

СЗ45А1
А-469

+

Алексахин Ю. И.

6582/83

Б1-9-83-751.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б1-9-83-751

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 19 83

ОБЪЕДИНЁННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Отдел новых методов ускорения

Ю.И.Алексахин

Б1-9-83-751

О НАГРУЗКЕ ИНДУКТОРОВ УСКОРЯЮЩЕЙ СЕКЦИИ ЭЛЕКТРОННЫМ КОЛЬЦОМ.

01. 11. 83.

г.Дубна, 1983 год.

Объединённый институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

I. В связи с большим зарядом ускоряемого электронно-ионного кольца и малым временем его взаимодействия с индукторами ускоряющих секций возникает вопрос об энергообеспеченности процесса ускорения. Существуют два подхода в исследовании эффектов нагрузки: а) энергетический - сравнение передаваемой ускоряемому объекту энергии с энергией, запасённой в области, из которой она может быть отдана за время взаимодействия; б) электродинамический - определения отношения возбуждаемого объектом электрического поля к полю, создаваемому в ускоряющей структуре сторонними источниками. Оба подхода должны приводить, очевидно, к согласующимся результатам *).

Пусть E_0 - стороннее квазистатическое ($H_0=0$) электрическое поле, E_{ind} , H_{ind} - напряженности генерируемого кольцом электромагнитного поля, V - объём, с которым возможен обмен энергией за время взаимодействия. Пренебрегая неоднородностью полей, для энергии в этом объёме до и после взаимодействия имеем

$$W_0 = \frac{V}{8\pi} \varepsilon E_0^2; \quad W_1 = \frac{V}{8\pi} [\varepsilon (E_0 + E_{ind})^2 + H_{ind}^2]$$

Для отданной энергии $W_{отд} = \bar{W}_0 - \bar{W}_1$ в случае малой подсадки поля $|E_{ind}/E_0| \ll 1$ найдём

$$\frac{W_{отд}}{W_0} \approx 2 \left| \frac{E_{ind}}{E_0} \right| \quad (I)$$

Ниже рассматривается упрощённая схема взаимодействия кольца с индукторами ускоряющей секции с применением обоих указанных подходов.

2. Индуктор ускоряющей секции (рис. I) можно представить как двойную радиальную линию, короткозамкнутое плечо I которой заполнено замедляющей средой. Разомкнутое плечо II в квазистационарном режиме

*) Энергетический подход является оценочным, так как ясно, что вся запасённая энергия не может быть передана ускоряемому объекту.

является, по сути, заряженным плоским конденсатором, в краевом поле которого и происходит ускорение.

Будем считать далее, что величина ускоряющего зазора Δ мала по сравнению с расстоянием до кольца $d = b - r_0$. В этом случае частота отсечки Н - волн $\omega_H = \pi c / \Delta \sqrt{\epsilon}$ существенно превосходит характерную частоту поля кольца на зазоре $\omega_0 = v_z / d$, так что в области II возбуждается только низшая мода Е - колебаний, соответствующая главной (ТЕМ - подобной) волне в радиальной линии. Таким образом процесс возбуждения является квазистационарным и может трактоваться на языке теории линий передачи, согласно которой ускоряющий зазор эквивалентен входному сопротивлению линии ^{ж)} Z_{6x} (рис.2) Индуцируемое кольцом падение напряжения ^{жж)} на зазоре равно тогда

$$U_{ind} = Z_{6x} I_{ind} \quad (2)$$

где I_{ind} - протекающий по каналу обратный ток.

Распределение обратного тока по длине канала найдём для случая $\Delta \ll d \ll b$. Полный заряд, индуцируемый кольцом на окружающем металле, равен по величине и противоположен по знаку заряду кольца. В силу $\Delta \ll d$, распределение наведенного на стенке канала заряда мало отличается от распределения в сплошной трубе, которое при $d \ll b$ имеет вид

$$q_{ind}(z) = - \frac{Q}{\pi} \frac{d}{(z - z_0)^2 + d^2} \quad (3)$$

где Q - заряд кольца, z_0 - координата кольца, q_{ind} - заряд на единицу длины трубы. Обратный ток соответственно равен $I_{ind} = v_z q_{ind}$,

ж) Вообще говоря, Z_{6x} является некоторым интегродифференциальным оператором.

жж) Выбирая в качестве положительного направления тока направление оси z , напряжение определяется как $U = \varphi(-\Delta/2) - \varphi(\Delta/2)$, где φ - потенциал.

где v_z - скорость движения кольца. Отсчитывая время от момента прохождения кольцом зазора ($z_0 = z_{\text{gap}} + v_z t$) получим ток на входе линии как функцию времени

$$I_{\text{ind}}(t) = - \frac{v_z Q}{\pi} \frac{d}{v_z^2 t^2 + d^2} \quad (4)$$

Нетрудно получить и точное выражение для обратного тока, учитывая цилиндричность геометрии:

$$I_{\text{ind}}(t) = - \frac{v_z Q}{b} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\mu_{0s} |v_z t| / b} \frac{J_0(\mu_{0s} r_0 / b)}{J_1(\mu_{0s})} \quad (4)$$

где $J_n(x)$ - функция Бесселя порядка n , $J_0(\mu_{0s}) = 0$. Для упрощения анализа мы будем использовать в дальнейшем выражение (4), справедливое при $d = b - r_0 \ll b$. Характерная длительность импульса тока равна $\tau = 2d/v_z$, соответствующая длина волны в среде $\lambda \approx \frac{4d}{\beta_z \sqrt{\epsilon}}$, $\beta_z = v_z/c$. Далее везде будем считать $L \gg 2d$, так что взаимодействие происходит с каждым индуктором поочередно.

Предположим сначала, что линия II (рис. I) однородна по длине, т.е. образована, например, системой коаксиалов или полосковых линий, и что её длина $l = R - b$ удовлетворяет условию $l > \frac{c\epsilon}{v_z} = \frac{2d}{\beta_z \sqrt{\epsilon}}$, так что линию можно считать неограниченной. Тогда входное сопротивление линии равно её характеристическому импедансу, имеющему (в гауссовой системе единиц) вид

$$Z_{\text{волн}} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{cC'} \quad (5)$$

где C' - ёмкость на единицу длины линии. Из (2,4,5) найдем отношение напряжения, индуцированного кольцом на зазоре, к приложенному стороннему

$$\frac{U_{\text{max}}}{U_0} = - \frac{\sqrt{\epsilon} \beta_z Q}{\pi d C' U_0} \quad (6)$$

Той же величине, очевидно, равно и отношение напряжённостей электрических полей.

Оценим теперь долю энергии, отданную кольцу сторонним полем. Изменение кинетической энергии кольца при $|U_{\max}/U_0| \ll 1$ равно $W_{\text{отп}} = Q U_0$. Длина участка линии, из которого энергия может быть передана кольцу, определяется временем взаимодействия с кольцом:

$$l = \frac{c\tau}{v} = \frac{2d}{\beta_2 v} . \text{ Величина энергии, запасённой на этом участке}$$

$$W_0 = \frac{c U_0^2}{2} = \frac{c C' U_0^2}{2} \approx \frac{d C' U_0^2}{\beta_2 v} \quad (7)$$

Отношение переданной энергии к запасённой

$$\frac{W_{\text{отп}}}{W_0} \approx \frac{v \beta_2 Q}{d C' U_0} \quad (8)$$

связано с отношением напряжений (6) формулой (1) (с точностью до множителя $\pi/2$).

3. В радиальной линии ёмкость на единицу длины (по радиусу)

$$C'(r) = \frac{\epsilon r}{2A} \quad (9)$$

и, соответственно, волновое сопротивление (5) являются функциями радиуса. Приближение однородной линии при характерной длине волны $\lambda > 2\pi r$ поэтому неприменимо.

Для определения индуцированного кольцом напряжения на зазоре рассмотрим распространение волны в радиальной линии. Пусть $\varphi(r, t) = \varphi|_{z=+A/2} = -\varphi|_{z=-A/2}$ и $i_r(r, t) = i_r|_{z=A/2} = -i_r|_{z=-A/2}$ — поверхностные плотности заряда и тока на обкладках, связанные уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r i_r) = 0 \quad (10)$$

Считая направление тока, указанное на рис. 2 положительным, для полного тока по обкладке через окружность радиуса r имеем

$$I = -2\pi r \cdot \dot{I}_r \quad (II)$$

При расстоянии между обкладками Δ , малом по сравнению как с радиусом, так и длиной волны, напряжение U и разность значений вектор-потенциала на обкладках V связаны с плотностями заряда и тока соотношениями

$$U = \varphi|_{z=-\Delta/2} - \varphi|_{z=\Delta/2} = -4\pi\Delta\sigma/\varepsilon \quad (I2)$$

$$V = A_r|_{z=-\Delta/2} - A_r|_{z=\Delta/2} = -\frac{4\pi\Delta\dot{I}_r}{c} = \frac{2\Delta I}{cr}$$

Из (I0, I2) следует уравнение для потенциалов

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) = 0 \quad (I3)$$

Условие равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля на обкладках даёт второе уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (I4)$$

Из (I3, I4) следует "телеграфное уравнение" для волны в радиальной линии

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (I5)$$

решение которого в Фурье - представлена по времени имеет для излучаемой волны вид

$$U = \text{const} \cdot H_0^{(1)}(kr) \quad (I6)$$

где $k = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{c}$. Из (I2, I4, I6) нетрудно найти связь между Фурье - гармониками тока и напряжения:

$$U = -\frac{2i\Delta}{cr\sqrt{\varepsilon}} \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_1^{(1)}(kr)} I \quad (I7)$$

Подставляя в (I7) Фурье - образ тока (4): $I = -\frac{Q}{2\pi} e^{-i\omega d/\sqrt{\varepsilon}t}$, и совершая обратное преобразование, найдем напряжение, индуцированное на входе линии ($r = b$):

$$U(t) = -\frac{2\Delta Q}{\pi \epsilon b^2} \int_0^{\infty} e^{-xd/\beta_2 \sqrt{\epsilon} b} \frac{\text{Im} \{ e^{-ixct/b\sqrt{\epsilon}} H_0^{(1)}(x) H_1^{(2)}(x) \}}{H_1^{(1)}(x) H_1^{(2)}(x)} dx \quad (18)$$

Вклад в потери даёт только симметричная по t часть интеграла в (18), достигающая максимального значения в момент прохождения зазора кольцом ($t=0$):

$$U_{\max} = -\frac{4\Delta Q}{\pi \epsilon b^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xd/\beta_2 \sqrt{\epsilon} b} dx}{x [Y_1^2(x) + Y_1'^2(x)]} \quad (19)$$

Интеграл (19) может быть приближённо вычислен в следующих предельных случаях:

$$1) \beta_2 \sqrt{\epsilon} \ll d/b$$

$$U_{\max} \approx -\frac{\beta_2^2 \Delta Q}{d^2} \quad (20)$$

$$2) \beta_2 \sqrt{\epsilon} \gg d/b$$

$$U_{\max} \approx -\frac{2\Delta \beta_2 Q}{\pi b d \sqrt{\epsilon}} \quad (21)$$

Во втором случае, отвечающем малой длине волны, неоднородность линии несущественна и напряжение соответствует формуле (6) с ёмкостью на единицу длины (9), взятой при $r=b$.

Квадратичная зависимость подсадки напряжения от скорости движения кольца при её малых значениях следует и из энергетических соображений. Область, принимающая участие во взаимодействии с кольцом, ограничена радиусом $r^* = b + \frac{c\tau}{\sqrt{\epsilon}} \approx b + \frac{2d}{\beta_2 \sqrt{\epsilon}}$. Для отношения переданной энергии к запасённой в этой области получим

$$\frac{W_{\text{отп}}}{W_0} \approx \frac{2\beta_2^2 \Delta Q}{d^2 (1 + \beta_2 \sqrt{\epsilon} b/d) U_0} \quad (22)$$

что в соответствующих предельных случаях согласуется с (I) и (20,21).

Итак, в рассмотренных случаях энергетический и электродинамический (точнее, электротехнический) подходы приводят, как и ожидалось, к результатам, совпадающим с точностью до множителя порядка единицы.

4. Предыдущий анализ справедлив при длине линии $l = R - b > \frac{ct}{\sqrt{\epsilon}} \approx \frac{2d}{\beta_2 \sqrt{\epsilon}}$, то есть при достаточно больших скоростях движения кольца v_2 .

Подсадка ускоряющего напряжения останется такой же и для $\frac{d}{l} < \beta_2 \sqrt{\epsilon} < 2d/l$, так как отражённая от конца линии волна не успеет вернуться к её входу за время взаимодействия. При $\beta_2 \sqrt{\epsilon} < d/l$ для определения подсадки напряжения необходимо знать условия отражения при $r = R$. Оценка сверху может быть получена в предположении, что линия при $r = R$ разомкнута. Такое предположение соответствует действительности, поскольку волновое сопротивление линии (при $r = R$ $Z_{волн} \approx 1 \Omega$) намного меньше входного сопротивления фидера и заполненного ферромагнетиком короткозамкнутого плеча I (рис. I).

Используя преобразование Лапласа по времени и требуя равенства нулю тока при $r = R$, из (12-15) нетрудно найти связь между током и напряжением на входе линии ($r = b$)

$$U(t) = \int_{-\infty}^t R(t-t') I(t') dt' \quad (23)$$

где

$$R(t) = -\frac{A}{\pi b \sqrt{\epsilon}} \int_{\rho_0 - i\infty}^{\rho_0 + i\infty} e^{\rho t} \frac{J_0(kb) Y_1(kR) - Y_0(kb) J_1(kR)}{J_1(kb) Y_1(kR) - Y_1(kb) J_1(kR)} d\rho \quad (24)$$

$k = i\rho \sqrt{\epsilon} / c$, J_n, Y_n - функции Бесселя и Неймана порядка n , ρ_0 выбирается так, чтобы все полюса подынтегральной функции лежали левее пути интегрирования в (24). Помимо полюса $\rho = 0$, подынтегральная функция имеет совокупность симметрично расположенных на

мнимой оси полюсов $kb = \pm \lambda_s$, $s = 1, 2, \dots$, где $\lambda_s = \frac{\pi s}{\alpha - 1}$
 - корни уравнения

$$Y_1(\lambda_s) Y_1(\alpha \lambda_s) = Y_1(\alpha \lambda_s) Y_1(\lambda_s) \quad (25)$$

$\alpha = R/b$. Эти полюса соответствуют собственным модам колебаний разомкнутой на концах радиальной линии.

Применяя теорию вычетов, получим

$$R(t) = \frac{1}{C} + \frac{4A}{\epsilon b^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\lambda_s c t}{b \sqrt{\epsilon}}}{\frac{Y_1^2(\lambda_s)}{Y_1^2(\alpha \lambda_s)} - 1} \quad (26)$$

где $C = \epsilon (R^2 - b^2) / 4A$ - ёмкость линии. В случае медленной зависимости входного тока от времени ($T_1 \approx 2b\sqrt{\epsilon}/c \ll \tau \approx \epsilon d / v_2$) интегралы от быстроосциллирующих членов малы, и напряжение на линии такое же, как при зарядке сосредоточенной ёмкости C заданным током $I(t)$:

$$U(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(t') dt' \quad (27)$$

максимальное значение индуцированного при этом равно $U_{max} = -Q/C$, где Q - заряд кольца. Таким образом, при малых скоростях кольца ($\beta_2 \ll d/b\sqrt{\epsilon}$) подсадка напряжения равна просто отношению заряда кольца к заряду на линии созданному сторонним источником. В этом (квазистатическом) режиме возможна полная передача запасённой в линии энергии кольцу (при равенстве зарядов).

Для определения среднего значения напряжения, индуцированного кольцом, найдём работу, совершённую кольцом над полем при пролёте мимо ускоряющего зазора (она, очевидно, равна по величине и противоположна по знаку энергии ΔW , приобретённой кольцом):

$$-\Delta W = \int_{-\infty}^{\infty} (U_0 + U_{ind}(t)) I_{ind}(t) dt = -W_{orig} + W_{less} \quad (28)$$

где $W_{omg} = U_0 Q$, $W_{loss} = \int_{-\infty}^{\infty} U_{ind} I_{ind} dt$. Используя (23,26), найдём

$$W_{loss} = \frac{1}{2C} \left(\int_{-\infty}^{\infty} I_{ind} dt \right)^2 + \frac{2A}{\epsilon b^2} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{J_1^2(\lambda_s)}{J_1^2(\alpha \lambda_s)} - 1 \right]^{-1} * \\ * \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} I_{ind} \cdot \cos \frac{\lambda_s ct}{\sqrt{\epsilon} b} dt \right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} I_{ind} \cdot \sin \frac{\lambda_s ct}{\sqrt{\epsilon} b} dt \right)^2 \right] \quad (29)$$

Среднее значение индуцированного напряжения определяется через интеграл потерь следующим образом:

$$\overline{U_{ind}} = W_{loss} / \int_{-\infty}^{\infty} I_{ind} dt = - W_{loss} / Q \quad (30)$$

Подставляя в (29) выражения (4) для обратного тока, получим

$$\overline{U_{ind}} = -Q \left\{ \frac{1}{2C} + \frac{2A}{\epsilon b^2} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{J_1^2(\lambda_s)}{J_1^2(\alpha \lambda_s)} - 1 \right]^{-1} \exp\left(-\frac{2\lambda_s d}{\beta_2 \sqrt{\epsilon} b}\right) \right\} \quad (31)$$

Для точной зависимости обратного тока от времени (4) также можно получить достаточно простое выражение

$$\overline{U_{ind}} = -Q \left\{ \frac{1}{2C} + \frac{2A}{\epsilon b^2} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{J_1^2(\lambda_s)}{J_1^2(\alpha \lambda_s)} - 1 \right]^{-1} \frac{I_0^2\left(\frac{r_0}{b} \frac{\lambda_s}{\beta_2 \sqrt{\epsilon}}\right)}{I_0^2\left(\frac{\lambda_s}{\beta_2 \sqrt{\epsilon}}\right)} \right\} \quad (31)$$

фактически совпадающее с (31) при $d = b - r_0 \ll b$.

Покажем (полагая $\alpha = R/b \gg 1$), что при больших скоростях кольца $\overline{U_{ind}}$ согласуется с максимальными значениями напряжения (20,21), найденными ранее для неограниченной линии. При $2d/R \ll \beta_2 \sqrt{\epsilon} \ll 2d/b$ основной вклад в (31) дают члены ряда с $\lambda_s \ll 1$, для которых $J_1^2(\lambda_s)/J_1^2(\alpha \lambda_s) \approx 2\alpha^2/\pi^2 s^2 \gg 1$. Суммируя, получим

$$\overline{U_{ind}} \approx - \frac{4\beta_2^2 Q}{4d^2} \quad (32)$$

В обратном случае $\beta_2 \sqrt{\epsilon} \gg 2d/b$ превалирует вклад далёких членов ряда, для которых $J_1^2(k_2)/J_1^2(k_1) \approx \alpha$:

$$\overline{U_{ind}} \approx - \frac{A \beta_2 Q^2}{\pi \sqrt{\epsilon} b c d} \quad (33)$$

Различие отношений $\overline{U_{ind}}/U_{max}$ в предельных случаях объясняется различием в форме импульса напряжения.

Сделаем численную оценку для параметров, близких к параметрам ускоряющей секции КУТИ-20: $R = 21$ см, $b = 7$ см, $\Delta = 0,5$ см, $\epsilon = 1$, $d = b - r_0 = 3$ см, $Q = 10^{13} e$. При скоростях вплоть до конечного значения $\beta_2 = 0,2$, соответствующего энергии ионов ≈ 20 МэВ/нуклон, возбуждение собственных колебаний радиальной линии несущественно, и среднее значение индуцированного напряжения равно

$$\overline{U_{ind}} = - \frac{Q}{2C} \approx 3,7 \text{ кВ}$$

При $U_0 = 46$ кВ относительная подсадка напряжения не превосходит 10%. Достаточную энергообеспеченность ускорения показывает и сравнение переданной и запасенной энергией. Энергия запасенная в радиальной линии одного индуктора при указанных параметрах $W_{зан} = \frac{CU_0^2}{2} \approx 0,23$ Дж, в 360-ти индукторах $\sum W_{зан} \approx 83$ Дж. Кинетическая энергия кольца на выходе ускорителя при числе ионов урана $N_i = 3 \cdot 10^{10}$ должна быть $\sum W_{отг} \approx 23$ Дж, так что $W_{отг}/W_{зан} \approx 28\%$ (в реализующемся квазистатическом режиме $W_{отг}/W_{зан} = 4 | \overline{U_{ind}} / U_0 |$).

Отметим, что в реальной секции возможны дополнительные потери вследствие возбуждения таких элементов, как токоподводы к фокусирующим катушкам и др. Эти потери также можно оценить, применяя теорию линий передачи.

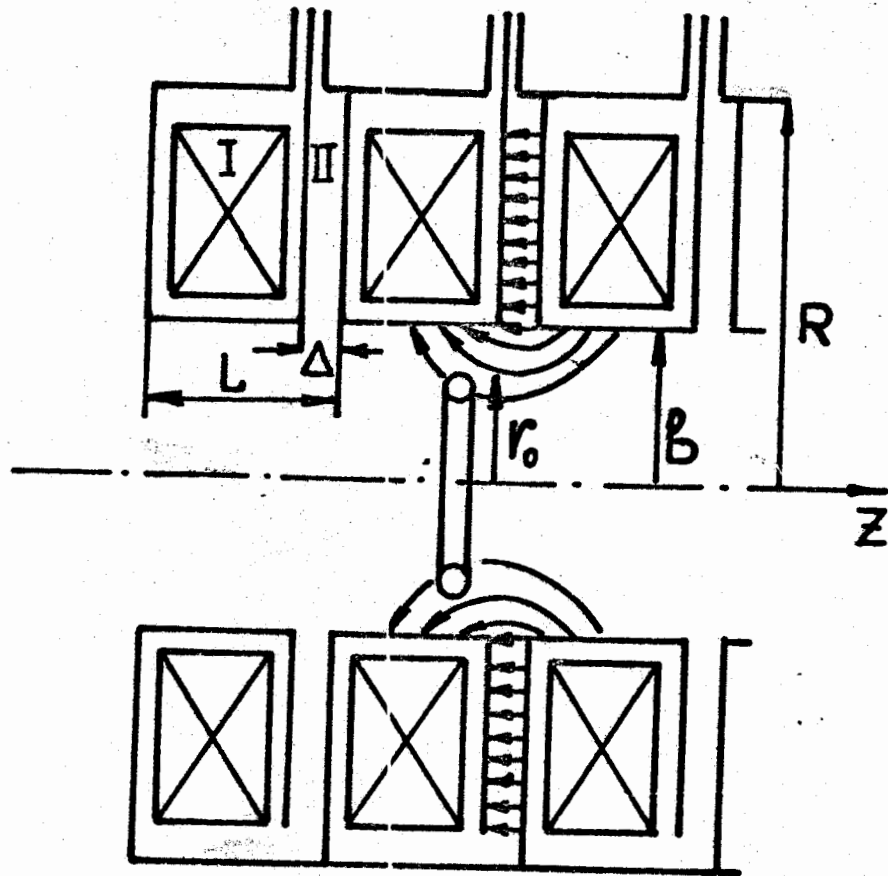


Рис. 1

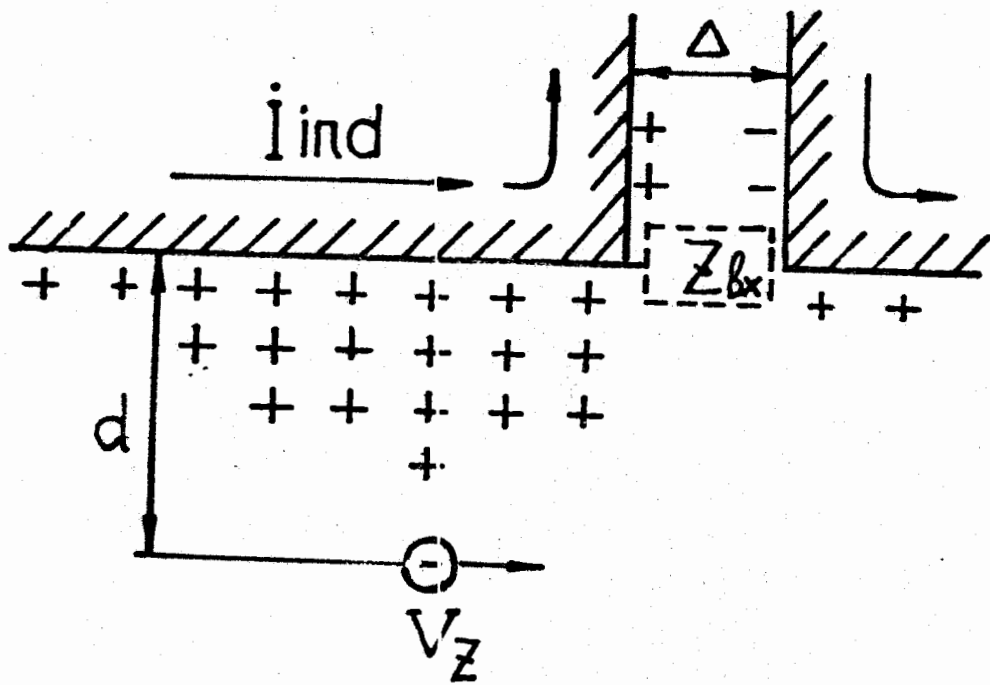


Рис. 2