ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б 1-9-84-175

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 19

345 л2

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Отдел новых методов ускорения

С.Н.Доля, Е.П.Жидков, С.Б.Рубин, Х.И.Семерджиев

Б1-9-84-175

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ИНЖЕКЦИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ВОЗБУЖДЕННЫЙ РЕЗОНАТОР

г. Дубна, 1983 г.

I

В связи с различными возможностями для физических исследований и практическими приложениями взаимодействию мощных электронных пучков с высокочастотными полями постоянно уделяется большое внимание/I/. В частности, не потеряло актуальности исследование взаимодействия высокочастотного поля с отдельным релятивистским сгустком, содержащим большое число частиц.

Ниже проводится модельное (математическое) изучение поведения высокочастотного поля, возбужденного в резонаторе сторонним генератором при влете в резонатор релятивистского электронного пучка.

При инжекции в резонатор релятивистского электронного пучка с коротким фронтом или электронно-ионного слоя в резонаторе возбуждается мощное переходное излучение, которое приводит к деформации исходного распределения энергии вихревого поля в резонаторе.

Целью работы было выделение на этом фоне эффектов, связанных с взаимодействием частиц пучка. Можно предположить, что указанная деформация приведет к пространственному сжатию энергии стороннего поля,(из-за взаимодействия полевых мод резонатора через пучок и переходу энергии поля одних мод в другие). Под пространственным сжатием мы будем понимать увеличение энергии стороннего вихревого поля в единице объема, при этом электронный пучок может играть роль своеобразного поршня. При возбуждении резонатора на основной (низшей) моде под действием пучка энергия может трансформироваться только в высшие моды[ж)]. Представляет интерес количественная оценка

ж) Здесь следует заметить, что для описания переходных процессов язык частот не очень удобен, т.к. частота ВЧ колебаний, соответствующая заданному пространственному распространению поля (моде) не фиксирована, а изменяется во время переходного процесса.

этого явления. Можно также проследить за поведением системы если возбуждена одна из высших мод.

В целом все эти вопросы представляются достаточно интересными, чтобы попытаться "увидеть" это на модели.

П

Рассмотрение взаимодействия электронного пучка с возбужденным в резонаторе полем будем вести имитируя пучок системой сгустков-дисков определенного радиуса b рис.I. Радиальную степень свободы считаем "замороженной". Сгустки взаимодействуют между собой и с изображениями в стенках резонатора квазистатически (использована кулоновская калибровка потенциалов), а также через вихревые поля (возбужденные движением сгустков и наведенными в стенках резонатора токами). Кроме того, на их движение оказывает действие поле, заранее возбужденное в резонаторе.

Плотность заряда и ток в имитирующий пучок системе сгустков представляется так:

$$\rho(t,r,z) = \sum_{j=1}^{J(t)} \rho_{0j}\, \delta(z - x_j(t)) \left[\theta(r) - \theta(r-b) \right] \tag{I}$$

$$j_z(t,r,z) = \sum_{j=1}^{J(t)} \dot{x}_j(t) \rho_{0j}\, \delta(z - x_j(t)) \left[\theta(r) - \theta(r-b) \right] \tag{2}$$

$$\rho_{0j} = \frac{q_j}{\pi b^2}, \quad \theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$$

где $q_j = eN_j$ – заряд диска с номером j, $x_j(t)$ – координата центра, $J(t)$ число дисков, находящихся в момент t внутри резонатора.

Квазистатическое взаимодействие дисков, последовательно влетающих в резонатор, было рассмотрено в /2/. Здесь приведем сразу выражения для силы, с которой один из дисков, например, с номером j, действует на диск с номером i. Общее выражение силы составится из суммы таких членов. Итак, имеем

$$F_{\parallel}(x_j, x_i) = \frac{4N_i r_0 N_j}{b^2} \begin{cases} 1 - x_j/h \,, & x_j < x_i \\ - x_j/h \,, & x_j > x_i \end{cases} +$$

$$+ \frac{16 N_i r_0 N_j}{\pi b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{m} I_1\left(\frac{\pi m b}{h}\right) \cos\left(\frac{m\pi x_j}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi m x_i}{h}\right), \qquad (3)$$

$$A_m = K_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right) + K_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right) \Big/ I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right)$$

r_0 классический радиус.

Для вычисления вихревых полей используем нормированные собственные функции резонатора $\bar{A}_\lambda$, $\int\limits_V |\bar{A}_\lambda|^2 dV = 4\pi c^2$, записывая, как обычно, разложение

$$\bar{E}^{\perp} = -\frac{1}{c} \sum_\lambda \dot{q}_\lambda \bar{A}_\lambda \qquad (4)$$

Связь резонатора с генератором осуществляется с помощью петли связи, охватывающей малую площадь S с центром в точке $r = r_П$, $z = z_П$, $(r_П \approx a)$. Пусть генератор работает на частоте, соответствующей собственной частоте резонатора

$$\omega = c\,\lambda_{\tilde{l}\tilde{m}}\,, \quad \lambda_{lm} = \sqrt{\left(\frac{\nu_l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2} \qquad (5)$$

(ν_l, $l = 1, 2 \ldots$ l-й корень уравнения $J_0(\xi) = 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$).
Тогда для осциллятора поля q соответствующего этой частоте, можно записать уравнение

$$\ddot{q}_{\tilde{\lambda}} + 2\alpha_{\tilde{\lambda}} \dot{q}_{\tilde{\lambda}} + c^2 \tilde{\lambda}^2 q_{\tilde{\lambda}} = \frac{1}{c} \int\limits_V \left(j^{пучка} + j_{стор}\right) \bar{A}_{\tilde{\lambda}}\, dV \qquad (6)$$

$$\alpha_{\tilde{\lambda}} = c\tilde{\lambda} / 2Q_g \qquad (7)$$

Q_g - добротность резонатора.

Введем переменную $\xi = ct$ и нормируем полевые переменные по формуле*)

$$y_\lambda(\xi) = \frac{c\sqrt{h}}{|e| N} q_\lambda(\xi) \qquad (8)$$

---

*) Всюду далее будем считать числа частиц N_j в сгустках одинаковыми и положим $N_j = N$.

Тогда, с учетом (2), полную систему уравнений вихревого поля запишем в виде

$$y''_{\ell m} + \frac{\lambda_{\ell m}}{R_g} y'_{\ell m} + \lambda^2_{\ell m} y_{\ell m} = -\frac{4\sqrt{2}\,\psi_m}{a b \lambda_{\ell m}} \frac{J_1(\nu_\ell \frac{b}{a})}{J_1(\nu_\ell)} \sum_{j=1}^{J(t)} x'_j(\xi) \cos\left(\frac{m\pi x_j(\xi)}{h}\right) +$$

$$+ \delta_{\ell\tilde{\ell}} \delta_{m\tilde{m}} \psi_{\tilde{m}} \frac{2\sqrt{2}\, s \lambda_{\tilde{\ell}\tilde{m}}}{|e| N a} \left(\frac{I_0}{c}\right) \sin(\xi \lambda_{\tilde{\ell}\tilde{m}} + \varphi) \cos\left(\frac{\tilde{m}\pi z_n}{h}\right), \tag{9}$$

$$\ell = 1, 2 \dots ; \qquad m = 0, 1, 2 \dots$$

В (9) штрихом обозначено дифференцирование по ξ, I_0 = амплитуде тока в петле связи, φ - фазовый сдвиг работы генератора $\delta_{ss'}$ - символ Кронекера,

$$\psi_s = \begin{cases} 1, & s \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & s = 0 \end{cases}$$

Для замыкания системы уравнений надо добавить уравнения движения тех сгустков, которые к моменту времени t находятся в резонаторе. В этих уравнениях учитываем действие квазистатических сил типа (3) и действие вихревого поля (4). Имеем, с учетом релятивистского фактора $\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2}$,

$$x''_i = (1 - x'^2_i)^{3/2} \left\{ \sum_{j=1}^{J(t)} F_{\parallel}(x_j, x_i) + \frac{4 N i_0}{b h} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_1(\nu_\ell \frac{b}{a})}{J_1(\nu_\ell)\nu_\ell} y'_{\ell 0} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{2}}{a} \sum_{\ell, m=1}^{\infty} \frac{J_1(\nu_\ell b/a)}{\lambda_{\ell m} J_1(\nu_\ell)} \cos\left(\frac{m\pi x_i}{h}\right) y'_{\ell m} \right] \right\} \tag{10}$$

$$i = 1, 2 \dots J(t)$$

Установим начальные условия на полевые переменные $y_{\ell m}(\xi)$. При этом приходится различать момент t = 0 (ξ = 0), когда внутри резонатора еще не было ни одного сгустка и "промежуточные начальные моменты", в которые происходит запуск в резонатор каждого следующего сгустка. При t = 0 принимаются нулевые начальные значения для всех полевых переменных: $\overset{0}{y}_{\ell m}$ = 0, $y'_{\ell m}$ = 0 за исключением осциллятора той моды, на которой резонатор возбуждался генератором. Считаем, что резонансное возбуждение длилось достаточно долго, и к моменту $t = 0$ установилось стационарное состояние:

$$y_{\tilde{\ell}\tilde{m}} = \frac{G}{2\lambda_{\tilde{\ell}\tilde{m}}\left(\lambda_{\tilde{\ell}\tilde{m}}/2Q_g\right)}\sin\left(\lambda_{\tilde{\ell}\tilde{m}}\xi+\varphi\right) \tag{11}$$

где

$$G = \Psi_{\tilde{m}}\frac{2\sqrt{2}\, S\,\lambda_{\tilde{\ell}\tilde{m}}}{|e|\,Na}\left(\frac{I_0}{c}\right)\cos\left(\frac{\tilde{m}\pi z_n}{h}\right) \tag{12}$$

- амплитуда возбуждающей силы.

Следовательно, начальное состояние этой моды определяется значениями

$$y^{0}_{\tilde{\ell}\tilde{m}} = \Psi_{\tilde{m}}\frac{2\sqrt{2}\, S Q_g}{a\,\lambda_{\tilde{\ell}\tilde{m}}\,|e|N}\left(\frac{I_0}{c}\right)\cos\left(\frac{m\pi z_n}{h}\right)\sin\varphi$$

$$y'^{0}_{\tilde{\ell}\tilde{m}} = \Psi_{\tilde{m}}\frac{2\sqrt{2}\, S Q_g}{a|e|\,N}\left(\frac{I_0}{c}\right)\cos\left(\frac{\tilde{m}\pi z_n}{h}\right)\cos\varphi \tag{13*}$$

Сгустки запускаются внутрь резонатора с постоянной скоростью $v_0 = c\beta$ (т.е. $x'^{0}_{i} = \beta_0$) через определенные промежутки $\Delta\xi$. В "промежуточные начальные моменты" состояние системы должно фиксироваться, и все значения полевых переменных, их первых производных, координаты и скорости сгустков в эти моменты служат новыми "промежуточными начальными значениями".

Вместе с запуском нового сгустка увеличивается каждый раз на единицу и число уравнений типа (10).

Формула для скалярного потенциала для фиксированного момента ξ имеет вид, см.[1]

$$\Phi(\xi,r,z) = -\frac{8N|e|}{\pi b^2}\sum_{j=1}^{J(\xi)}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\Big[\frac{h}{\pi m^2} - \frac{b}{m}I_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right)A_m\Big]\sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right)\sin\left(\frac{m\pi x_j(t)}{h}\right) \tag{14}$$

---

*) Петлю связи обычно устанавливают в пучности поля, поэтому будем считать $\cos\left(\frac{\pi\tilde{m}z_n}{h}\right) = 1$

В связи с задачей, поставленной во введении, интерес представляет распределение энергии вихревого поля по отдельным группам осцилляторов (мод) для фиксированных моментов времени. Для определенности мы разобьем все рассматриваемые полевые переменные на две группы. С одной стороны, соответствующие собственным частотам резонатора меньшим частоты внешнего генератора: $\omega = c\lambda_{\tilde{\ell}\tilde{m}}$, с другой - всем остальным более высоким частотам, которые удастся проанализировать и охватить численным счетом. Для энергии, соответствующей первой группе, можно записать

$$W_I(\xi) = \frac{e^2N^2}{2h}\sum_{\lambda_{\ell m} < \lambda_{\tilde{\ell}\tilde{m}}}\left(y'^2_{\ell m} + \lambda^2_{\ell m} y^2_{\ell m}\right) \tag{I5}$$

Для второй группы

$$W_{II}(\xi) = \frac{e^2N^2}{2h}\sum_{\lambda_{\ell m} > \lambda_{\tilde{\ell}\tilde{m}}}\left(y'^2_{\ell m} + \lambda^2_{\ell m} y^2_{\ell m}\right) \tag{I6}$$

Наконец,

$$\mathcal{E} \equiv W_{\tilde{\ell}\tilde{m}}(\xi) = \frac{e^2N^2}{2h}\left(y'^2_{\tilde{\ell}\tilde{m}} + \lambda^2_{\tilde{\ell}\tilde{m}} y^2_{\tilde{\ell}\tilde{m}}\right) \tag{I7}$$

- энергия поля "основной" моды.

Система уравнений (9), (I0) является нелинейной, поэтому должна существовать перекачка или обмен энергии в разных спектральных интервалах.

Интересно также рассмотреть временную зависимость распределения энергии вихревого поля по частям объема резонатора, причем кажется более наглядным разделение объема по координате z . При этом, учитывая ортогональность радиальных функций, энергию удобно усреднить по радиальной координате. Это сильно упростит аналитические выражения. В результате, выбрав некоторый шаг $\Delta_1 z = h/K$, $z_k = k\Delta z_1; k = 1, 2 \ldots K$ получаем

$$W_k(\xi) = \frac{1}{4}\int_0^a r\,dr\int_0^{z_k}\left(E_r^2 + E_z^2 + H_\varphi^2\right)dz = \frac{e^2N^2}{h}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left\{\sum_{\substack{m,m'=2 \\ m\neq m'}}\right.$$

$$\left[\frac{y'_{\ell m}(\xi)\,y'_{\ell m'}(\xi)}{2h^2\lambda_{\ell m}\lambda_{\ell m'}}\cdot\left(P^- + P^+\right) + \left(\frac{\nu_\ell^2}{2\pi a^2\lambda_{\ell m}\lambda_{\ell m'}} + \frac{\lambda_{\ell m}\lambda_{\ell m'}}{\pi}\right).\right.$$

$$\cdot (p^- + p^+) y'_{e_m}(\xi)\, y'_{e_{m'}}(\xi) \Big] + \sum_{m=1}^{\infty} \Big[\frac{\pi^2 m^2 y'^2_{e_m}(\xi)}{2h^2 \lambda^2_{e_m}} (z_k - R) +$$

$$+ \left(\frac{\upsilon_e^2 y'^2_{e_m}(\xi)}{2a^2 h \lambda^2_{e_m}} + \frac{\lambda^2_{e_m} y^2_{e_m}(\xi)}{2h} \right) \times (z_k + R) + \frac{z_k}{h} \Big[y'^2_{e_0}(\xi) +$$

$$+ \frac{\upsilon_e^2}{a^2} y^2_{e_0}(\xi) \Big] \Big] \Big\}, \quad \text{где } p^{\mp} = \frac{1}{m \mp m'} \sin\left(\frac{\pi z_k}{h} (m \mp m') \right)$$

$$R = \frac{1}{2\pi m} \sin\left(\frac{2\pi m z_k}{h} \right).$$

В интервале (z_k, z_{k+1}) содержится энергия

$$\Delta W = W_{k+1}(\xi) - W_k(\xi) . \qquad (19)$$

Внося незначительные изменения в изложенную аналитическую процедуру, можно рассмотреть другую постановку. В резонатор; вместо имитирующих пучок сгустков, влетает "двойной слой" - два сгустка, вначале очень близко расположенные друг к другу и противоположно заряженные. В целом пусть система является электрически нейтральной. При этих условиях "ионный сгусток" (остов) является тяжелым и можно считать, что внутри резонатора скорость его остается неизменной, равной начальной.

"Электронный сгусток" движется под действием сил со стороны квазистатического и вихревого полей и, следовательно, при определенных условиях может совершать колебания около (или вблизи) ионного остова. Такая система в какой-то мере имитирует движение металлического поршня в резонаторе и, если как в предыдущей задаче, в резонаторе ранее было возбуждено стороннее поле, то интересна деформация этого поля.

Таким образом, в системе (10) мы имеем только одно уравнение, а в сумме, определяющей квазистатическую силу, в правой части этого уравнения только два члена: $F_{\parallel}(x_1, x_1)$ ($X = X_1$ - координата центра электронного сгустка) и член $F_{\parallel}(\upsilon_0 t, x_2)$, где $x_2 = \upsilon_0 t$ определяет координату ионного остова.

Вторая часть силы - сумма по ℓ, m - результат действия полного вихревого поля, учитывается как в предыдущем случае. Начальные условия на стороннее поле (II)-(I3) остаются без изменения. Применимы также уравнения (I5)-(I7) и (I8), (I9).

Однако, для рассмотрения возможности "сжатия" стороннего поля, соотношение (I8) можно еще преобразовать следующим образом. Вместо произвольного положения z, в качестве верхнего предела взять значение $z_k = \xi/\beta_0 = t v_0$, соответствующее положению "поршня" в данный момент ξ. Теперь $w(\xi)$ будет соответствовать энергии поля, локализованного в момент ξ в области сзади поршня. Вычисляя, кроме того, полную энергию вихревого поля во всем объеме резонатора $W_{полн.}(\xi)$ (она представляется суммой выражений (I5), (I6), (I7)) можем получить представление о степени "сжатия" поля перед поршнем. Выпишем еще формулу для распределения энергии какой-либо одной из мод (она получается таким же образом, как (I8))

$$w_{\ell m}(t) = \frac{z_k}{h} w_{\ell m}^{полн} + \frac{e^2 N^2}{2h}\frac{1}{2\pi m}\sin\left(\frac{2\pi m z_k}{h}\right)\left[\frac{\bar{\lambda}_{\ell m}^2}{\lambda_{\ell m}^2} y'_{\ell m}(\xi) + \lambda_{\ell m}^2 y_{\ell m}^2(\xi)\right], \qquad (20)$$

где

$$w_{\ell m}^{полн} = \frac{e^2 N^2}{2h}\left[y'^2_{\ell m}(\xi) + \lambda^2_{\ell m} y^2_{\ell m}(\xi)\right], \quad \bar{\lambda}^2_{\ell m} = \left(\frac{\nu_\ell}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2. \qquad (2I)$$

Наконец, распределение энергии одного только стороннего поля дается выражением:

$$w_{\tilde{\ell}\tilde{m}}(\xi) = \frac{z_k}{h} w_0 + \frac{2 s Q_g}{\pi \tilde{m} h a^2}\left(\frac{I_0}{c}\right)^2 \left\{\frac{\bar{\lambda}^2_{\tilde{\ell}\tilde{m}}}{\lambda^2_{\tilde{\ell}\tilde{m}}}\sin^2\left(\lambda_{\tilde{\ell}\tilde{m}}\xi + \varphi\right) + \cos^2\left(\lambda_{\tilde{\ell}\tilde{m}} + \varphi\right)\right\}\sin\left(\frac{2m\pi z_k}{h}\right), \quad w^0 = \psi^0_{\tilde{m}}\frac{4 Q_g^2 s^2}{h a^2}\left(\frac{I_0}{c}\right)^2. \qquad (22)$$

III

Для численных расчетов на ЭВМ CDC 6500 на основе [3] была составлена программа на языке фортран. Уравнения (I0) интегрировались методом Рунге-Кутта четвертого порядка. Для уменьшения счетного времени и повышения точности, интегрирование уравнений (9) проводилось следующим образом. Для проведения первых трех шагов был использован метод Рунге-Кутта, а далее интегрирование проводилось АТЭ-алгоритмом/4/. Вид правых частей уравнений (9) подсказывает, что они хорошо аппроксимируются тригонометрическими многочленами. Поэтому наряду с классическим трехшаговым методом Адамса, основанным на интерполяции правых частей дифференциальных уравнений алгебраическими многочленами второго порядка (назовем его A - методом Адамса), нами использовались и трехшаговые T - методы и $Э$ - методы Адамса. Они получаются аналогично выводу A - метода Адамса, но правые части дифференциальных уравнений аппроксимируются соответственно тригонометрическими и экспоненциальными многочленами первого порядка. На основе A , T и $Э$ - методов Адамса построен комбинированный АТЭ - алгоритм, сущность которого заключается в том, что на каждом шаге интегрирование проводится по одному из A , T и $Э$ - методов, в зависимости от того, какая интерполяция (алгебраическая, тригонометрическая или экспоненциальная) наилучшая на этом шаге. Здесь укажем только то, что типичное соотношение чисел использования A , T и $Э$-методов в алгоритме во всех проделанных нами расчетах для систем (9) следующее: А:Т:Э=1:30:8. Это соотношение и проделанные нами тесты, в которых известно точное решение, показывают, что в наших расчетах интегрирование системы (9) проводится с погрешностью, не превышающей 10^{-6}.

IУ

Размеры резонатора приведены на рис.1[ж)].

В большинстве расчетов полагалось число электронов в одном диске равным $N = 5\cdot 10^{11}$, начальное расстояние между дисками $\Delta z = 0{,}2$ см, аксиальная скорость пучка $\beta_z = 0{,}9$ с ($\gamma = 2{,}3$).

ж) При расчетах ограничивались максимальными числами гармоник: радиальных $1 \leq \ell \leq 5$; продольных $0 \leq m \leq 4$; при принятых размерах резонатора $\omega_{010} = 1{,}44\cdot 10^{10}$; $\omega_{023} = 5{,}8\cdot 10^{10}$ р/сек.

Это соответствует току пучка I2 кА, реальной плотности частиц в пучке $n = 10^{11}$.

Для определения степени надежности получаемых с помощью данной модели физических результатов было проведено несколько тестовых расчетов в которых изменялась частота расстановки сгустков. Проводилось сравнение результатов получаемых с вдвое более частой ($\Delta\xi$ = 0.I см) и вдвое более редкой ($\Delta\xi$ = 0.4 см) расстановкой сгустков, ток пучка при этом оставлялся неизменным. Распределение потенциала квазистатического поля φ_0 (рис.2) отличается в худшем случае во время влета пучка в резонатор и выхода фронта пучка из резонатора на I0%, для других моментов времени $\Delta\varphi(0.4,\ 0.1)/\varphi(0.2)$ составляет величину меньшую, чем 10^{-2}.

Влияние дискретности распределения плотности в инжектируемом пучке (расстановки сгустков) может сказываться и на степени ударного возбуждения полей в резонаторе, причем наиболее сильно это влияние будет для самых высших мод. Расчеты показали, что амплитуда поля моды E_{054}, имеющей максимальную частоту колебаний из рассматриваемых мод, отличается для случаев $\Delta\xi$ = 0.2 см и $\Delta\xi$ = 0.I см на 3%. Это связано с тем, что длина водны, соответствующая этой моде, λ = I.2 см много больше обычно используемого расстояния между сгустками ($\Delta\xi$ = 0.2 см).

Точность расчетов контролировалась так же уменьшением шага интегрирования.

Анализируя результаты тестовых расчетов можно сделать вывод, что принятый интервал между сгустками $\Delta\xi$ = 0.2 см выбран достаточно хорошим.

Поскольку из всей совокупности мод резонатора учитывались поля 25 первых последовательных мод (ℓ = I,2...5, n = 0,I...4) возникает вопрос о достаточности этого количества мод для описания системы. Было проведено сравнение распределения энергии поля в резонаторе W_t, рис.3 (см. формулу I9) для момента времени T = 0,5, когда фронт пучка прошел меньше одной десятой высоты резонатора, для двух случаев - обычно используемого и удвоенного числа мод. В обоих случаях перед фронтом пучка появляется "шлейф" поля, которого не должно быть поскольку вихревое поле еще не успевает к этому моменту времени проникнуть на такое расстояние. Видно, что увеличение числа мод не приводит к уменьшению энергии поля "шлейфа". Шлейф связан с тем, что при вычислении энергии поля не учитывался вклад от квазистатического поля пучка, которое в совокупности с вихревым должно погасить поле в области перед фронтом пучка.

Таким образом выбранное число осциллиторов является достаточным для описания длинноволновых колебаний в системе.

Относительно постановки задач заметим еще следующее. С помощью метода макрочастиц достаточно хорошо[5] описываются длинноволновые колебания в пучках в случае, если частота столкновений макрочастиц, увеличенная по сравнению с частотой столкновений реальных частиц в α раз (где α - коэффициент укрупнения - число"реальных" частиц в одной крупной) остается меньше плазменной частоты.

О выполнении критерия судят по скорости максвеллизации монохроматического пучка. Следует, однако, учитывать, что для одномерных моделей скрость релаксации зависит не от парных, а от значительно более редких тройных столкновений, поэтому существенным может оказаться также учет коллективных волновых процессов. Чтобы как-то ориентироваться относительно параметров последних, попытаемся оценить линейные электродинамические свойства пучка.

Плазменная частота, соответствующая реальной плотности частиц пучка n оказывается равной ($\gamma = 2,3$)

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{m\gamma_0}} = 2.8 \cdot 10^{10}$$

Будем теперь считать, что сплошной пучек радиуса $r = b$ движется внутри цилиндрического кожуха того же радиуса ($r = a$), что и рассматриваемый резонатор. Для диэлектрической постоянной такой системы можно записать

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\chi_0^2(\omega - k_\parallel v_0)^2},$$

где связь между продольным волновым числом $k_{\parallel}$ и ω задается дисперсионным уравнением (см/6/)

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}\, I_1(b\sqrt{\varepsilon}\, q)}{I_0(b\sqrt{\varepsilon}\, q)} = \frac{I_1(bq)K_0(aq) + K_1(bq)I_0(aq)}{I_0(bq)K_0(aq) - K_0(bq)I_0(aq)}$$

$q = \sqrt{k_{\parallel}^2 - k^2}$, $k = \frac{\omega}{c}$, v_0 –невозмущенная скорость частиц пучка.

В окрестности интересующей нас частоты ω , равной собственной частоте резонатора $\omega_{010} = 1{,}44 \cdot 10^{10}$, из дисперсионного уравнения находим два решения $k_{\parallel}^{(1)} = 0{,}7146$, которому соответствует длина волны в системе пучек–волновод ($\sim e^{i(k_{\parallel} z - \omega t)}$) $\lambda_{\parallel}^{(1)} = 8{,}8$ см и $k_{\parallel}^{(2)} = 0{,}9421$, $\lambda_{\parallel}^{(2)} = 6{,}7$ см. При этом соответствующие значения $\varepsilon_1 = -21{,}5$, $\varepsilon_2 = -3{,}40$ оказываются отрицательными. Т.о. в линейном приближении в длинном пучке электромагнитная волна может распространяться только вместе с возмущением среды (пучка частиц), и при данных параметрах, но при ограниченных продольных размерах системы, должна была бы запираться.

Наконец, вопрос о сравнении столкновительно-релаксационных свойств модели и "реальной системы" оценивался также "экспериментально": при пропускании через резонатор 200 дисков с коэффициентом укрупнения 10^{12} монохроматичность пучка сохранялась еще достаточно.

У.

Проводить анализ распределения полной энергии вихревого поля в резонаторе наиболее удобно сравнивая два случая – возбуждение резонатора пучком "невзаимодействующих" (Н.) частиц, т.е. пучком частиц пролетающих через резонатор с постоянной скоростью и взаимодействующим (В.) пучком. Фронт пучка может входить в резонатор в различных фазах внешнего поля $\varphi_н = 0$ – ускоряющей электроны пучка и $\varphi_н = \pi$ – тормозящей пучок. На рис.4 приведены результаты расчетов. Видно, что кривые похожи, уровень возбужденного поля для (В.) частиц несколько меньше. Это связано с тем, что скорость частиц уменьшилась из-за того, что они отдали энергию полю, меньше стал ток пучка и, соответственно, степень ударного возбуждения резонатора.

Перед фронтом пучка формируется "волна энергии" поля переходного излучения, наиболее сильно возбуждается основная мода резонатора E_{010} , имеющая однородное распределение поля вдоль оси, неоднородность распределения поля связана с возбуждением высших типов колебаний.

Интересно сравнить распределение энергии вихревого поля в резонаторе предварительно возбужденном от стороннего генератора. На рис.4 приведены результаты.

Вклад в энергию поля от моды E_{010} растет со временем, существенных отличий в распределении поля (Н.) и (В.) частиц нет, что связано по-видимому с тем, что частота моды E_{023} близка к плазменной частоте пучка, за время пролета пучка через резонатор поле просто не успевает перестроиться.

Распределение энергии поля в этот же момент времени Т = 5 для инжекции (Н) пучка в невозбужденный резонатор дано на рис.5. Начальный уровень энергии поля, соответствующий напряженности 240 кВ/см равен $W_t = 5 \cdot 10^5$ эрг. Таким образом к моменту времени Т = 5 (рис.5))энергия поля, оставленная пучком в резонаторе превышает уровень поля, возбужденного в резонаторе сторонним генератором. Уровень поля возбужденного в резонаторе (В) частицами меньше (рис.5) и "волна" энергии поля перед фронтом пучка имеет меньшую амплитуду. Последнее связано с тем, что происходит расфазировка излучения и фронтовых частиц которые движутся по сложному закону, определяемому действием кулоновского и высокочастотного поля.

Возвращаясь к задаче поставленной во введении можно видеть, что быстро движущийся (β =0,9) редкий ($\omega_{пл} = \omega_{рез}$) электронный пучок, имитируемый системой дисков, инжектируемых в резонатор при выбранном диапазоне параметров не приводит к сжатию предварительно возбужденного в резонаторе поля и не является электромагнитным поршнем. Значительное дальнейшее увеличение числа N частиц в дисках сверхвыбранного диапазона оказывается затруднительным, т.к. пучек начинает запираться вследствие образования виртуального катода.

Рассмотрим движение в резонаторе двойного электронно-ионного слоя, содержащего равное число противоположно заряженных частиц в сгустках. Положительно заряженный сгусток - ионный движется с постоянной скоростью $\beta = 0,1$, электронный испытывает действие кулоновских сил, стороннего поля и поля излучения. Для уменьшения степени ударного возбуждения резонатора электронный и ионный сгустки запускаются в резонатор одновременно с одинаковой начальной скоростью. Считалось, что в резонаторе с помощью стороннего генератора возбуждено поле 50 кВ/см на моде E_{02z}, фаза влета сгустков $\varphi_н = 0$, т.е. электронный сгусток ускоряется в начальный момент полем стороннего генератора.

В деформации стороннего поля фронтом пучка существенна роль радиальных токов. Действительно, например, в дипольном приближении интенсивное излучение возможно лишь в направлениях перпендикулярных направлению колебаний диполя. В наших моделях радиальное движение "заморожено" и при оценке мы можем учитывать только то, что радиальное распределение заряда (дисковая структура) приводит и к некоторому угловому распределению интенсивности излучения. Грубую оценку можно сделать, используя для дальней зоны формулу

$\bar{E}' = \frac{1}{c^2 R_0}(\ddot{d} \times n) \times n$, (см. /6/, стр. 213, 1960г.),

где для дипольных колебаний заряженного диска радиуса b:

$$\dot{d} = \frac{d}{dt}\left(\sum_j e_j z_j\right) \sim \int_0^{2\pi}\int_0^{b} \{\dot{\rho}(t), \dot{z}(t)\}\, \sigma(\rho)\, \rho\, d\rho\, d\varphi$$

$\sigma(\rho) = \frac{N_e}{\pi b^2} = const$ т.к. радиальное движение заморожено, то $\dot{\rho} \equiv 0$, $\ddot{d} = e_z \ddot{z} N_e$. Если стороннее поле есть $E_0 \sin \omega t$, то

$\ddot{z} \sim \frac{e}{m} E_0 \sin\omega t$ и для полного поля в некоторой точке наблюдения с полярными координатами R_0, θ, φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) получится

$$E_z + E_z' \sim E_0\left(1 - \frac{N r_0}{R_0} \sin^2\theta\right)\sin\omega t, \quad \left(r_0 = \frac{e^2}{mc^2}\right)$$

Отсюда имеем оценку $\frac{N r_0}{R_0}\sin^2\theta \sim 1$, которая допустима, если $(\ell, z/\varphi_{max}) \ll R_0$, $\ell \ll \frac{2\pi c}{\omega}$. При $\frac{\ell}{R} \sim 0{,}2$, $R_0 = 15$ см получаем $N \sim 10^{15}$.

Расчеты проводились для нескольких значений числа частиц в сгустках $N = 8\cdot 10^{n}$ (n =13, 14, 15, 16). Минимальное число частиц в сгустках выбиралось таким образом, чтобы частота колебаний "электронов" относительно движущихся с постоянной скоростью "ионов" несколько превышала частоту колебаний на моде E_{023}. Радиус сгустков был увеличен до ℓ = 4,9 см. Результаты приведены на рис.6 для двух значений времени.

Как видно из этих графиков двойной слой так же как и фронт пучка не приводит к сжатию поля. Можно отметить, что с увеличением числа $N > 10^{16}$ начинает появляться раскачка колебаний электронного сгустка около ионного.

На рис.7 приведен график энергии основной моды для (Н) и (В) частиц.

Кажется странным, что график накопления энергии вихревого поля определенной моды (на рис.7 - это основная мода) имеет осциллирующий характер. Упрощая задачу, можно, однако, рассмотреть этот вопрос аналитически на примере влета в "холодный" резонатор сплошного заряженного пучка с резким передним фронтом, движущимся с постоянной скоростью v_0. Тогда, согласно (6), полагая для простоты $\Delta_\gamma = \infty$, на основной моде имеем:

$$\ddot{q} + \omega_{10}^2 q = \begin{cases} A v_0 t & \text{при} \quad 0 < t \leq h/v_0 \\ A h & \text{при} \quad t > h/v_0 \end{cases} \tag{23}$$

где $A = const$. Отсюда при $t < h/v_0$ (пока фронт пучка не достиг противоположной стенки резонатора) для энергии осциллятора при $q(0) = 0$, $\dot q(0) = 0$ получаем

$$2w(t) = \dot q^2 + \omega^2 q^2 = \frac{v_0^2 A^2}{\omega^4}\left[2 + \omega^2 t^2 - 2\cos\omega t - 2\omega t \sin\omega t\right]$$

(опущен индекс у ω_{10}). Величина $w(t)$ не имеет относительных максимум или минимумов, а лишь точки перегиба: $t_n = \frac{2\pi n}{2\omega}$, $n = 1, 2 \ldots$ (если $t_n < h/v_0$). При этом $2w(t_n) = \frac{v_0 A^2}{\omega^4}(2\pi n)^2$

Т.о. график $w(t)$ при $t < h/v_0$ – неубывающая ф-ция, имеющая вид как на рис.7б.

При $t > h/v_0$, т.е., когда фронт пучка уже прошел через резонатор, а в резонаторе продолжает идти "сплошной ток", из (23) находим

$$2w \equiv \dot q^2 + \omega^2 q^2 = 2Av_0 q + const \qquad (24)$$

В координатах $\dot q/\omega$, q на фазовой плоскости (24) есть уравнение окружности с центром, смещенным в точку $\dot q/\omega = 0; q = \frac{Av_0}{\omega^2}$. В силу смещенности этого центра, при движении изображающей точки по этой фазовой окружности величина q изменяется периодически с частотой ω в пределах $q_{min} \le q \le q_{max}$. Отсюда следует, что $w(t)$ при $t > h/v_0$ имеет осциллирующий характер.

Часть расчетов была проведена с исключением квазистатического взаимодействия между сгустками, что имитировало инжекцию пучка в плазму и нейтрализацию объемного заряда. На рис. 8 проведено сравнение результатов расчетов для таких квазивзаимодействующих (КВ) и (В) частиц. Видно, что поведение кривых подобно.

При инжекции таких (КВ) частиц в резонатор наиболее сильно возбуждается основная мода (рис.9). В результате расфазировки частиц осцилляции энергии основной моды (ср. с рис.7) со временем уменьшаются, энергия высших мод имеет тенденцию и росту.

Независимо от фазы влета пучка после переходных процессов энергия возбужденной моды E_{023} монотонно уменьшается (рис.10).

Такое уменьшение энергии мы объясняем затуханием Ландау и ускорением в среднем частиц пучка.

Различие в поведении (Н) и (В) частиц особенно хорошо видно из графиков приведенных на рис.11. До момента времени $T = 5$ сумма энергий высших мод определяется ударным возбуждением резонатора. Увеличение этой суммы для (В) частиц по сравнению с (Н) частицами объясняется тем, что в течение времени $T = 8 \div 16$ стороннее поле ускоряет частицы пучка, которые и генерируют поле высших мод. При этом энергия основной моды уменьшается (рис.12) растет энергия и самих высших мод (кривая 2, рис.12).

Для другой фазы влета фронта пучка поведение основной моды приведено на рис.13. Так же как и на рис. 11-12, рост энергии высших мод особенно значителен в течение времени когда частицы пучка ускоряются полем основной моды. Интересно сравнить кривые 2 и 3 на рис.13, которые соответствуют одной и той же энергии высших мод, но 2 соответствует предварительно возбужденному резонатору. Таким образом можно говорить о трансформации энергии основной моды в высшие при инжекции (В) частиц в резонатор.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. А.С.Рошаль, Моделирование заряженных пучков, М., Атомиздат, I979.

2. Доля С.Н. и др. ОИЯИ, РII-82-230, Дубна, I982.

3. Семерджиев Х.И. ОИЯИ, II-82-739. Дубна, I982.

4. Жидков Е.П., Семерджиев Х.И., ОИЯИ, РII-82-857, Дубна, I982.

5. Махоньков В.Г., Полляк Ю.Г. Препринт ОИЯИ, РII-8245,Дубна,I974.

6. Даусон Дж. Физика пучков заряженных частиц. М., Мир, I980.

7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, М., Ф.М., I960.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. I. Схема численного эксперимента.
Размеры резонатора a = 5 см, h = 5 см.
Радиус дисков b = 3 см, расстояние $\Delta\xi$ = 0,2 см.

Рис. 2. Распределение электростатического потенциала φ вдоль оси резонатора для нескольких моментов времени. На правых графиках точками и крестами указаны отклонения потенциала $\Delta\varphi$ от этих значений для расстояний между дисками $\Delta\xi$ = 0,I и $\Delta\xi$ = 0,4 см.

Рис. 3. Распределение энергии вихревого поля $w_{\perp}$ (определение см. в тексте) в резонаторе в момент времени Т = (ct) = 0,5. I – в расчетах учтены 25 осцилляторов поля, 2 – 50 осцилляторов.

Рис. 4. Распределение $w_{\perp}$ в резонаторе для (Н) и (В) сгустков. Кривые I и 2 – ударное возбуждение резонатора, 3 – 4 – резонатор предварительно возбужден на моде E_{023} (до уровня 50 кВ/см). Кривые 5 и 6 отвечают этим же распределениям в более поздний момент времени. Начальная фаза влета пучка в резонатор $\varphi_н$ = 0.

Рис. 5. Распределение $w_{\perp}$ в резонаторе для Т = 5. Кривая I – ударное возбуждение резонатора (Н) – частицами. Кривые 2 и 3 – инжекция (В) частиц в возбужденный на основной моде резонатор до уровня 240 кВ/см. Кривая 2 – $\varphi_н = \pi$, 3 $\varphi_н$ = 0.

Рис. 6. Распределение $w_{\perp}$ в резонаторе.

Рис. 7. а) Зависимость от времени энергии основной моды $\mathcal{E}_{10}$ (определение см. в тексте). Инжекция в невозбужденный резонатор I – (Н) и 2 – (В) частиц.

б) Характер нарастания энергии основной моды при инжекции сплошного пучка ($t < h/v_0$).

Рис. 8. Зависимость от времени $\mathcal{E}_{10}$ и $\sum' \mathcal{E}_{\ell m}$ (сумма энергий осцилляторов всех мод, кроме первой) для А - квазивзаимодействующих (КВ) и Б - (В) частиц.

Рис. 9. Зависимость от времени суммы энергий мод $\mathcal{D}_1$ (кривая I) имеющих частоту меньшую выделенной ($\mathcal{E}_{023}$) и суммы энергий мод $\mathcal{D}_2$ (кривая 2) (увеличена на три порядка) имеющих частоту большую чем для $\mathcal{E}_{023}$ для (КВ) частиц.

Рис. 10. Зависимость от времени энергии моды $\mathcal{E}_{023}$, возбужденной от стороннего генератора, при инжекции в резонаторе (КВ) частиц. Кривая I - начальная фаза $\varphi_H = 0$, кривая 2 - $\varphi_H = \pi$

Рис. 11. Поведение суммы энергий всех мод кроме первой. Кривая I - инжекция (Н) частиц. Кривая 2 - (В) частицы, резонатор возбужден на основной моде, $\varphi_H = \pi$.

Рис. 12. Зависимость от времени энергии моды $\mathcal{E}_{10}$ (кривая I) и $\mathcal{D}_2$ (увеличено в 10^3 раз) при инжекции в возбужденной на основной моде резонатор (В) частиц, $\varphi_H = \pi$.

Рис. 13. Зависимость от времени энергии моды $\mathcal{E}_{10}$ (кривая I), и энергии всех мод кроме первой $\sum' \mathcal{E}_{\ell m}$ (кривая 2) (увеличена в 10 раз) при инжекции (В) частиц в возбужденный на основной моде резонатор, $\varphi_H = 0$, 3 - поведение $\sum' \mathcal{E}_{\ell m}$ при инжекции (В) частиц в невозбужденный резонатор.

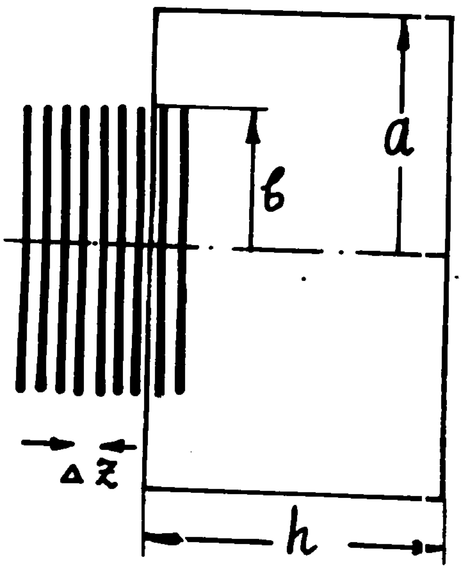
a
в
Δz
h

Рис. 1

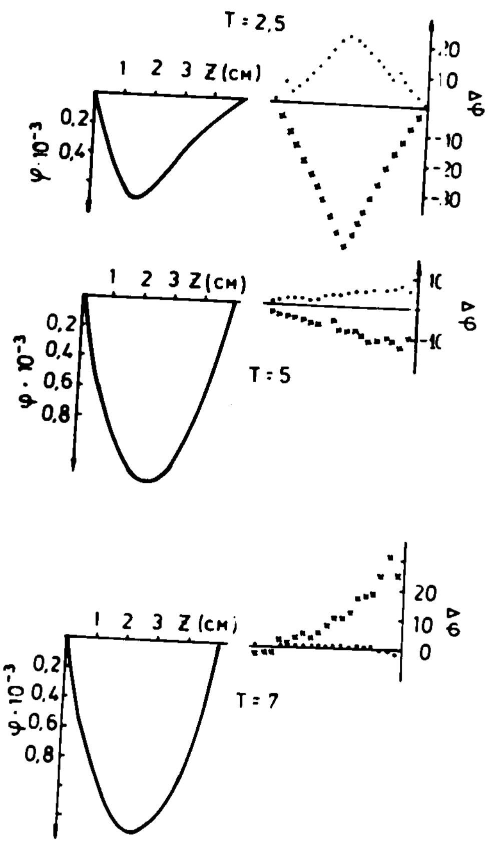
T = 2,5
1 2 3 Z (см)
0,2
0,4
φ·10⁻³
20
10
-10
-20
-30
Δφ
1 2 3 Z (см)
0,2
0,4
0,6
0,8
φ·10⁻³
T = 5
Δφ
1 2 3 Z (см)
0,2
0,4
0,6
0,8
φ·10⁻³
T = 7
20
10
0
Δφ

Рис. 2

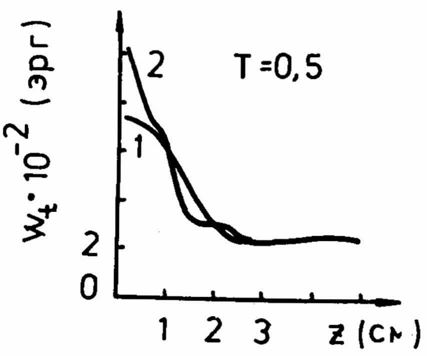
T =0,5
$W_t \cdot 10^{-2}$ (эрг)
2
1
2
0
1 2 3
z (см)

Рис. 3

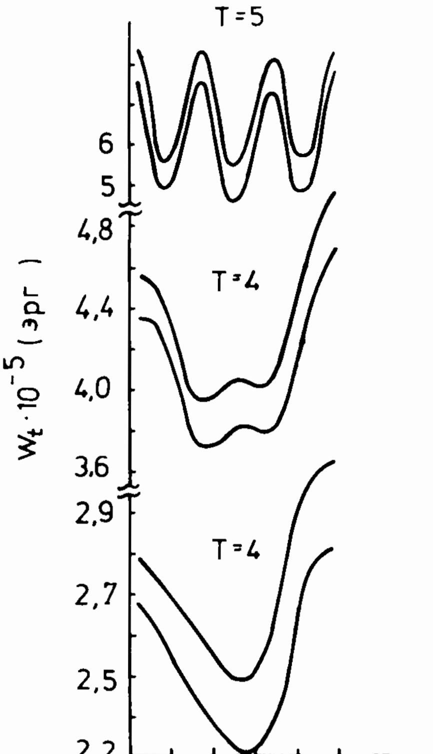
T = 5
6
5
4,8
T = 4
4,4
4,0
3,6
$W_t \cdot 10^{-5}$ (эрг)
2,9
T = 4
2,7
2,5
2,2
1 2 3
z (см)

Рис. 4

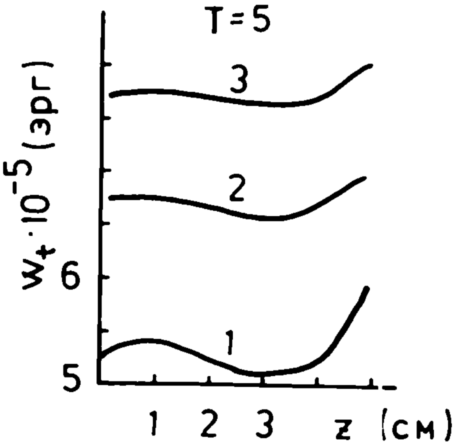

Рис. 5.

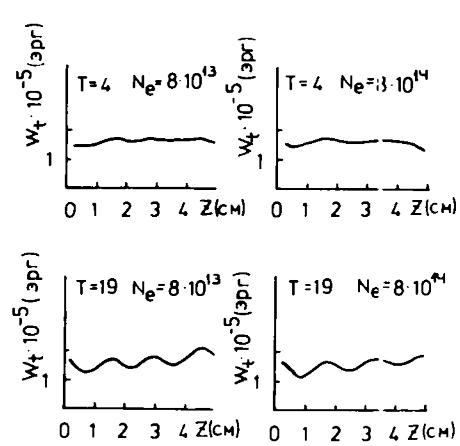

РИС. 6

Рис. 6

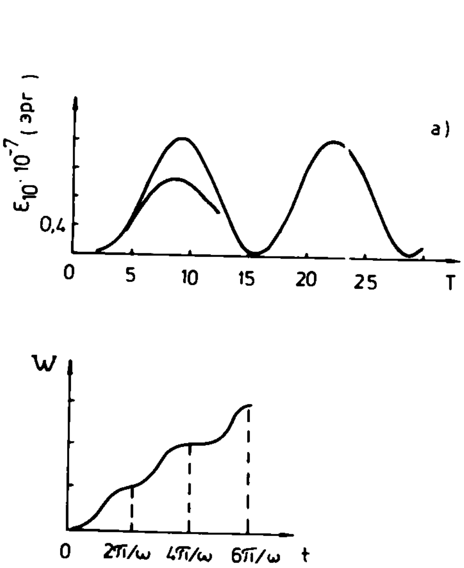

РИС. 7

Рис. 7

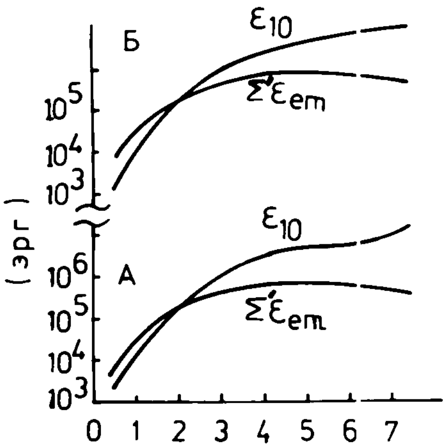

рис.8

Рис. 8

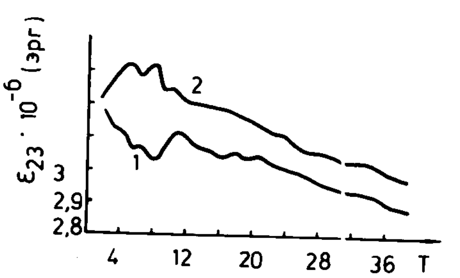

Рис. 10

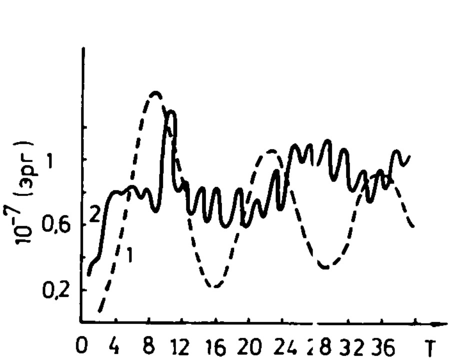

Рис. 9

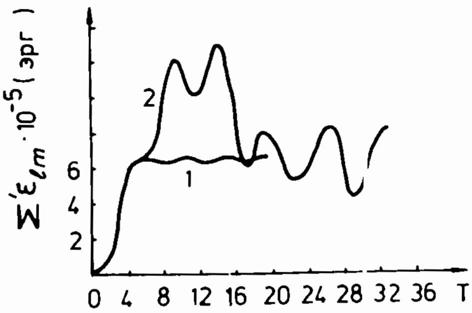

Рис. 11

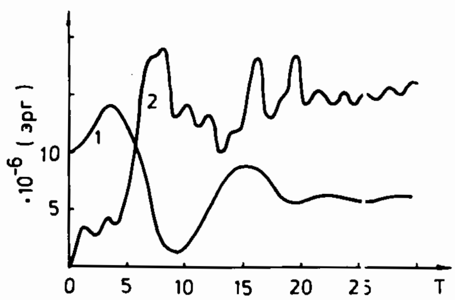

рис. 12

Рис. 12

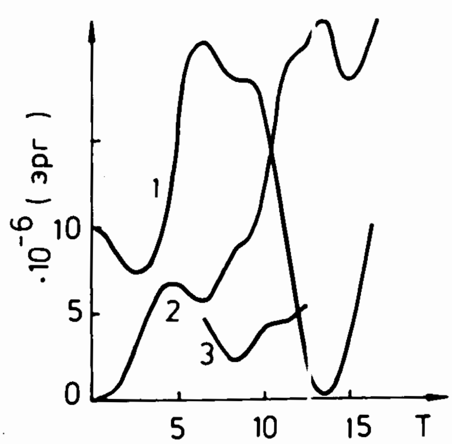

Рис. 13