ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б 1-9-85-751

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 1985 г

ОБЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

КЛЕНИН Б. А.

К УРАВНЕНИЯМ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

ДУБНА, I985 г.

АННОТАЦИЯ

В работе, в рамках классической электродинамики, обоснован и развит новый подход к выводу релятивистских уравнений движения заряженных частиц в электромагнитных полях. Основой работы являются новые определения электрического и магнитного полей. Наряду с известным уравнением движения Ньютона-Лоренца, получено новое уравнение в градиентной форме, описывающее пространственное изменение квадрата импульса частиц в электрическом и магнитном полях. Из последнего уравнения получен ряд интегралов движения, в том числе зависимость массы частицы от ее скорости и закон взаимной связи массы и энергии.

Показано, что система дифференциальных уравнений, описывающих траекторию заряженной частицы в электромагнитном поле, может быть получена из уравнения в градиентной форме.

Уравнения движения заряженных частиц в электромагнитном поле можно получить из уравнения движения Ньютона если силой, действующей на заряд, является сила Лоренца, определяющая эти поля.

В данной работе приведен вывод уравнений движения заряженных частиц, основанный на иной форме определения полей.

I. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ.

Рассмотрим электрическое и магнитное поля в пространстве свободно от их источников, описывающиеся уравнениями Максвелла:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad div\,\vec{H} = 0, \tag{I}$$

$$rot\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad div\,\vec{E} = 0. \tag{2}$$

Известно, что для решения уравнений (I) и (2) оказывается удобным ввести скалярный φ и векторный $\vec{A}$ потенциалы. Предположим, что скалярный потенциал $\varphi = 0$, тогда

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}, \quad \vec{H} = rot\,\vec{A}, \tag{3}$$

и первая пара уравнений Максвелла удовлетворяется тождественно. Из второй пары уравнений (2) следует, что при условии:

$$div\,\vec{A} = 0 \tag{4}$$

потенциал $\vec{A}$ должен удовлетворять волновому уравнению

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

Рассмотрим однородное магнитное поле. Векторный потенциал такого поля выражается через его напряженность в виде /I/

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{H}\times\vec{r}, \tag{6}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор. Умножая левые и правые части уравнения (3) на заряд e, а второго уравнения и уравнений (4) и (5) на e/c и подставляя вместо $\vec{A}$ выражение (6), будем иметь:

$$e\vec{E} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e}{c}\vec{H}\times\vec{r}\right), \tag{7}$$

$$\frac{e}{c}\vec{H} = \frac{1}{2}\,rot\left(\frac{e}{c}\vec{H}\times\vec{r}\right), \tag{8}$$

$$div\left(\frac{e}{c}\vec{H}\times\vec{r}\right) = 0, \tag{9}$$

$$\nabla^2\left(\frac{e}{c}\vec{H}\times\vec{r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{e}{c}\vec{H}\times\vec{r}\right) = 0. \tag{IO}$$

Так как произведение $\frac{e}{c}\vec{H}\times\vec{r}$ имеет размерность имрульса, то введем векторное поле импульсов заряженных частиц $\vec{P}$:

$$\vec{P}=m\vec{v}=-\frac{e}{c}\vec{H}\times\vec{r}, \tag{II}$$

где $m\neq Const$ и $v\neq Const$ -масса и скорость частиц. Тогда из (7) - (IO) получим:

$$\vec{E}=\frac{1}{2e}\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}, \tag{I2}$$

$$\vec{H}=-\frac{c}{2e}\,rot\,\vec{P}, \tag{I3}$$

$$\nabla^2\vec{P}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}=0, \tag{I4}$$

$$div\,\vec{P}=0. \tag{I5}$$

Соотношения (I2) и (I3) будем считать определениями электрического и магнитного полей, (I4) и (I5) уравнениями, которым должны удовлетворять импульсы заряженных частиц. Для того чтобы импульс (II) удовлетворял волновому уравнению (I4) необходимо, чтобы

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=Const.$$

Следовательно, определения электрического и магнитного полей (I2) и (I3) являются справедливыми, если магнитное поле однородно и линейно изменяется со временем.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ.

Умножим левую и правую части (I3) векторно на $\vec{P}$:

$$\vec{P}\times rot\,\vec{P}=-2\frac{e}{c}\vec{P}\times\vec{H}. \tag{I6}$$

Из векторного анализа известно, что

$$\vec{P}\times rot\,\vec{P}=\frac{1}{2}\nabla P^2-(\vec{P}\nabla)\vec{P}. \tag{I7}$$

Подставляя выражение для $\vec{P}\times rot\,\vec{P}$ из (I6) в (I7), получим:

$$\frac{1}{2}\nabla P^2-m(\vec{v}\nabla)\vec{P}=-2\frac{e}{c}\vec{P}\times\vec{H}. \tag{I8}$$

Кроме того, производную $d\vec{P}/dt$ можно записать как

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{P}. \qquad (19)$$

Поэтому из соотношений (18) и (19) с учетом определения электрического поля (12), получим следующее уравнение:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}-\frac{1}{2m}\nabla P^2=2\left(e\vec{E}+\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}\right). \qquad (20)$$

Левая и правая части уравнения (20) имеют одинаковые размерности LMT^{-2} (система СГС), то есть размерность силы. Действительно $e\vec{E}+\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}$ в (20) это сила Лоренца, действующая на заряженную частицу. Поэтому уравнение (20) является уравнением, описывающим взаимодействие зарядов и электромагнитного поля.

Пусть $\vec{E}=0$ тогда, умножив левую и правую части уравнения (20) скалярно на $\vec{v}$ и, учитывая, что

$$\vec{v}(\vec{v}\times\vec{H})=\vec{H}(\vec{v}\times\vec{v})=0,$$

получим

$$\vec{v}\left(\frac{d\vec{P}}{dt}-\frac{1}{2m}\nabla P^2\right)=0, \qquad (21)$$

то есть векторы $\vec{v}$ и $\left(\frac{d\vec{P}}{dt}-\frac{1}{2m}\nabla P^2\right)$ являются ортогональными. Из определения градиента скалярной функции вектор $1/2m\nabla P^2$ направлен по нормали к поверхности уровня, которой является траектория движения частицы, в сторону возрастания $\vec{P}$, тоесть в сторону увеличения r, поскольку $P^2=e^2/c^2H^2r^2$. В силу (21), вектор $d\vec{P}/dt$ является ортогональным к траектории движения и направлен к центру ее кривизны. Следовательно, векторы $d\vec{P}/dt$ и $1/2m\nabla P^2$ являются взаимно противоположными. Из уравнения (20) следует, что

$$\left|\frac{d\vec{P}}{dt}-\vec{f}_M\right|=\left|\frac{1}{2m}\nabla P^2+\vec{f}_M\right|,$$

где $\vec{f}_M$ - магнитная сила Лоренца. Поэтому векторы $d\vec{P}/dt-\vec{f}_M$ и $1/2m\nabla P^2+\vec{f}_M$ являются или взаимно противоположными и тогда

$$\frac{d\vec{P}}{dt}+\frac{1}{2m}\nabla P^2=0, \qquad (22)$$

или направлены в одну сторону и в этом случае:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}+\frac{1}{2m}\nabla P^2=\vec{K}. \qquad (23)$$

Решениями уравнений (20) и (22) и (20) и (23) относительно векторов $d\vec{P}/dt$ и $1/2m\,\nabla P^2$ являются:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H},$$
$$\frac{1}{2m}\nabla P^2=-\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}, \qquad (24)$$

или

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}+\frac{1}{2}\vec{K},$$

$$\frac{1}{2m}\nabla P^2=-\left(\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}-\frac{1}{2}\vec{K}\right), \qquad (25)$$

где $\vec{K}$ - дополнительная сила.

Экспериментальные результаты, полученные при исследовании движения заряженных частиц в электромагнитном поле, не дают оснований для существования дополнительной силы кроме электромагнитной, поэтому $\vec{K}=0$ и уравнения (24) и (25) являются тождественными.

В общем случае движения заряженных частиц в электромагнитном поле уравнение (20) можно записать в виде

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}-\vec{f}_M\right)-\vec{f}_{эл.}=\left(\frac{1}{2m}\nabla P^2+\vec{f}_M\right)+\vec{f}_{эл.},$$

где $\vec{f}_{эл.}$ электрическая сила Лоренца. Из него видно, что электрическое поле приводит к повороту взаимно противоположных векторов $d\vec{P}/dt-\vec{f}_M$ и $1/2m\,\nabla P^2+\vec{f}_M$ на один и тот же угол в одном направлении и увеличению их модулей на одинаковую величину. Поэтому векторы $d\vec{P}/dt-\vec{F}$ и $1/2m\,\nabla P^2+\vec{F}$, где $\vec{F}$ полная сила Лоренца, остаются взаимно противоположными, и, следовательно, уравнение (22) справедливо и для электромагнитного поля. Поэтому, полная система уравнений движения заряженных частиц в электрическом и магнитном полях имеет вид

$$\frac{d\vec{P}}{dt}-\frac{1}{2m}\nabla P^2=2\left(e\vec{E}+\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}\right),$$
$$\frac{d\vec{P}}{dt}+\frac{1}{2m}\nabla P^2=0.$$

Складывая и вычитая левые и правые части системы (26), получим

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H} , \tag{27}$$

$$\frac{1}{2m}\nabla P^2 = -\left(e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}\right). \tag{28}$$

Уравнение (27) - известное уравнение движения Ньютона - Лоренца. Второе уравнение (28) описывает пространственное изменение квадрата импульса заряженных частиц при их движении в электромагнитном поле.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ГРАДИЕНТНОЙ ФОРМЕ.

Исследуем уравнение (28) и покажем, что из него можно получить достаточно полную информацию о движении заряженной частицы в электромагнитном поле. Для этого запишем его в виде

$$\frac{1}{2m}\nabla P^2 = \vec{F} , \tag{29}$$

где $\vec{F} = -\left(e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}\right)$ - сила Лоренца. Согласно определению градиента скалярной функции /2/, уравнение (29) можно представить как

$$\frac{1}{2m}\frac{\partial P^2}{\partial n}\vec{n} = \vec{F} , \tag{30}$$

где $\vec{n}$ - еденичный вектор, направленный по нормали к поверхности уровня векторного поля $\vec{P}$.*) Умножив (30) на $\vec{n}dn$, получим

$$\frac{1}{2m}dP^2 = \vec{F}\vec{n}dn = d\mathcal{E} , \tag{31}$$

где $d\mathcal{E}$ - приращение энергии частиц, находящихся на бесконечно близких поверхностях уровня векторного поля $\vec{P}$. Так как $P^2 = m^2 v^2$, то (31) можно привести к уравнению:

$$\frac{dm}{m} + \frac{1}{2}\frac{dv^2}{v^2} = \frac{d\mathcal{E}}{mv^2} , \tag{32}$$

*) Поверхности уровня могут вырождаться в линии и точки.

связывающего массу, скорость и энергию частицы. Для его решения будем считать, что скорость света является предельной скоростью частицы при приближении к которой $\lim_{v \to c} dv/v = 0$, а $dm/m \neq 0$, тогда из уравнения (32) следует, что

$$\mathcal{E} = mc^2 + C_1, \qquad (33)$$

где C_1 - постоянная интегрирования. Предположим, что соотношение (33) справедливо для всего интервала изменения скорости $0 \leq v < c$ (ниже будет показано, что это предположение является оправданным), тогда, подставляя (33) в (32), будем иметь

$$\frac{dm}{m} + \frac{1}{2}\frac{dv^2}{v^2} = \frac{d(mc^2)}{mv^2}. \qquad (34)$$

После преобразования (34) приводится к виду:

$$d(\ln m^2) = \frac{d\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}. \qquad (35)$$

Интегрируя уравнение (35), получим

$$\ln\left[m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] = \ln C_2, \qquad (36)$$

где C_2 - постоянная интегрирования, а $1 - v^2/c^2 > 0$. Из (36) следует, что

$$m = \sqrt{\frac{C_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (37)$$

Будем считать, что при $v = 0$, $m = m_0$, где m_0 - масса покоя частицы, тогда $C_2 = m_0^2$, и из (37) получим известную зависимость массы частицы от ее скорости

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (38)$$

Подставляя (38) в (33), будем иметь

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + C_1.$$

Принимая, что при $v = 0$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 = m_0 c^2$, получим $C_1 = 0$ и, следовательно

$$\mathcal{E} = mc^2. \qquad (39)$$

Соотношение (39) - известный закон взаимной связи массы и энергии частицы. Подставляя (38) и (39) в исходное уравнение (32) можно убедится, что $m=f(v^2/c^2)$ и $\mathcal{E}=f(v^2/c^2)$ являются решением этого уравнения для всего интервала изменения скорости частицы $0 \leq v^2/c^2 < 1$.
Из (38) следует выражение для релятивистского импульса частицы

$$\vec{P}=m\vec{v}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}, \tag{40}$$

а из (39) и (40), при возведении их в квадрат, соотношение между энергией и импульсом:

$$P^2=\frac{\mathcal{E}^2-\mathcal{E}_0^2}{c^2}. \tag{4I}$$

Рассмотрим постоянное электромагнитное поле. Так как электрическое поле $\vec{E}$ в этом случае выражается через скалярный потенциал соотношением

$$\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi,$$

то уравнение (28) можно записать в виде

$$\frac{1}{2m}\nabla P^2=e\nabla\varphi-\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}. \tag{42}$$

Или, используя соотношение (4I) между энергией и импульсом, будем иметь:

$$\nabla(\mathcal{E}-e\varphi)=-\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}. \tag{43}$$

Запишем уравнение (43) аналогично (30) в виде

$$\frac{\partial(\mathcal{E}-e\varphi)}{\partial n}\vec{n}=\vec{f}, \tag{44}$$

где $\vec{f}=-e/c\,\vec{v}\times\vec{H}$. Умножив левую и правую части (44) на $\vec{n}\,dn$, получим:

$$\frac{\partial(\mathcal{E}-e\varphi)}{\partial n}\vec{n}\cdot\vec{n}\,dn=\vec{f}\cdot\vec{n}\,dn,$$

или

$$d(\mathcal{E}-e\varphi)=dT. \tag{45}$$

Интегрируя уравнение (45), находим:

$$\mathcal{E}-e\varphi-T=C_1.$$

Постоянную интегрирования C_1 опредилим из следующих условий: $v=0$, $\varphi=0$, $T=0$, $\mathcal{E}=m_0c^2$, отсюда $C_1=m_0c^2$ и, поэтому:

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \tag{46}$$

Следовательно, при движении заряженной частицы в постоянном электромагнитном поле к ее энергии добавляется член $e\varphi$, который является потенциальной энергией заряда в поле.

Систему уравнений движения заряженных частиц в электрическом и магнитном полях можно получить воспользовавшись для этого уравнением (28) и уравнением линий векторного поля $\vec{P}$:

$$\begin{aligned} &\nabla P^2 = -2\left(em\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{P}\times\vec{H}\right), \\ &d\vec{R}\times\vec{P} = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Рассмотрим цилиндрическую систему координат и запишем векторные уравнения (47) в виде скалярных:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P^2}{\partial r} = -2emE_r - 2\frac{e}{c}\left(P_\varphi H_z - P_z H_\varphi\right), \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial P^2}{\partial \varphi} = -2emE_\varphi - 2\frac{e}{c}\left(P_z H_r - P_r H_z\right), \\ &\frac{\partial P^2}{\partial z} = -2emE_z - 2\frac{e}{c}\left(P_r H_\varphi - P_\varphi H_r\right), \\ &\frac{dr}{P_r} = r\frac{d\varphi}{P_\varphi} = \frac{dz}{P_z}, \end{aligned} \tag{48}$$

где $r(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$ - координаты траектории движения частицы с импульсом $\vec{P}$. Так как $P^2 = P_r^2 + P_\varphi^2 + P_z^2$, то первое уравнение (48) запишем как

$$P_r\frac{\partial P_r}{\partial r} + P_\varphi\frac{\partial P_\varphi}{\partial r} + P_z\frac{\partial P_z}{\partial r} = emE_r - \frac{e}{c}\left(P_\varphi H_z - P_z H_\varphi\right). \tag{49}$$

Умножив левую и правую части (49) на r/P_φ $(P_\varphi \neq 0)$ и, учитывая (13), получим:

$$\frac{\partial P_r}{\partial \varphi} + r\frac{P_r}{P_\varphi}\frac{\partial P_r}{\partial r} + r\frac{P_z}{P_\varphi}\frac{\partial P_r}{\partial z} - P_\varphi = -\frac{emrE_r}{P_\varphi} + \frac{e}{c}r\left(H_z - \frac{P_z}{P_\varphi}H_\varphi\right). \tag{50}$$

В качестве новой независимой переменной выберем угол φ. С учетом четвертого уравнения (48) полная производная $dP_r/d\varphi$ равна

$$\frac{dP_r}{d\varphi}=\frac{\partial P_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial P_r}{\partial r}\frac{dr}{d\varphi}+\frac{\partial P_z}{\partial z}\frac{dz}{d\varphi}+\frac{\partial P_r}{\partial t}\frac{dt}{d\varphi}= \tag{51}$$
$$\frac{\partial P_r}{\partial\varphi}+r\frac{P_r}{P_\varphi}\frac{\partial P_r}{\partial r}+r\frac{P_z}{P_\varphi}\frac{\partial P_z}{\partial z}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial P_r}{\partial t},$$

где ω – угловая скорость частицы:

$$\frac{dt}{d\varphi}=\frac{1}{\omega}=\frac{r}{v_\varphi}=\frac{mr}{P_\varphi}. \tag{52}$$

Подставляя (52) в (51) и, учитывая (12), получим:

$$\frac{dP_r}{d\varphi}=\frac{\partial P_r}{\partial\varphi}+r\frac{P_r}{P_\varphi}\frac{\partial P_r}{\partial r}+r\frac{P_z}{P_\varphi}\frac{\partial P_r}{\partial z}+2\frac{emr}{P_\varphi}E_r. \tag{53}$$

С учетом (53) уравнение (50) запишется как

$$\frac{dP_r}{d\varphi}-P_\varphi=\frac{emr}{P_\varphi}E_r+\frac{e}{c}r\left(H_z-\frac{P_z}{P_\varphi}H_\varphi\right).$$

Аналогично и для других уравнений (48). Окончательно имеем следующую систему уравнений движения заряженной частицы:

$$\frac{dP_r}{d\varphi}-P_\varphi=\frac{emr}{P_\varphi}E_r+\frac{er}{cP_\varphi}\left(P_\varphi H_z-P_z H_\varphi\right),$$

$$\frac{dP_\varphi}{d\varphi}+P_r=\frac{emr}{P_\varphi}E_\varphi+\frac{er}{cP_\varphi}\left(P_z H_r-P_r H_z\right), \tag{54}$$

$$\frac{dP_z}{d\varphi}=\frac{emr}{P_\varphi}E_z+\frac{er}{cP_\varphi}\left(P_r H_\varphi-P_\varphi H_r\right),$$

$$\frac{dm}{d\varphi}=\frac{er}{c^2P_\varphi}\left(P_r E_r+P_\varphi E_\varphi+P_z E_z\right),$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=r\frac{P_r}{P_\varphi},\quad \frac{dz}{d\varphi}=r\frac{P_z}{P_\varphi}.$$

Четвертое уравнение системы (54) можно получить из первого уравнения (47), умножив его левую и правую части скалярно на $\vec{P}$:

$$\vec{P}\nabla P^2 = -2em\vec{P}\vec{E},$$

или, умножив его на r/P_φ, получим:

$$r\frac{P_r}{P_\varphi}\frac{\partial P^2}{\partial r} + \frac{\partial P^2}{\partial \varphi} + r\frac{P_z}{P_\varphi}\frac{\partial P^2}{\partial z} = -2\frac{emr}{P_\varphi}\vec{P}\cdot\vec{E}. \qquad (55)$$

По аналогии с (51) левая часть (55) есть:

$$\frac{dP^2}{d\varphi} - 4\frac{emr}{P_\varphi}\vec{P}\vec{E}.$$

Поэтому уравнение (55) будет иметь вид

$$\frac{dP^2}{d\varphi} = 2\frac{emr}{P_\varphi}\vec{P}\vec{E}.$$

Используя (41), получим:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\varphi} = \frac{er}{P_\varphi}\vec{P}\vec{E}.$$

Или, так как $\mathcal{E} = mc^2$, то будем иметь:

$$\frac{dm}{d\varphi} = \frac{er}{c^2 P_\varphi}\vec{P}\vec{E}.$$

С учетом (41), запишем второе уравнение (26) в виде

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\nabla\mathcal{E}. \qquad (56)$$

Уравнение (56) является уравнением в форме Гамильтона. Второе уравнение можно получить непосредственно из соотношения между энергией и импульсом $\mathcal{E} = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 P^2}$.

Например, в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial P_r} = \frac{2c^2 P_r}{2\mathcal{E}} = \frac{mc^2 v_r}{\mathcal{E}} = v_r.$$

Аналогично и для других компонент импульса. Полная система уравнений в форме Гамильтона имеет вид

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\nabla\mathcal{E}, \qquad (57)$$
$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \nabla_p\mathcal{E},$$

где ∇ - обычный пространственный оператор градиента, а ∇_p оператор градиента в пространстве импульсов:

$$\nabla_p = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial P_r} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial P_\varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial P_z}.$$

Умножая левую и правую части второго соотношения (3) на e/c и складывая с (I3), получим:

$$rot\left(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) = -\frac{e}{c}\vec{H}.$$

Импульс $\vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}$ называется, как известно, обобщенным импульсом. Для перехода в уравнениях (57) от обычного импульса к обобщенному воспользуемся каноническими преобразованиями / 3 /:

$$q\,dP + \mathcal{P}\,dQ = d\psi(P, Q),$$

где q, P и $Q, \mathcal{P}$ - компоненты старых и новых координат и импульсов, а ψ - производящая функция. Выберем производящую функцию в виде

$$\psi = P\cdot Q = \left(\mathcal{P} - \frac{e}{c}A\right)Q,$$

тогда:

$$q = \frac{\partial\psi}{\partial P} = Q,$$
$$\mathcal{P} = \frac{\partial\psi}{\partial Q} = \left(\mathcal{P} - \frac{e}{c}A\right) = P.$$

То есть, преобразования являются тождественными. Так как канонические преобразования не меняют форму исходного уравнения, а $\mathcal{E}(q, P) = \mathcal{E}(Q, \mathcal{P})$, то будем иметь:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = -\nabla\mathcal{E},$$
$$\frac{dq}{dt} = \nabla_p\mathcal{E}.$$

Аналогично и для других составляющих координат и импульсов. Поэтому полные уравнения в форме Гамильтона для обобщенного импульса $\vec{\mathcal{P}}$ будет иметь вид:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\nabla\mathcal{E}, \qquad\qquad (58)$$
$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \nabla_p\mathcal{E}.$$

Так как полная энергия (включая и потенциальную энергию) есть функция Гамильтона $\mathcal{H}$, то из (58) получим:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\nabla\mathcal{H}, \qquad\qquad (59)$$
$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \nabla_p\mathcal{H},$$

где

$$\mathcal{H}(\vec{P},\vec{R}) = \sqrt{m_0^2c^4 + c^2\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2} + e\varphi.$$

Уравнения (59), как известно, называются каноническими уравнениями Гамильтона.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В работе, в рамках классической электродинамики Максвелла, обоснован и развит новый подход к выводу релятивистских уравнений движения заряженных частиц в электромагнитных полях.

Основой работы являются новые дифференциальные определения электрического и магнитного полей. Хотя эти определения являются частными, то есть имеют место для определенного класса полей,тем не менее, полученные результаты справедливы и для произвольного электромагнитного поля.

Наряду с известным релятивистским уравнением движения Ньютона-Лоренца,описывающим траекторию движения заряженной частицы в электромагнитном поле, получено уравнение движения в градиентной форме, описывающее пространственное изменение квадрата импульса заряженных частиц. Из последнего уравнения следует ряд интегралов движения, в том числе зависимость массы частицы от скорости ее движения и закон взаимной связи массы и энергии частицы.

Рассматривая уравнение в градиентной форме как производящее уравнение, из него получена система дифференциальных уравнений, описывающих траекторию движения заряженной частицы в электромагнитном поле, а также канонические уравнения движения в форме Гамильтона.

В заключение, автор считает своим приятным долгом поблагодарить профессора М.И.Подгорецкого и с.н.с. С.И.Козлова и Н.И.Тарантина за обсуждение работы и ряд полезных замечаний и советов.

ЛИТЕРАТУРА

I. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, "Наука", М., I973.
2. Тамм И.Е. Основы теории электричества, Гостехиздат, М., I956.
3. Маделунг Э. Математический аппарат физики, Физматгиз, М., I960.