}}\right) \varphi\cos\varphi$$

$$H^{12}_{21} = \left(\frac{k'' + 18k^2}{128\sqrt{k}}\right) \sin 3\varphi + \left(\frac{k'' - 6k^2}{32\sqrt{k}}\right) \varphi\cos\varphi + \left(\frac{11k'' - 90k^2}{384\sqrt{k}}\right) \sin\varphi$$

$$H^{12}_{22}=\left(\frac{3k''+54k^2}{128k}\right)(\cos\varphi-\cos 3\varphi)-\left(\frac{k''+30k^2}{32k}\right)\varphi\sin\varphi$$

$$H^{12}_{23}=\left(\frac{k''-6k^2}{32k^{3/2}}\right)\varphi\cos\varphi-\left(\frac{3k''+54k^2}{128k^{3/2}}\right)\sin 3\varphi+\left(\frac{5k''-6k^2}{128k^{3/2}}\right)\sin\varphi$$

$$H^{12}_{24}=\left(\frac{k''+6k^2}{32k^2}\right)\varphi\sin\varphi+\left(\frac{k''+18k^2}{128k^2}\right)(\cos 3\varphi-\cos\varphi)$$

$$H^{13}_{11}=\left(\frac{k''+2k^2}{16k}\right)\varphi\sin\varphi+\frac{k'}{16\sqrt{k}}(\cos\varphi\operatorname{sh}2\varphi+\sin\varphi\operatorname{ch}2\varphi)+\left(\frac{k''+2k^2}{64k}\right)\cos\varphi\operatorname{ch}2\varphi+$$
$$+\left(\frac{k''-6k^2}{64k}\right)\sin\varphi\operatorname{sh}2\varphi-\left(\frac{6k'+3k^{3/2}}{32\sqrt{k}}\right)\sin\varphi$$

$$H^{13}_{12}=\left(\frac{k''-6k^2}{32k^{3/2}}\right)\sin\varphi\operatorname{ch}2\varphi+\left(\frac{k''+2k^2}{32k^{3/2}}\right)\cos\varphi\operatorname{sh}2\varphi+\frac{k'}{8k}(\cos\varphi\operatorname{ch}2\varphi+\sin\varphi\operatorname{sh}2\varphi-\cos\varphi)+$$
$$+\left(\frac{2k^2-3k''}{32k^{3/2}}\right)\sin\varphi$$

$$H^{13}_{13}=\left(\frac{k''+2k^2}{64k^2}\right)(\cos\varphi\operatorname{ch}2\varphi-\cos\varphi-4\varphi\sin\varphi)+\left(\frac{k''-6k^2}{64k^2}\right)\sin\varphi\operatorname{sh}2\varphi+$$
$$+\frac{k'}{16k^{3/2}}(\cos\varphi\operatorname{sh}2\varphi+\sin\varphi\operatorname{ch}2\varphi-3\sin\varphi)$$

$$H^{13}_{14}=\left(\frac{5k''}{64k^{3/2}}+\frac{3\sqrt{k}}{64}-\frac{3k^{3/2}}{16}\right)\sin\varphi-\left(\frac{k''}{16k^{3/2}}+\frac{\sqrt{k}}{8}\right)\varphi\cos\varphi+\frac{k'}{16k}\cos\varphi+\left(\frac{3\sqrt{k}}{64}-\frac{k''}{128k^{3/2}}\right)\cos\varphi\operatorname{sh}2\varphi+$$
$$+\left(\frac{k''}{128k^{3/2}}+\frac{\sqrt{k}}{64}\right)\sin\varphi\operatorname{ch}2\varphi+\frac{k'}{32k}(\sin\varphi\operatorname{sh}2\varphi-\cos\varphi\operatorname{ch}2\varphi)$$

$$H^{13}_{15}=\left(\frac{k''}{32k^2}-\frac{3}{16}\right)\cos\varphi+\frac{k'}{8k^{3/2}}(\sin\varphi+\operatorname{ch}2\varphi\sin\varphi-\cos\varphi\operatorname{sh}2\varphi)+\frac{1}{16}(3\operatorname{ch}2\varphi\cos\varphi+\operatorname{sh}2\varphi\sin\varphi)+$$
$$+\frac{k''}{32k^2}(\operatorname{ch}2\varphi\sin\varphi-\operatorname{ch}2\varphi\cos\varphi)$$

$$H^{13}_{16}=\frac{k''}{64k^{3/2}}(\operatorname{ch}2\varphi\sin\varphi-\operatorname{sh}2\varphi\cos\varphi-3\sin\varphi)+\frac{k'}{16k^2}(\cos\varphi-\operatorname{ch}2\varphi\cos\varphi+\operatorname{sh}2\varphi\sin\varphi)+$$
$$+\frac{1}{32\sqrt{k}}(3\operatorname{sh}2\varphi\cos\varphi+\operatorname{ch}2\varphi\sin\varphi+11\sin\varphi)+\left(\frac{k''}{16k^{3/2}}+\frac{1}{8\sqrt{k}}\right)\varphi\cos\varphi$$

$$H^{13}_{21}=\left(\frac{k''}{64\sqrt{k}}+\frac{k^{3/2}}{32}\right)(5\sin\varphi+4\varphi\cos\varphi)+\frac{k''}{64\sqrt{k}}(3\operatorname{sh}2\varphi\cos\varphi+\operatorname{ch}2\varphi\sin\varphi)-\frac{k'}{16}(3\cos\varphi+$$
$$+3\operatorname{sh}2\varphi\cos\varphi+\operatorname{ch}2\varphi\sin\varphi)+\frac{k^{3/2}}{32}(-\operatorname{sh}2\varphi\cos\varphi-7\operatorname{ch}2\varphi\sin\varphi)$$

$$H^{13}_{22}=\frac{k''}{32k}(3\operatorname{ch}2\varphi\cos\varphi+\operatorname{sh}2\varphi\sin\varphi-3\cos\varphi)+\frac{k'}{8\sqrt{k}}\left(3\operatorname{sh}2\varphi\cos\varphi+\operatorname{ch}2\varphi\sin\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi\right)-$$
$$-\frac{k}{16}(\operatorname{ch}2\varphi\cos\varphi+7\operatorname{sh}2\varphi\sin\varphi-\cos\varphi)$$

$$H^{13}_{23}=\frac{k''}{64k^{3/2}}(3\operatorname{sh}2\varphi\cos\varphi+\operatorname{ch}2\varphi\sin\varphi-3\sin\varphi-4\varphi\cos\varphi)+\frac{k'}{16k}(\operatorname{sh}2\varphi\sin\varphi+3\operatorname{sh}2\varphi\cos\varphi-$$
$$-3\cos\varphi)-\frac{\sqrt{k}}{32}(7\operatorname{ch}2\varphi\sin\varphi+\operatorname{sh}2\varphi\cos\varphi+3\sin\varphi+4\varphi\cos\varphi)$$

$$V_{11}^{12} = \frac{K''}{384K}\left(\operatorname{ch}\varphi - \operatorname{ch}3\varphi - 12\varphi\operatorname{sh}\varphi\right) + \frac{3K}{64}\left(\operatorname{ch}3\varphi - 4\varphi\operatorname{sh}\varphi - \operatorname{ch}\varphi\right)$$

$$V_{12}^{12} = \frac{K''}{128K^{3/2}}\left(7\operatorname{sh}\varphi - 4\varphi\operatorname{ch}\varphi - \operatorname{sh}3\varphi\right) + \frac{3\sqrt{K}}{64}\left(3\operatorname{sh}3\varphi - 4\varphi\operatorname{ch}\varphi - 5\operatorname{sh}\varphi\right)$$

$$V_{13}^{12} = \frac{K''}{128K^2}\left(\operatorname{ch}\varphi - \operatorname{ch}3\varphi + 4\varphi\operatorname{sh}\varphi\right) + \frac{3}{64}\left(3\operatorname{ch}3\varphi + 4\varphi\operatorname{sh}\varphi - 3\operatorname{ch}\varphi\right)$$

$$V_{14}^{12} = \frac{K''}{384K^{5/2}}\left(12\varphi\operatorname{ch}\varphi - \operatorname{sh}3\varphi - 9\operatorname{sh}\varphi\right) + \frac{3}{64\sqrt{K}}\left(4\varphi\operatorname{ch}\varphi + \operatorname{sh}3\varphi - 7\operatorname{sh}\varphi\right)$$

$$V_{21}^{12} = \frac{3K^{3/2}}{64}\left(3\operatorname{sh}3\varphi - 4\varphi\operatorname{ch}\varphi - 5\operatorname{sh}\varphi\right) - \frac{K''}{384\sqrt{K}}\left(3\operatorname{sh}3\varphi + 12\varphi\operatorname{ch}\varphi + 11\operatorname{sh}\varphi\right)$$

$$V_{22}^{12} = \frac{K''}{128K}\left(3\operatorname{ch}\varphi - 3\operatorname{ch}3\varphi - 4\varphi\operatorname{sh}\varphi\right) + \frac{3K}{64}\left(9\operatorname{ch}3\varphi - 4\varphi\operatorname{sh}\varphi - 9\operatorname{ch}\varphi\right)$$

$$V_{23}^{12} = \frac{K''}{128K^{3/2}}\left(5\operatorname{sh}\varphi - 3\operatorname{sh}3\varphi + 4\varphi\operatorname{ch}\varphi\right) + \frac{3\sqrt{K}}{64}\left(9\operatorname{sh}3\varphi + 4\varphi\operatorname{ch}\varphi + \operatorname{sh}\varphi\right)$$

$$V_{24}^{12} = \frac{K''}{384K^2}\left(12\varphi\operatorname{sh}\varphi - 3\operatorname{ch}3\varphi + 3\operatorname{ch}\varphi\right) + \frac{3}{64}\left(4\varphi\operatorname{sh}\varphi + 3\operatorname{ch}3\varphi - 3\operatorname{ch}\varphi\right)$$

$$V_{11}^{13} = \frac{K''}{64K}\left(\operatorname{ch}\varphi\cos2\varphi - \operatorname{sh}\varphi\sin2\varphi - 4\varphi\operatorname{sh}\varphi - \operatorname{ch}\varphi\right) + \frac{K'}{16\sqrt{K}}\left(3\operatorname{sh}\varphi - \operatorname{sh}\varphi\cos2\varphi - \operatorname{ch}\varphi\sin2\varphi\right) + \frac{K}{32}\left(4\varphi\operatorname{sh}\varphi + \operatorname{ch}\varphi - \operatorname{ch}\varphi\cos2\varphi - 3\operatorname{sh}\varphi\sin2\varphi\right)$$

$$V_{12}^{13} = \frac{K''}{32K^{3/2}}\left(\operatorname{ch}\varphi\sin2\varphi + \operatorname{sh}\varphi\cos2\varphi - 3\operatorname{sh}\varphi\right) + \frac{K'}{8K}\left(\operatorname{ch}\varphi\cos2\varphi - \operatorname{sh}\varphi\sin2\varphi - \operatorname{ch}\varphi\right) + \frac{\sqrt{K}}{16}\left(3\operatorname{sh}\varphi\cos2\varphi - \operatorname{ch}\varphi\sin2\varphi - \operatorname{sh}\varphi\right)$$

$$V_{13}^{13} = \frac{K''}{64K^2}\left(\operatorname{ch}\varphi - 4\varphi\operatorname{sh}\varphi - \operatorname{ch}\varphi\cos2\varphi + \operatorname{sh}\varphi\sin2\varphi\right) + \frac{K'}{16K^{3/2}}\left(\operatorname{sh}\varphi\cos2\varphi + \operatorname{ch}\varphi\sin2\varphi - 3\operatorname{sh}\varphi\right) + \frac{1}{32}\left(4\varphi\operatorname{sh}\varphi - \operatorname{ch}\varphi + \operatorname{ch}\varphi\cos2\varphi + 3\operatorname{sh}\varphi\sin2\varphi\right)$$

$$V_{14}^{13} = \frac{K''}{64K^{3/2}}\left(5\operatorname{sh}\varphi - 4\varphi\operatorname{ch}\varphi + \operatorname{sh}\varphi\cos2\varphi - \operatorname{ch}\varphi\sin2\varphi\right) + \frac{K'}{16K}\left(\operatorname{ch}\varphi - \operatorname{ch}\varphi\cos2\varphi - \operatorname{sh}\varphi\sin2\varphi\right) + \frac{\sqrt{K}}{32}\left(4\varphi\operatorname{ch}\varphi + 3\operatorname{sh}\varphi - \operatorname{sh}\varphi\cos2\varphi - \operatorname{ch}\varphi\sin2\varphi\right)$$

$$V_{15}^{13} = \frac{K''}{32K^2}\left(\operatorname{ch}\varphi\cos2\varphi - \operatorname{ch}\varphi + \operatorname{sh}\varphi\sin2\varphi\right) + \frac{K'}{8K^{3/2}}\left(\operatorname{sh}\varphi + \operatorname{sh}\varphi\cos2\varphi - \operatorname{ch}\varphi\sin2\varphi\right) + \frac{1}{16}\left(3\operatorname{ch}\varphi\cos2\varphi - \operatorname{sh}\varphi\sin2\varphi - 3\operatorname{ch}\varphi\right)$$

$$V_{16}^{13} = \frac{K''}{64K^{5/2}}\left(\operatorname{ch}\varphi\sin2\varphi - \operatorname{sh}\varphi\cos2\varphi + 3\operatorname{sh}\varphi - 4\varphi\operatorname{ch}\varphi\right) + \frac{K'}{16K^2}\left(\operatorname{ch}\varphi\cos2\varphi + \operatorname{sh}\varphi\sin2\varphi - \operatorname{ch}\varphi\right) + \frac{1}{32\sqrt{K}}\left(4\varphi\operatorname{ch}\varphi - 11\operatorname{sh}\varphi + \operatorname{sh}\varphi\cos2\varphi + \operatorname{ch}\varphi\sin2\varphi\right)$$

$$V_{21}^{13} = \frac{K''}{64\sqrt{K}}\left(-4\varphi\operatorname{ch}\varphi - 5\operatorname{sh}\varphi - \operatorname{sh}\varphi\cos2\varphi - \operatorname{ch}\varphi\sin2\varphi\right) + \frac{K'}{16}\left(3\operatorname{ch}\varphi - 3\operatorname{ch}\varphi\cos2\varphi + \operatorname{sh}\varphi\sin2\varphi\right) + \frac{K^{3/2}}{32}\left(4\varphi\operatorname{ch}\varphi + 5\operatorname{sh}\varphi - 7\operatorname{sh}\varphi\cos2\varphi - \operatorname{ch}\varphi\sin2\varphi\right)$$

$$V_{22}^{13} = \frac{k''}{32k}\left(3ch\varphi\cos 2\varphi - 3ch\varphi - sh\varphi\sin 2\varphi\right) - \frac{k'}{8\sqrt{k}}\left(sh\varphi + sh\varphi\cos 2\varphi + 3ch\varphi\sin 2\varphi\right) + \frac{k}{16}\left(ch\varphi\cos 2\varphi - ch\varphi - 7\sin 2\varphi\, sh\varphi\right)$$

$$V_{23}^{13} = \frac{k''}{64k^{3/2}}\left(sh\varphi\cos 2\varphi - 4\varphi ch\varphi - 3sh\varphi + 3ch\varphi\sin 2\varphi\right) + \frac{k'}{16k}\left(3ch\varphi\cos 2\varphi - 3ch\varphi - sh\varphi\sin 2\varphi\right) + \frac{\sqrt{k}}{32}\left(4\varphi ch\varphi + 3sh\varphi + 7sh\varphi\cos 2\varphi + ch\varphi\sin 2\varphi\right)$$

$$V_{24}^{13} = \frac{k''}{64k}\left(ch\varphi - 4\varphi sh\varphi - ch\varphi\cos 2\varphi - 3sh\varphi\sin 2\varphi\right) + \frac{k'}{16\sqrt{k}}\left(sh\varphi - 3sh\varphi\cos 2\varphi + ch\varphi\sin 2\varphi\right) + \frac{k}{32}\left(4\varphi sh\varphi + 7ch\varphi - 7ch\varphi\cos 2\varphi - sh\varphi\sin 2\varphi\right)$$

$$V_{25}^{13} = \frac{k''}{32k^{3/2}}\left(3sh\varphi\cos 2\varphi - sh\varphi - ch\varphi\sin 2\varphi\right) + \frac{k'}{8k}\left(ch\varphi - ch\varphi\cos 2\varphi - 3sh\varphi\sin 2\varphi\right) + \frac{\sqrt{k}}{16}\left(sh\varphi\cos 2\varphi - 3sh\varphi - 7ch\varphi\sin 2\varphi\right)$$

$$V_{26}^{13} = \frac{k''}{64k^2}\left(ch\varphi\cos 2\varphi + 3sh\varphi\sin 2\varphi - 4\varphi sh\varphi - ch\varphi\right) + \frac{k'}{16k^{3/2}}\left(3sh\varphi\cos 2\varphi - sh\varphi - ch\varphi\sin 2\varphi\right) + \frac{1}{32}\left(4\varphi sh\varphi - 7ch\varphi + 7ch\varphi\cos 2\varphi + sh\varphi\sin 2\varphi\right)$$

Задавая начальные данные (например как матрица – столбец) и используя групповое свойство матрицантов в плоскостях x, x' и y, y' мы получим фазовые координаты пучка в любом сечении линзы.

$$H(s^*/s_0) = \prod_{i=1}^{n} H(s_i/s_{i-1})\ ;\ V(s^*/s_0) = \prod_{i=1}^{n} V(s_i/s_{i-1})$$

где n – число участков постоянства $k(s)$, $k'(s)$ и $k''(s)$, $s_i = s_0 + (i-1)\Delta\ell$, а $\Delta\ell$ есть элементарное приращение независимой переменной .

Для расчета динамики частиц в магнитном поле с квадрупольной симметрией, по приведенным выше формулам составлена программа "QUADRU-POL ". Текст программы дается в Приложение I.

Начальные фазовые координаты частицы задаются генератором случайных чисел в эллипсе с полуосями $QM = x' = V_x/V_s$ или $QM = y' = V_y/V_s$ и $XM = x_{макс.}$ или $XM = y_{макс.}$. Программа генератора случайных чисел написана на языке "BASIC " – см. Приложение 2.

С помощью массива данных магнитных измерений, записанных на дискете, вычисляется градиент поля $k=k(s)$ в каждом сечении измерения по длине линзы с использованием восьмиточечной Лагранжевой интерполяции в точках x=0, y=0. Первая и вторая производная градиента по длине вычисляются четырехточечной интерполяции с использованием результатов данных распределения градиента вдоль направление движения частицы на каждом шагу интегрирования уравнений движения.

Энергия - EN, атомное число - AE, заряд иона - Z, а также размерности массива магнитных измерений A(L,M,N) задаются в тексте программы. Число шагов - Nstep, длина одного шага - DL и количество пропускаемых частиц Npart вводятся клавиатурой.

В подпрограмме " MATRIX " задаются компоненты матрицантов $H(s_i/s_{i-1})$, $V(s_i/s_{i-1})$ и вычисляются элементы векторов $\vec{Z}(s_i)$ и $\vec{V}(s_i)$ на каждом шаге.

Сравнительный расчет программы " QUADRUPOL " и программы численного интегрирования уравнений движения предикторно корректорным методом " HPCG " показывает высокую точность расчета с программы " QUADRUPOL " при одиноковых времена счета $\sim$ 35 сек. за одну частицу. Относительная ошибка предикторно корректорного метода в программе " HPCG " задавалась $\varepsilon = 10^{-5}$ /3,4/.

Все расчеты велись на персональном компютере "Правец -16" с сопроцессором. Уменьшение количества шагов по длине линзы в 5 раз для программы " QUADRUPOL " дает незначительную ошибку - примерно десятую часть ошибки, допускаемой программой " HPCG ", а также уменьшении времени счета $\sim$ 4.5 раза. Следовательно для достижения одиноковой точности разница в счетном времени для обоих программ будет существенна.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Андрианов С.Н. Дымников А.Д. Осетинский Г.М. - ОИЯИ, Б1-9-12851, Дубна, 1979 г.

2. Дымников А.Д. - сб."Программирование и методы решения физических задач", Дубна, 1978 г. стр.300

3. Ralston Wilf, Mathematical Methods for Digital Computers, Wiley, New York/London, 1960, p.95-109.

4. Ralston, Runge-Kutta Methods With Minimum Errors Bounds, MTAC, vol 16, ISS.80 (1962), p.431-437.