

Б1-9-7524

С345е

С-217

Сафронов А.И.



У439/73

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б1-9-7524

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 1973

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория ядерных проблем

Сафонов А.И.

Б1-9-7524

АПРОКСИМАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ДУАНТА АНАЛИТИЧЕСКИМИ
ВЫРАЖЕНИЯМИ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Информация о документе

30 октября 1973

г. Дубна, 1973 год

О Г Л А В Л Е Н И Е

	стр.
1. Введение	4
2. Аппроксимация потенциального поля дуантов без конного источника (вдали от источника)	6
3. Аппроксимация потенциального поля около за- земленной рамки, окружающей дуанты без "обычных"	14
4. Аппроксимация потенциального поля дуанта с антидуантом при наличии конного источника (около источника)	16
5. Вычисление компонент электрического поля в полярной системе координат	29
6. Приложение. Построение кривых второго порядка по 5 точкам для аппроксимации зависимости полуосей граничного эллипса от радиуса	36
7. Литература	38

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе описана методика аппроксимирования аналитическими выражениями измеренного при помощи электролитической ванны ускоряющего поля дуанта при наличии источника ионов, антидуанта и заземленной рамки С-образного сечения, окружающей по полукруглой части дуанта без вертикальной стенки ("обычайи"). Формула, описывающая зависимость потенциала ψ в медианной плоскости от z и φ , выражается в виде произведения трех потенциальных функций:

ψ_u - источника ионов, ψ_d - дуанта без источника и
 ψ_p - дуанта около заземленной рамки. Приводятся выражения для компонент напряженности электрического поля в полярной системе координат.

I. Введение

Для расчета радиально-фазового движения ионов в циклотроне или синхроциклотроне при помощи ЭВМ необходимо выразить компоненты напряженности электрического поля дуанта в зависимости от координат. Точный расчет электрического поля дуанта очень трудоемок, особенно для синхроциклотронов, где напряжение подается только на один дуант и отсутствует вертикальная плоскость симметрии электрического поля, проходящая через ионный источник параллельно дуанту /1,2/. А для реальной геометрии дуанта и ионного источника с плазменным шнуром разряда, находящимся под нулевым потенциалом (или с кожухом закрытого источника) точный аналитический расчет, по-видимому, вообще не возможен.

Воспользовавшись численным методом расчета полей (методом сеток) /3/ или измерив распределение электрического поля на электролитической ванне /4/ или установке электростатической индукции МИТ /5/, можно составить таблицы потенциалов или напряженностей и пользоваться ими при расчетах. Однако, составление таблиц с достаточно малым шагом требует затраты большого количества времени. Большие затраты времени потребуются также при перфорировании числового материала, а в процессе счета на интерполирование и численное дифференцирование. Например, расчет траектории до радиусов 20-25 см при задании электрического поля таблицей потенциалов занимает 20-25 мин. счетного времени БЭСМ-6. Поэтому в ряде работ /6,7,8/ при расчетах

радиально-фазового движения использована приближенная формула, не учитывающая влияния ионного источника и асимметрии электрического поля дуанта синхротрона.

Электрическое поле в медианной плоскости выражалось только в зависимости от одной координаты y , перпендикулярной плоскости дуанта:

$$E_y(y) = - \frac{U_0}{D_{\text{эф}}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 y^2}{D_{\text{эф}}^2}}, \quad (1)$$

где U_0 - напряжение на дуанте, а $D_{\text{эф}}$ - эффективная апертура дуанта, несколько большая реальной апертуры и определяемая из условия соответствия (с отклонением 5-10%) набора энергии за оборот, подсчитанного для формулы (1) и для распределения эквипотенциалов, полученного при помощи электролитической ванны [1].

Как видно из формулы (1) зависимость $E_y(y)$ симметрична относительно оси $y = 0$, тогда как реальная зависимость особенно при наличии ионного источника существенно асимметрична. В работе Данилова В.И. и Пузынина И.В. [1] зависимости $E_y(y)$, полученные при помощи электролитической ванны, но также без учета плазменного столба ионного источника (или кожуха для источника закрытого типа), аппроксимированы полиномами 6-8 степеней, коэффициенты которых рассчитывались на ЭМ. Как формулу (1) так и полином нельзя использовать для точных расчетов траекторий около ионного источника на первых нескольких оборотах. На рис. 1 показано радиально-фазовые траектории, рассчитанные при задании E_y формулой (1) (сплошные линии) и при задании электрического поля таблицами потенциалов (пунктирные линии). (Таблицы были

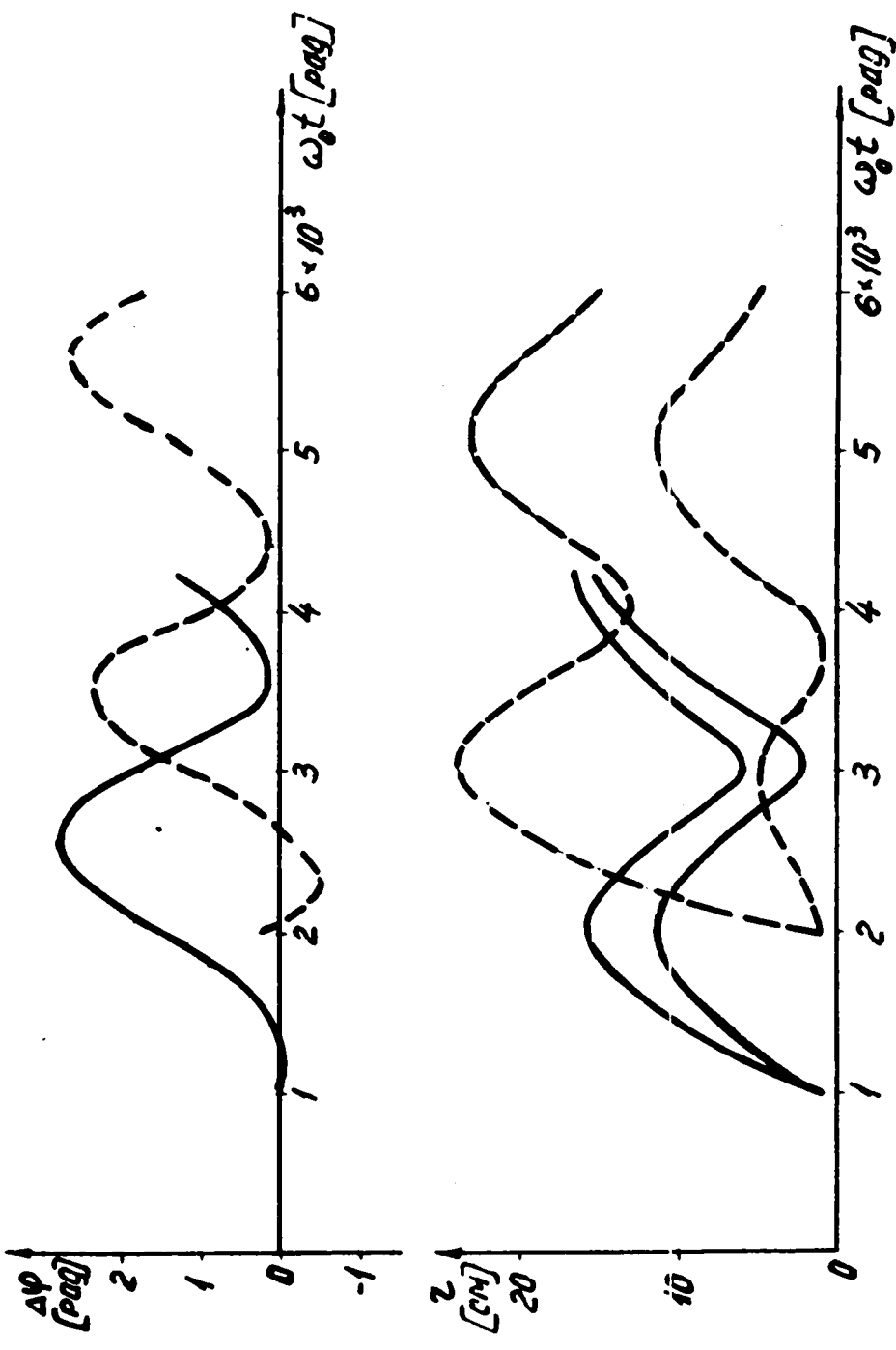


Рис.1. Радиальные и фазовые траектории.

получены при помощи электролитической ванны с использованием модели центральной области синхротрона ОИИ в масштабе 1 : 2, совмещенной с поверхностью электролита по медианной плоскости ^{1/4}). Видно существенное отличие. В настоящей работе выводится формула, аппроксимирующая распределение потенциала в медианной плоскости и учитывающая влияние ионного источника, а также заземленной рамки, окружающей дуанты по полукруглой части. При выводе обращалось внимание на то, чтобы формула не получилась слишком громоздкой (для уменьшения счетного времени) но в то же время с достаточной точностью описывающая распределение потенциала. Относительный потенциал $\psi(z, \varphi) = U(z, \varphi) / U_0$ выражается в виде произведения трех независимых потенциальных функций, учитывающих: влияние источника $\psi_u(z, \varphi)$, влияние ускоряющего промежутка дуант-антидуант $\psi_{1g}(z, \varphi)$ или дуант-дуант в циклотроне $\psi_{2g}(z, \varphi)$ и влияние заземленной рамки вокруг дуантов $\psi_p(z)$. Рассмотрим вывод функций ψ_u и ψ_{1g} для распределения потенциала, полученного при помощи электролитической ванны на модели в масштабе 1 : 1 центральной области установки "Ф" (первоначальный вариант), а функций ψ_{2g} и ψ_p для модели некоторого условного циклотрона.

2. Аппроксимация потенциального поля дуантов без ионного источника (вдали от источника)

Измерения распределения потенциала в медианной плоскости проводилось для центральной области фазотрона, изображенной на

рис.2. Характерные размеры следующие: апертура дуанта $D_1 = 5$ см, расстояние между дуантом и антидуантом 4 см, расстояние между кримирами камеры 12 см, радиус источника $R_u = 0,3$ см. Источник расположен на одинаковом расстоянии от дуанта и антидуанта. Без источника или вдали от источника (на расстоянии ≈ 10 см вдоль кромки дуанта) зависимость потенциала от y показана на рис.3 (кривая 1-а), а числовые значения приведены в таблице I. По виду эта зависимость напоминает функцию:

$$\psi_{01} = \beta \cdot \operatorname{arccctg} \alpha y. \quad (2)$$

Интегрирование ^{же} формулы (1) и переход к относительным величинам дает:

$$\psi_{02} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arccctg} \frac{\pi y}{D_2}, \quad (3)$$

что больше соответствует случаю с двумя дуантами. Измерения распределения потенциала для двух дуантов в ускоряющем промежутке и около окружающей дуанты заземленной рамки проводилось на модели условного циклотрона с апертурой $D_2 = 6$ см, расстоянием между дуантами 3 см и высотой камеры 18 см. Схематический чертеж циклотрона показан на рис.4, а распределение потенциала в медианной плоскости вдоль оси y без учета влияния ионного источника, который в случае двух дуантов незначительно искажает картину поля, так как располагается в плоскости нулевого потенциала, изображено на рис.3 (кривая 2-а). Числовые данные приведены в таблице II.

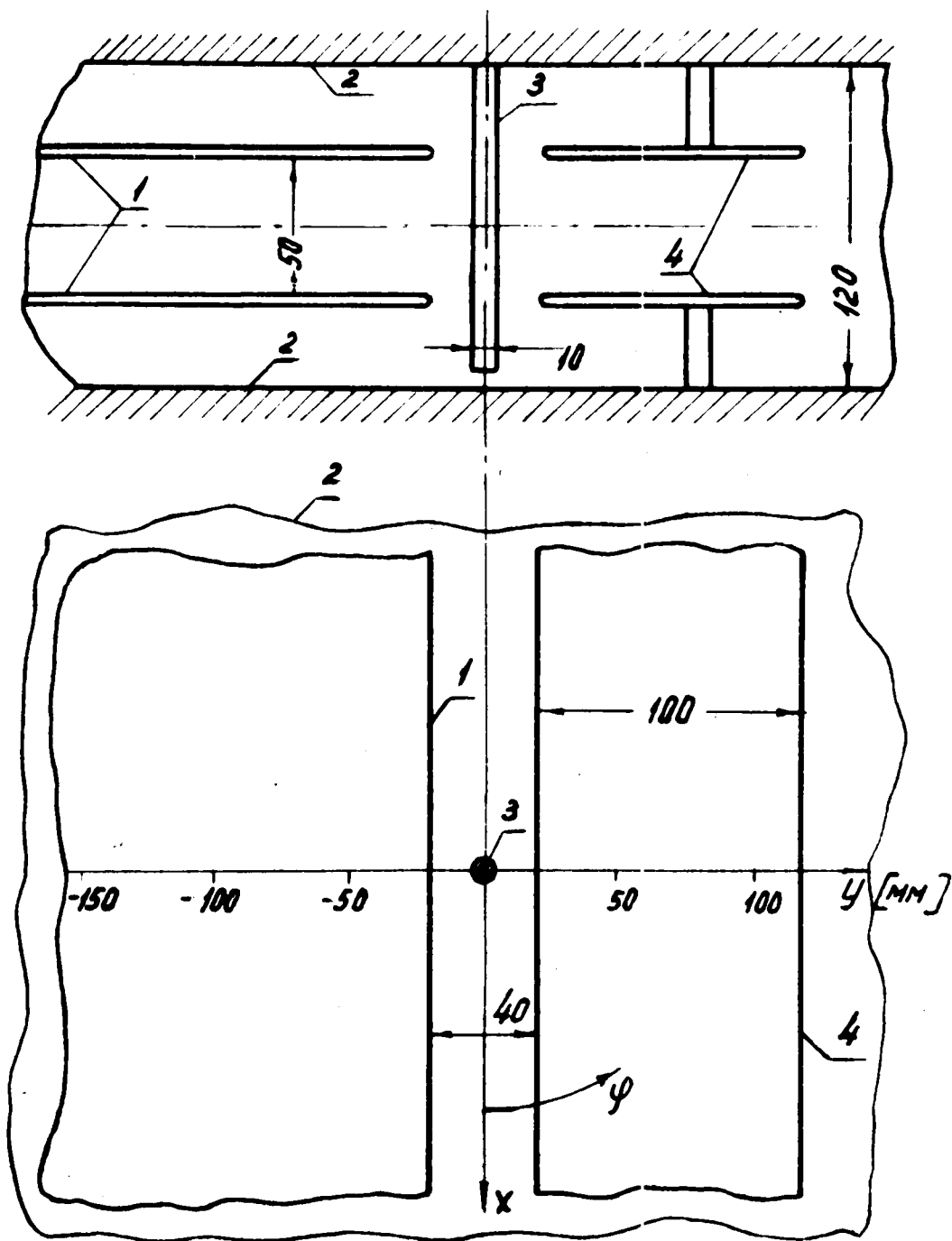


Рис. 2. Схематический чертеж центральной области фазотрона : 1 - дуант , 2 - крышки камеры, 3 - ионный источник, 4 - антидуант

Рассмотрим сначала случай одного дуанта с антидуантом (Фазотрон). Подбором величин α и β в формуле (2) не удастся получить хорошее совпадение ψ_1 и $\psi_{1изм}$ для всех значений y . Как видно из рисунка 3 и таблицы I кривая I-а имеет точку симметрии $\psi_{1изм} = 0,5$ при $y = -0,5$ см (с незначительной погрешностью). Это смещение точки симметрии от оси $y = 0$ в сторону дуанта можно объяснить влиянием крышек камеры, находящихся так же как и антидуант под нулевым потенциалом. Вводи в формулу (2) вместо y переменную $y_1 = y + 0,5$, подобрав величину α и положив $\beta = 1/\pi$, получим формулу достаточно хорошо аппроксимирующую распределение потенциала на малых расстояниях от оси y (до $y = \pm 3$ см) и дающую несколько большую погрешность для больших $|y|$. Изображенная на рис.3 кривая I-б описывается функцией:

$$\psi_{11} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccctg} \frac{\alpha_1}{D_1} (y + y_0), \quad (4)$$

где $\alpha_1 = 2,25$; $D_1 = 5$ см - апертура дуанта; $y_0 = 0,5$ см - смещение точки симметрии из-за влияния крышек камеры. Формула (4) вполне годится для расчетов, где не требуется большая точность. Однако, меняя в ней величину α в зависимости от y , можно получить гораздо лучшее соответствие с $\psi_{1изм}$ для любых значений y . Предполагая квадратичную зависимость α_1 от y_1 в виде

$$\alpha_1 = a_1 + b_1 \left(\frac{y_1}{D_1} \right)^2,$$

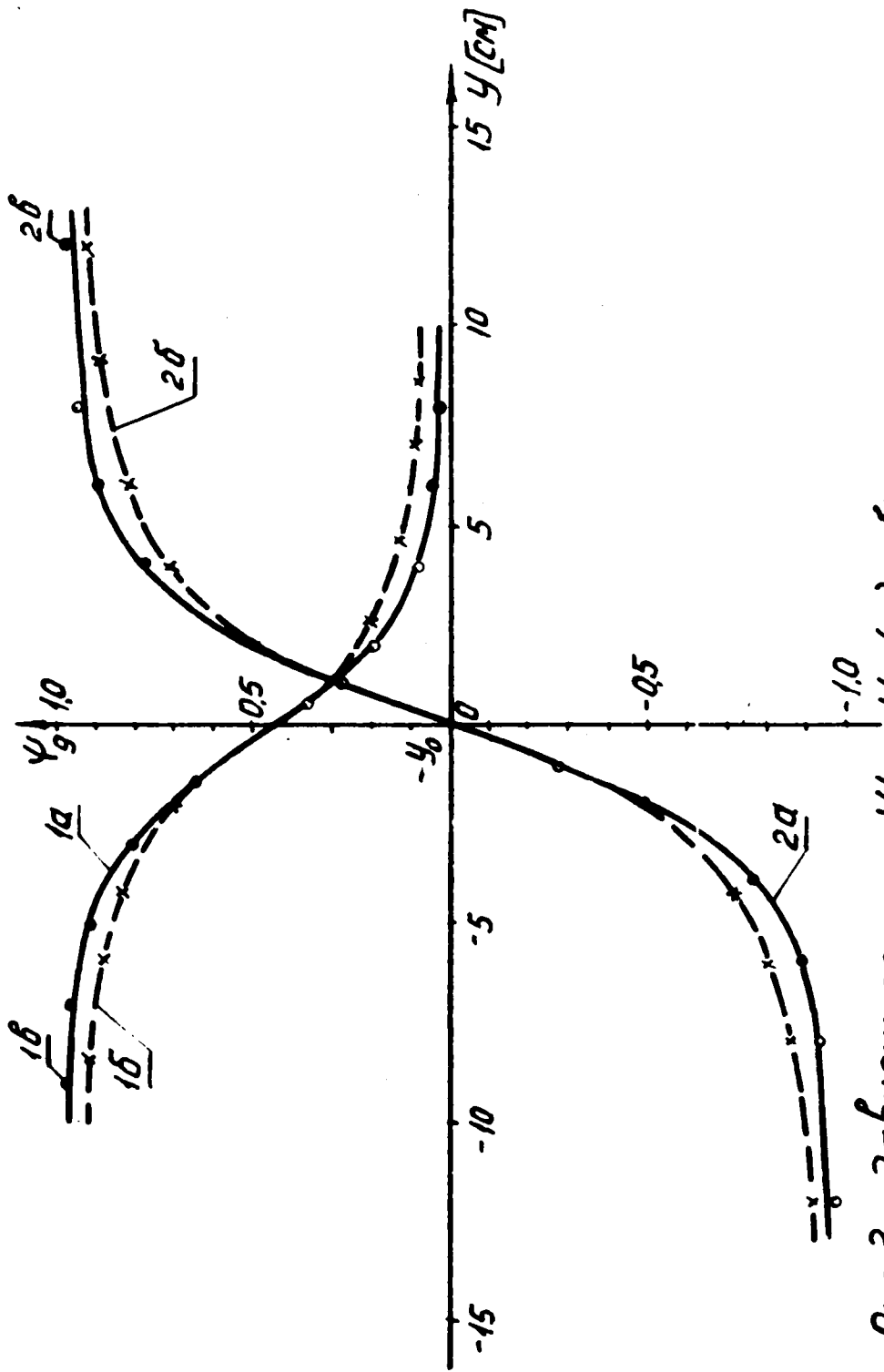


Рис. 3. Зависимости $\psi_g = \psi_g(y)$ без источника.
а- измерения на ванне; 1 - один диаметр; 2 - два диаметра;
б, в- расчет по формулам: (4) - 1б, (7) - 1б, (8) - 2б, (9) - 2б.

найдем коэффициенты α_1 и β_1 из условия максимального приближения ψ_{11} к $\psi_{1изм}$. Приравнявая уравнение (4) к $\psi_{1изм}$ и решая относительно α_1 , получим:

$$\alpha_1 = \frac{D_1}{y_1} \operatorname{ctg} \pi \psi_{1изм} = \alpha_1 + \beta_1 \left(\frac{y_1}{D_1} \right)^2. \quad (5)$$

Зависимость α_1 от y_1 и $\psi_{1изм}$, полученная таким образом имеет при y_1 близком к нулю минимальное значение, которое и равно коэффициенту α_1 . Поскольку кривая $\psi_{1изм}$ все-таки несколько несимметрична относительно $y_1 = 0$ ($y = -0,5$ см), величину α_1 берем как среднее значение при $y_1 = \pm 0,25$ см, т.е. $\alpha_1 = 2,25$.

Теперь легко найти коэффициент β_1 :

$$\beta_1 = \left(\frac{D_1}{y_1} \operatorname{ctg} \pi \psi_{1изм} - 2,25 \right) \frac{D_1^2}{y_1^2}. \quad (6)$$

Выбирая среднее значение β_1 , равное также 2,25, после подстановки $\alpha_1 = 2,25 \left(1 + \frac{y_1^2}{D_1^2} \right)$ в формулу (4) имеем:

$$\psi_{12} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccotg} \left\{ 2,25 \frac{y+0,5}{D_1} \left[1 + \left(\frac{y+0,5}{D_1} \right)^2 \right] \right\}. \quad (7)$$

При вычислениях по этой формуле ошибки находятся в пределах $(-1,8 + 1,5)\%$ от максимального значения $\psi_{1изм}$.

Следует отметить, что изменение величины α_1 влияет на ψ_{12} сильнее при малых y_1 , а величины β_1 - при больших.

TABLE I

ψ [CM]	-9	-7	-5	-3	-1,5	-0,75	-0,25	0,5	2	4	6	8
ψ_{143M}	0,962	0,952	0,920	0,817	0,648	0,543	0,472	0,370	0,197	0,080	0,042	0,030
ψ'_{11} [CM]	-8,5	-6,5	-4,5	-2,5	-1,0	-0,25	0,25	1,0	2,5	4,5	6,5	8,5
ψ''_{11}	0,919	0,825	0,854	0,769	0,635	0,536	0,464	0,365	0,231	0,146	0,105	0,081
$\frac{\psi_{143M} - \psi_{11}}{\psi_{143M \text{ MAX}}}$ 100%	4,5	6,0	6,9	5,0	1,4	0,7	0,8	0,5	-3,5	-6,3	-6,5	-5,3
ψ_{12}	0,979	0,960	0,915	0,803	0,639	0,536	0,464	0,361	0,197	0,085	0,040	0,021
$\frac{\psi_{143M} - \psi_{12}}{\psi_{143M \text{ MAX}}}$ 100%	-1,8	-0,8	0,5	1,5	0,9	0,7	0,8	0,9	0,0	-0,5	0,2	0,9

При $\beta_1 = 0$ формула (7) переходит в формулу (4). Измеренные при помощи электролитической ванны и рассчитанные по формулам (4) и (7) зависимости $\psi_{1g} = \psi_{1g}(y)$ показаны на рис.3 - кривые I-а (-) I-б (x—x) и I-в (o o o), соответственно.

В случае двух дуантов, к которым приложены потенциалы одинаковые по величине но противоположные по знаку, кривые $\psi_{2g} = \psi_{2g}(y)$ симметричны относительно оси $y = 0$. Методика аппроксимирования заключается или в подборе $D_{эф}$ и числового множителя перед $arctg \frac{\pi y}{D_{эф}}$ в формуле (3), или в вычислении коэффициентов a_2 и b_2 аналогично случаю с одним дуантом.

В первом случае получается выражение:

$$\psi_{21} = 0,67 arctg \frac{\pi y}{D_{эф}}, \quad (8)$$

где $D_{эф} = 1,2 D_2$. Результаты расчета по этой формуле приведены в таблице II и на рис.3 (кривая 2-б). При аппроксимации

$\psi_{2изм}$ выражением:

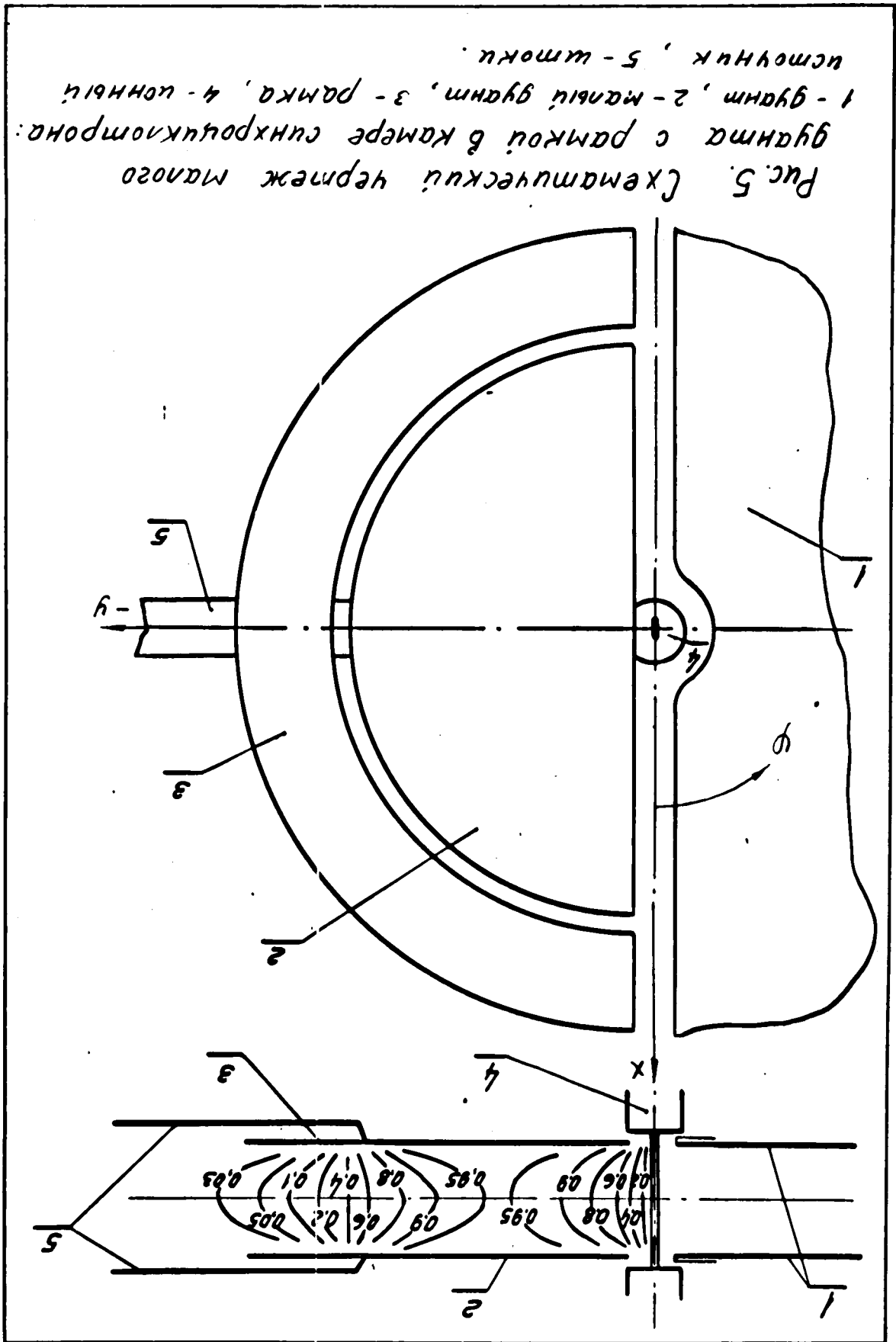
$$\psi_{21} = \frac{2}{\pi} arctg \frac{y}{D_2} \left(a_2 + b_2 \frac{y^2}{D_2^2} \right), \quad (9)$$

где $a_2 = 2,62$ и $b_2 = 2,95$ получается значительно лучшее приближение к результатам измерений. Числовые значения приведены также в таблице II, а график на рис.3 (кривая 2-в).

Переход в формулах (4), (7), (8) и (9) к полярной системе координат, используемой при расчетах движения, осуществляется подстановкой $y = z \sin \varphi$, где z - текущий радиус частицы,

TABELA II

y [cm]	-12	-8	-6	-4	-2	-1	1	2	4	6	8	12
ψ_{243M}	-0,956	-0,924	-0,888	-0,781	-0,500	-0,270	0,270	0,500	0,781	0,888	0,924	0,956
ψ_{21}	-0,925	-0,864	-0,807	-0,703	-0,480	-0,275	0,275	0,480	0,703	0,807	0,864	0,925
$\frac{\psi_{243M} - \psi_{21}}{\psi_{243M} \text{ MAX}} 100\%$	3,2	6,4	8,5	8,2	2,3	-0,5	-0,5	2,3	8,2	8,5	6,4	3,2
ψ_{22}	-0,978	-0,940	-0,887	-0,768	-0,494	-0,269	0,269	0,494	0,768	0,887	0,940	0,978
$\frac{\psi_{243M} - \psi_{22}}{\psi_{243M} \text{ MAX}} 100\%$	-2,3	-1,7	0,1	1,4	0,6	0,1	0,1	0,6	1,4	0,1	-1,7	-2,3



φ - ее азимутальная координата, отсчитываемая против часовой стрелки от оси X , параллельной кромке дуанта.

3. Аппроксимация потенциального поля около заземленной рамки, окружающей дуанты без "обичайки"

При некоторых расчетах движения частиц в циклотронах или в районе фокусирующих электродов (вспомогательного малого дуанта), в синхротронных /10/ необходимо знать распределение провисающего электрического поля около полукруглой кромки дуантов без "обичайки", окруженной заземленной рамкой (см. рис. 4 и 5).

Будем считать, что потенциал ψ_p в медианной плоскости в этих случаях зависит только от радиуса, а изменение его в районе ускоряющего промежутка учитывается функциями ψ_{1g} или ψ_{2g} , введенными в предыдущем разделе (формулы 4, 7, 8 и 9). Тогда относительный потенциал этих систем без учета влияния ювного источника записывается в виде произведений:

$$\psi_{10}(z, \varphi) = \psi_{1g}(z, \varphi) \cdot \psi_p(z), \quad (10)$$

$$\psi_{20}(z, \varphi) = \psi_{2g}(z, \varphi) \cdot \psi_p(z). \quad (10^*)$$

Зависимость потенциала $\psi_{p \text{ и } 3M}$ от радиуса, полученная при помощи электролитической ванны для модели циклотрона (рис. 4), показана на рис. 6. График зависимости $\psi_{p \text{ и } 3M}(z)$ также можно описать арктангенсом, поэтому, используя методику, применяемую при выводе формулы (7), получим следующее выражение, аппрок-

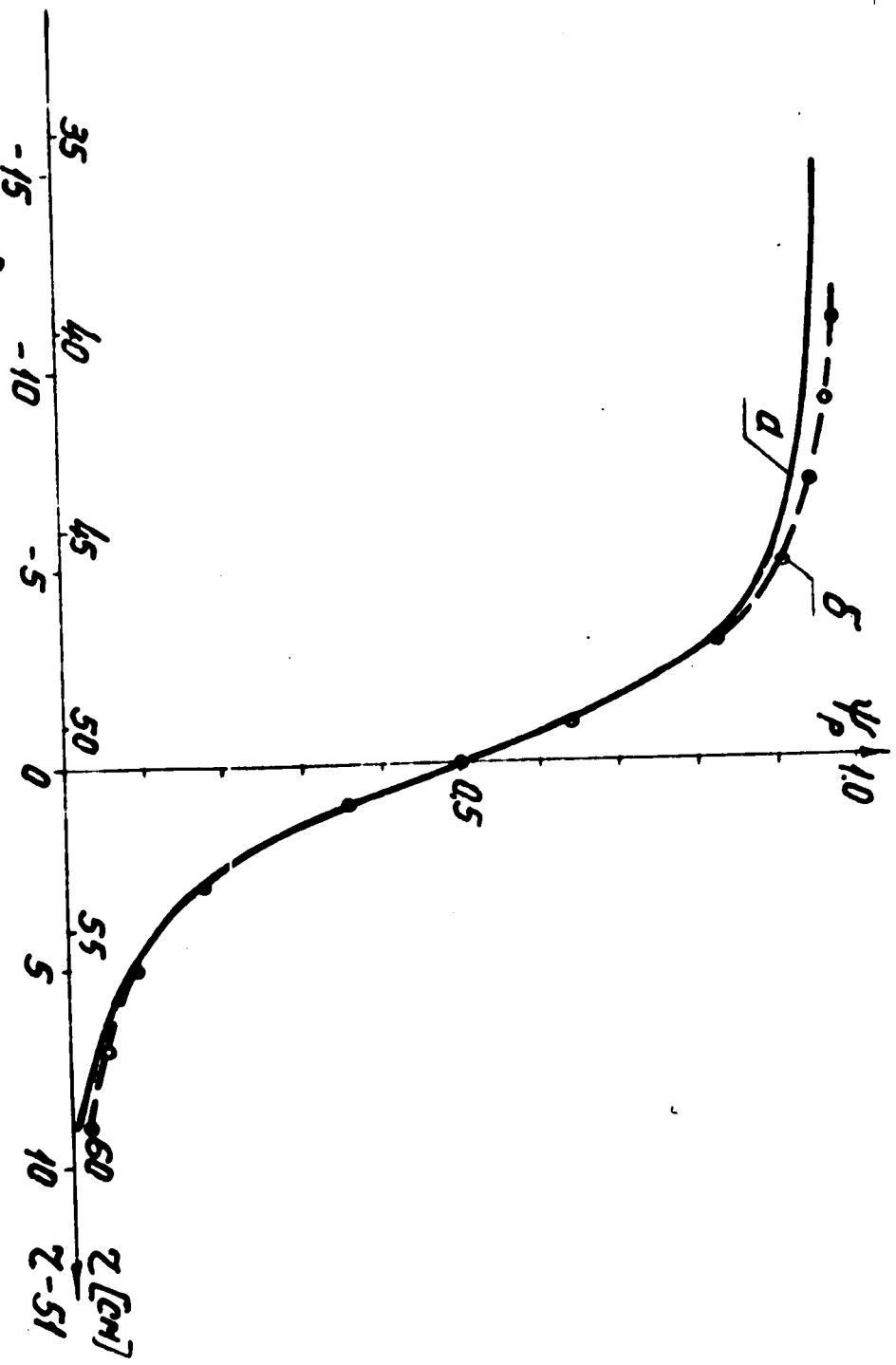


Рис. 6. Зависимость $\psi_p = \psi(z)$: а - измерения на электролитической ванне, б - расчет по формуле (11).

сигнирующее зависимость потенциала в районе заземленной рамки с погрешностями в пределах $(-0,4 + -3,4)\%$ от максимального значения $\psi_{pизм}$:

$$\psi_p = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccctg} \frac{z_1}{D_2} \left(2,78 + 2,18 \frac{z_1^2}{D_2^2} \right), \quad (11)$$

где $D_2 = 6$ см; $z_1 = z - R_0$. $R_0 = 51$ см - радиус середины зазора между дуантом и заземленной рамкой. Числовые данные приведены в таблице III.

Подставляя формулы (9) и (11) в уравнение (10) получим выражение, с достаточной точностью описывающее потенциальное поле в медленной плоскости циклотрона, схематический чертёж которого дан на рис. 4:

$$\psi_{z_0} = \frac{2}{\pi^2} \left\{ \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \left[\frac{z \sin \varphi}{D_2} \left(2,62 + 2,95 \frac{z^2 \sin^2 \varphi}{D_2^2} \right) \right] \right\} \cdot \operatorname{arccctg} \left\{ \frac{z-51}{D_2} \left[2,78 + 2,18 \frac{(z-51)^2}{D_2^2} \right] \right\}. \quad (12)$$

Законы теории подобия [11] позволяют использовать это уравнение при пропорциональном изменении всех геометрических размеров рассматриваемого циклотрона. Однако, если расстояния между дуантами и между дуантом и рамкой не менее, чем в 1,5 - 2 раза меньше апертуры дуантов (предполагается, что апертура рамки равна апертуре дуантов), то провисание электрического поля внутри дуантов и рамки определяется в основном апертурой дуанта, а изменение апертуры ускорительной камеры оказывает лишь незначительное влияние. Поэтому формулой (12) можно пользоваться также и для других значений D_2 при непропорциональном изменении апертуры

ТАБЛИЦА III

z [cm]	40	42	44	46	48	50	51	52	54	56	58	60
z_1 [cm]	-11	-9	-7	-5	-3	-1	0	1	3	5	7	9
$\psi_{p\text{ усм}}$	0,951	0,940	0,925	0,896	0,817	0,626	0,495	0,350	0,168	0,080	0,042	0,000
ψ_p	0,983	0,972	0,953	0,913	0,828	0,641	0,500	0,355	0,172	0,087	0,047	0,028
$\frac{\psi_{\text{усм}} - \psi_p}{\psi_{\text{усм max}}}$ 100%	-3,4	-3,4	-2,9	-1,8	-1,1	-1,6	-0,5	-0,2	-0,4	-0,7	-0,5	-2,3

камеры и расстояния дуант-дуант и дуант-рамка, а так как обе ее части выведены независимо, то и для других значений R_0 . При этом может быть некоторое увеличение погрешности. Если есть возможность измерить распределение потенциалов (или рассчитать методом сеток) в моделях других геометрических размеров, то для получения большей точности аппроксимации следует уточнить значения коэффициентов α и β по описанной выше методике.

На рис. 7 для модели циклотрона (рис. 4) показаны измеренные на ванне зависимости $\psi_{2 \text{ изм}}$ от радиуса для нескольких азимутов, а на рис. 8 - от азимута для нескольких радиусов. Кривочными показаны значения ψ_{20} рассчитанные по формуле (12). Погрешность находится в пределах $(-3,5 + 2,1)\%$ от максимального значения $\psi_{2 \text{ изм}}$. Числовые данные приведены в таблице IV.

4. Аппроксимация потенциального поля дуанта с антидуантом при наличии полого источника (около источника)

Влияние полого источника на потенциальное поле дуанта будем рассматривать только для фазотрона, поскольку в циклотронах он, как правило, располагается в вертикальной плоскости симметрии электрического поля, где потенциал равен нулю, и поэтому незначительно искажает распределение поля.

Обозначим относительный потенциал в центральной области фазотрона в виде:

$$\psi_{3 \text{ изм}}(z, \varphi) = \psi_{4 \text{ изм}}(z, \varphi) \cdot \psi_{1 \text{ изм}}(z, \varphi). \quad (13)$$

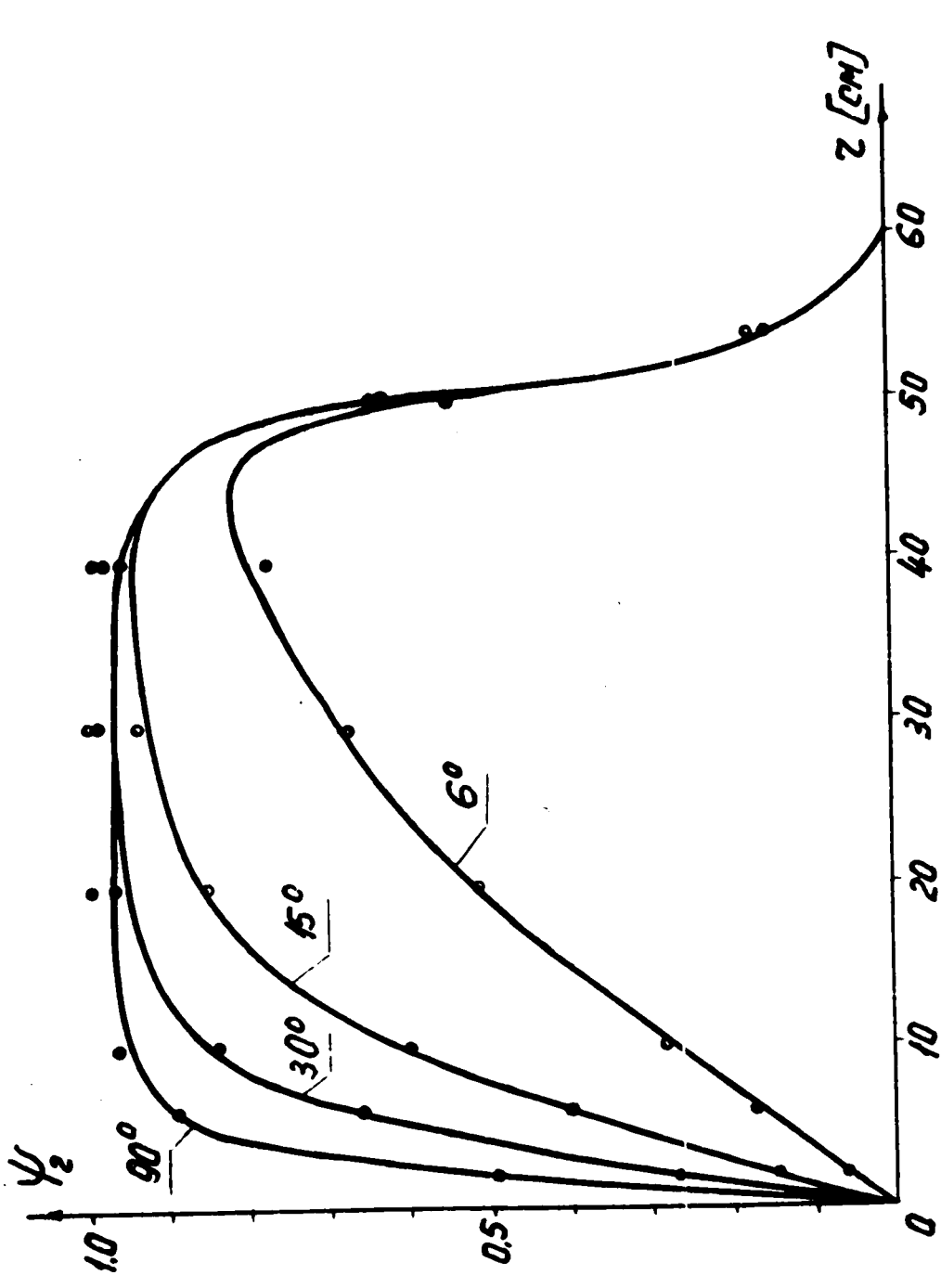


Рис. 7. $\Psi_2 = \Psi_2(z, \varphi)$: — измеренная; ○ расчет по формуле (12)

ТАБЛИЦА IV

z [см]	6°	15°	30°	50°	70°	90°	φ
2	0,061 0,058 0,3	0,150 0,143 0,7	0,271 0,269 0,2	0,402 0,336 0,6	0,482 0,470 1,2	0,500 0,494 0,6	ψ_{243M} ψ_{20} $(\psi_{243M} - \psi_{20})100\%$
6	0,171 0,172 -0,1	0,406 0,401 0,5	0,673 0,658 1,5	0,828 0,814 1,4	0,875 0,872 0,3	0,888 0,887 0,1	ψ_{243M} ψ_{20} $(\psi_{243M} - \psi_{20})100\%$
10	0,274 0,281 -0,7	0,614 0,598 1,6	0,848 0,839 0,3	0,920 0,833 -1,3	0,940 0,958 -1,8	0,943 0,964 -2,1	ψ_{243M} ψ_{20} $(\psi_{243M} - \psi_{20})100\%$
20	0,517 0,511 0,6	0,854 0,849 0,5	0,946 0,964 -1,8	0,960 0,987 -2,7	0,960 0,932 -3,2	0,960 0,934 -3,4	ψ_{243M} ψ_{20} $(\psi_{243M} - \psi_{20})100\%$
30	0,685 0,674 1,1	0,920 0,832 -1,2	0,960 0,985 -2,5	0,960 0,933 -3,3	0,960 0,995 -3,5	0,960 0,995 -3,5	ψ_{243M} ψ_{20} $(\psi_{243M} - \psi_{20})100\%$
40	0,791 0,770 2,1	0,940 0,951 -1,1	0,951 0,978 -2,7	0,951 0,981 -3	0,951 0,982 -3,1	0,951 0,982 -3,1	ψ_{243M} ψ_{20} $(\psi_{243M} - \psi_{20})100\%$
50	0,565 0,546 1,9	0,626 0,629 -0,3	0,626 0,639 -1,3	0,626 0,640 -1,4	0,626 0,640 -1,4	0,626 0,640 -1,4	ψ_{243M} ψ_{20} $(\psi_{243M} - \psi_{20})100\%$
54	0,140 0,152 -1,2	0,166 0,170 -0,4	0,168 0,172 -0,4	0,168 0,172 -0,4	0,168 0,172 -0,4	0,168 0,172 -0,4	ψ_{243M} ψ_{20} $(\psi_{243M} - \psi_{20})100\%$

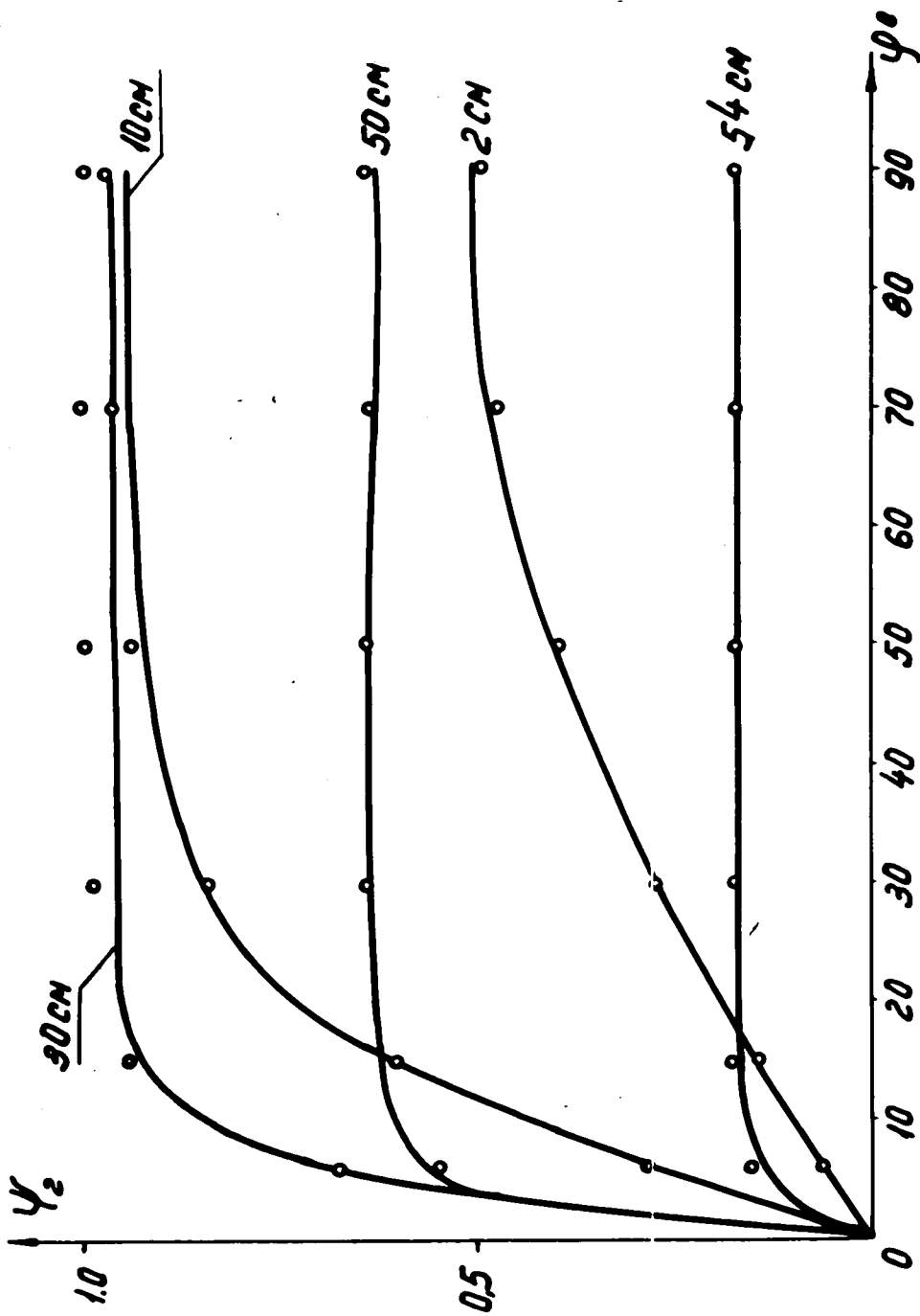


Рис. 8. $\psi_2 = \psi_2(\varphi, z)$: — измеренная; о расчет, ф. (12)

Отсюда функция, описывающая влияние только источника, выражается как:

$$\psi_{и\text{изм}} = \frac{\psi_{3\text{изм}}(z, \varphi)}{\psi_{1\text{изм}}(z, \varphi)} \quad (13^*)$$

В формулах (13) и (13*), как и ранее, $\psi_{1\text{изм}}(z, \varphi)$ зависимость относительного потенциала дуанта от координат без учета влияния ионного источника. На рис. 9 показана картина эквипотенциальных линий, полученных при помощи электролитической ванны для модели, изображенной на рис. 2, а числовые данные приведены в таблице У, где также даны значения $\psi_{1\text{изм}}$, соответствующие кривой 1-а на рис. 3 и подсчитанные по формуле (13*) величины $\psi_{и\text{изм}}$ для значений азимута через 30° . $\psi_{3\text{изм}}$ в зависимости от z для разных φ показаны на рис. 10, а $\psi_{и\text{изм}}$ - на рис. 11.

Хотя на самом деле источник находится под потенциалом земли (так же как и антидуант), а заряды располагаются на дуанте, можно представить обратную картину: потенциал приложен к источнику и антидуанту, а дуант заземлен. Теперь очевидно, что для аппроксимирующей потенциальной функции источника, можно воспользоваться выражением, полученным интегрированием зависимости напряженности от радиуса вне бесконечного заряженного цилиндра, которая для свободного пространства имеет вид /12/:

$$E_z = P \frac{R_u^2}{z} = - \frac{dV(z)}{dz} \quad (14)$$

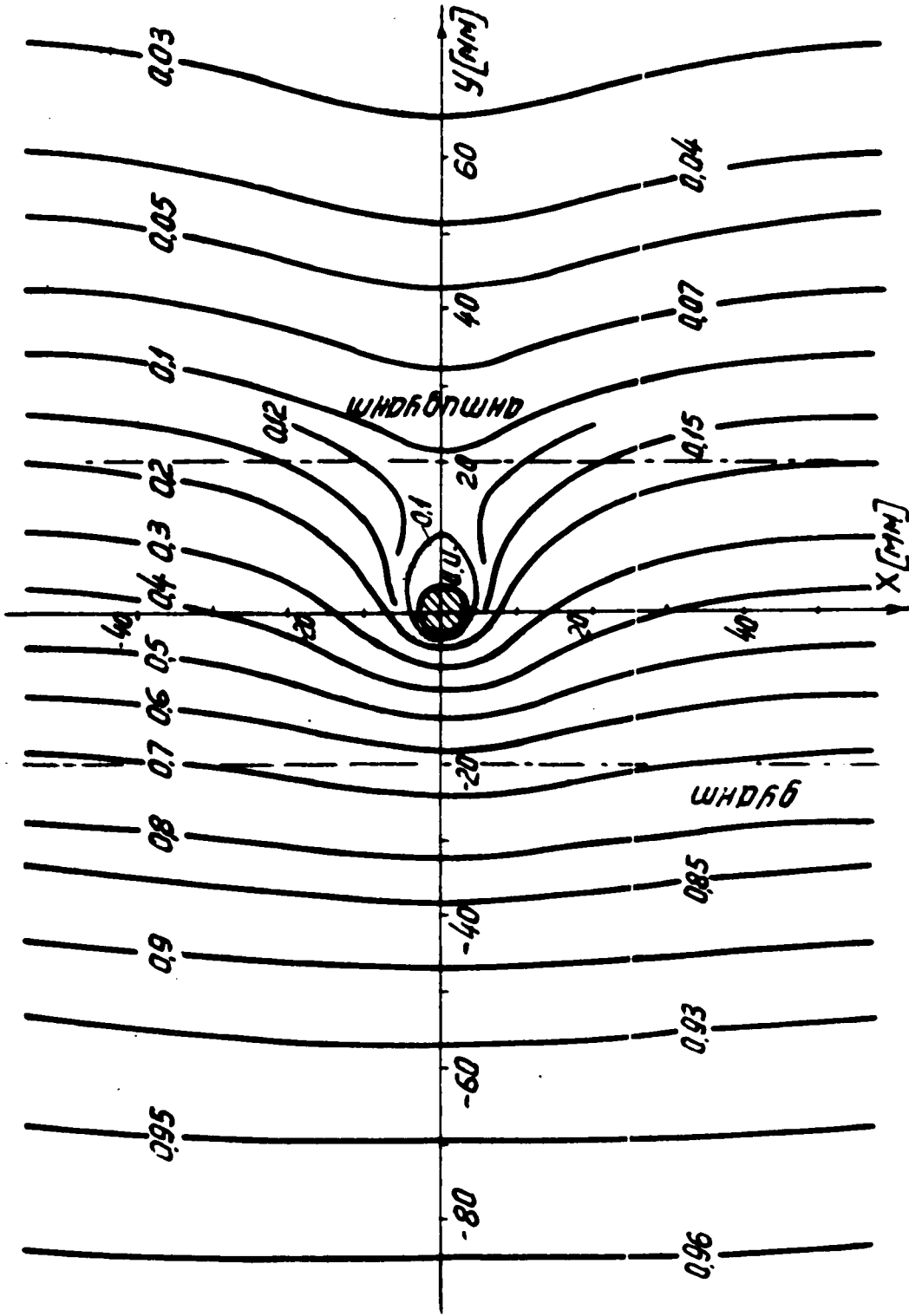


Рис.9. Эквипотенциалы в меридиальной плоскости фазотрона.

ТАБЛИЦА У

φ	0,5	1	2	3	4	6	8	10	Z [CM]
-90°	0,203	0,385	0,633	0,771	0,861	0,936	0,957	0,963	ψ_{3u3M}
	0,516	0,588	0,717	0,823	0,884	0,942	0,953	0,965	ψ_{1u3M}
	0,393	0,655	0,883	0,937	0,974	0,994	0,998	0,998	ψ_{u3M}
60°	0,192	0,370	0,595	0,738	0,833	0,920	0,950	0,960	ψ_{3u3M}
	0,507	0,567	0,683	0,786	0,855	0,926	0,952	0,964	ψ_{1u3M}
	0,379	0,653	0,871	0,939	0,974	0,994	0,998	0,996	ψ_{u3M}
30°	0,175	0,318	0,490	0,608	0,695	0,817	0,887	0,922	ψ_{3u3M}
	0,481	0,517	0,586	0,655	0,717	0,823	0,885	0,920	ψ_{1u3M}
	0,364	0,615	0,836	0,928	0,969	0,993	1,002	1,002	ψ_{u3M}
0°	0,127	0,245	0,342	0,391	0,418	0,440	0,444	0,445	ψ_{3u3M}
	0,445	0,445	0,445	0,445	0,445	0,445	0,445	0,445	ψ_{1u3M}
	0,285	0,551	0,769	0,879	0,939	0,989	0,998	1,000	ψ_{u3M}
30°	0,084	0,170	0,211	0,233	0,276	0,320	0,077	0,052	ψ_{3u3M}
	0,410	0,375	0,310	0,253	0,202	0,125	0,079	0,055	ψ_{1u3M}
	0,205	0,453	0,681	0,802	0,871	0,960	0,975	0,945	ψ_{u3M}
60°	0,065	0,120	0,126	0,103	0,077	0,046	0,032	0,025	ψ_{3u3M}
	0,386	0,329	0,228	0,153	0,100	0,052	0,035	0,027	ψ_{1u3M}
	0,168	0,365	0,553	0,673	0,770	0,885	0,914	0,926	ψ_{u3M}
90°	0,060	0,102	0,102	0,075	0,055	0,033	0,025	0,020	ψ_{3u3M}
	0,376	0,310	0,202	0,125	0,078	0,042	0,029	0,022	ψ_{1u3M}
	0,160	0,329	0,505	0,600	0,705	0,786	0,862	0,909	ψ_{u3M}

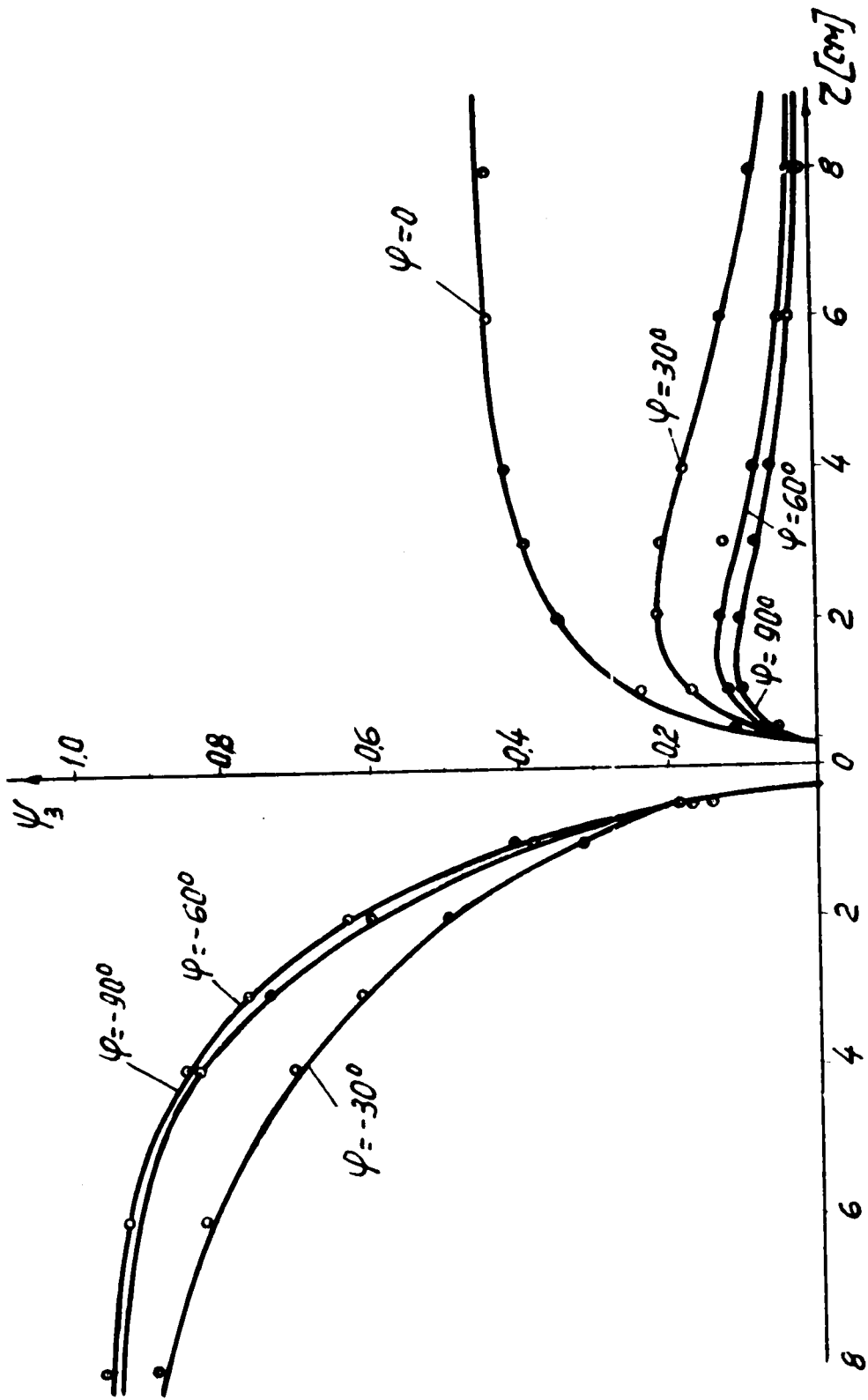


Рис. 10. Зависимость относительного потенциала от z и φ при наличии источника ионов: — измерения, \circ — аппроксимация.

где R_u - радиус цилиндра (источника), $\rho = \frac{\sigma_v}{2\varepsilon_0}$.
 σ_v - объемная плотность заряда, ε_0 - диэлектрическая постоянная.

Проинтегрируем это выражение от R_u до z и, соответственно, от $U(R_u)$ до $U(z)$:

$$\rho R_u^2 \int_{R_u}^z \frac{dz}{z} = - \int_{U(R_u)}^{U(z)} dU(z), \quad (15)$$

или

$$U(z) = U(R_u) + \rho R_u^2 \ln \frac{z}{R_u}. \quad (15')$$

Так как в нашем случае источник заземлен и находится не в свободном пространстве, а между дуантом и антидуантом, то наложим следующие граничные условия: потенциал на поверхности источника равен нулю, а потенциал на некоторой граничной кривой $z_{cp1}(\varphi)$ равен $0,9 U_0$, т.е. $U(R_u) = 0$, а $U(z_{cp1}) = 0,9 U_0$ или в относительных единицах:

$$\frac{U(R_u)}{U_0} = \psi_u(R_u) = 0; \quad \frac{U(z_{cp1})}{U_0} = \psi_u(z_{cp1}) = 0,9,$$

где $z_{cp1}(\varphi)$ - уравнение эллипса, примерно совпадающего с эквипотенциалью $0,9$ распределения $\psi_{u \text{ изм}}$, полученного по формуле (13).

Переходя в формуле (15) к относительным единицам и используя граничные условия, получим:

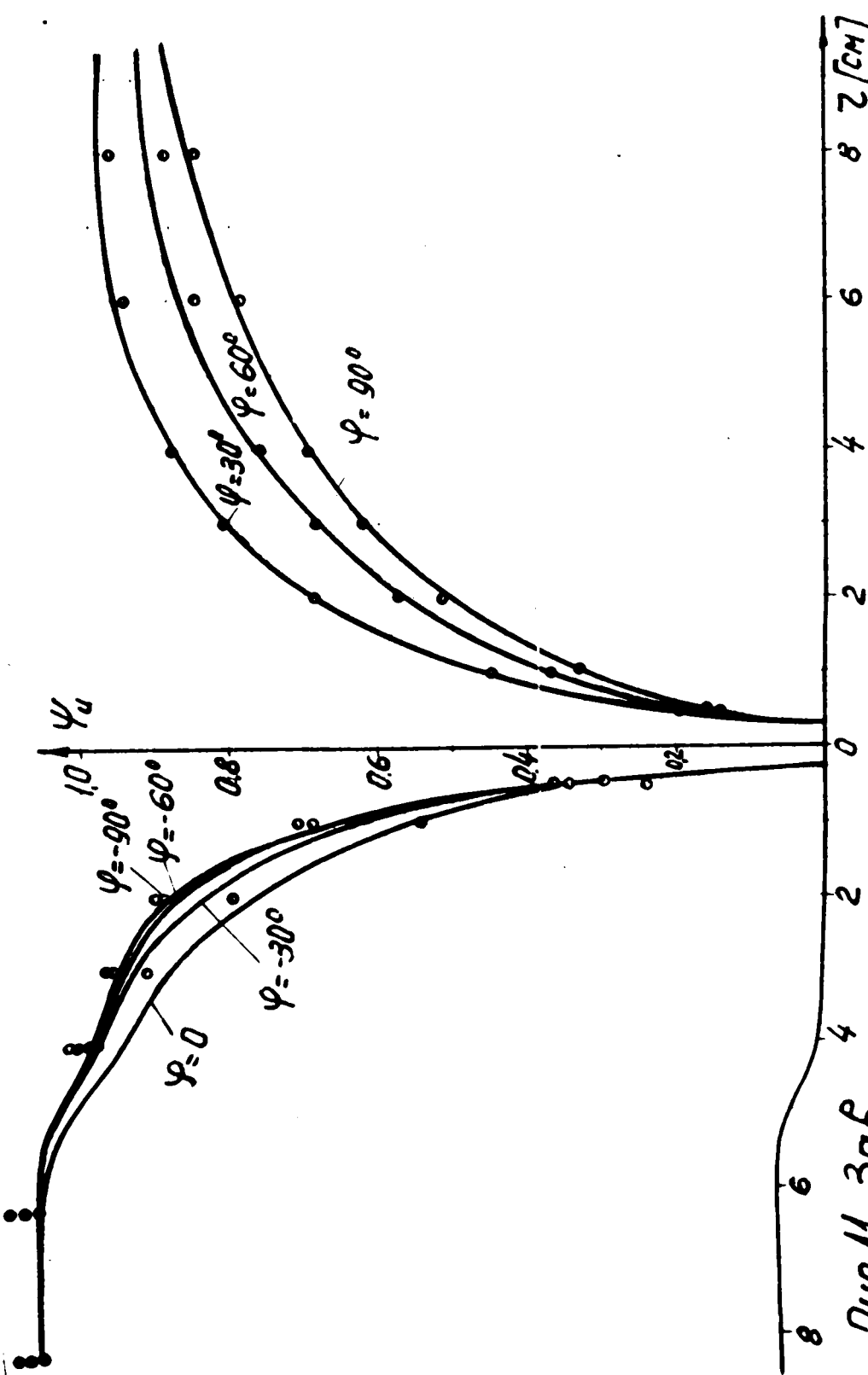


Рис. 11. Зависимость потенциальной функции источника от z и φ : \circ — $\Psi_{из}$ (измерения и ур. 13); \times — $\Psi_{из}$ (аппроксимация).

$$\Psi_{и1}(z, \varphi) = 0,9 \frac{\ln z/R_{и1}}{\ln \frac{z_{\varphi 1}(\varphi)}{R_{и1}}} \quad (16)$$

Уравнение граничного эллипса для эквипотенциала 0,9 легко получить, взяв из рис.12 значения полуосей A_1 и B_1 и величину смещения оси симметрии эллипса от начала координат (центра источника) $y_{\varphi 1}$:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{(y - y_{\varphi 1})^2}{B_1^2} = 1 \quad (17)$$

Переходя к полярной системе координат подстановкой $x = z \cos \varphi$ и $y = z \sin \varphi$ и, решая относительно $z_{\varphi 1}(\varphi)$, получим:

$$z_{\varphi 1}(\varphi) = \frac{A_1^2 y_{\varphi 1} \sin \varphi + A_1 B_1 \sqrt{(B_1^2 - y_{\varphi 1}^2) \cos^2 \varphi + A_1^2 \sin^2 \varphi}}{A_1^2 \sin^2 \varphi + B_1^2 \cos^2 \varphi} \quad (17')$$

Поскольку удобнее находить не y_{φ} , а z_m - минимальную радиальную координату граничных эллипсов, сделав очевидную замену $y_{\varphi} = B - z_m$, для любых граничных эллипсов будем иметь:

$$z_{\varphi i}(\varphi) = \frac{A_i^2 (B_i - z_{mi}) \sin \varphi + A_i B_i \sqrt{(2B_i z_{mi} - z_{mi}^2) \cos^2 \varphi + A_i^2 \sin^2 \varphi}}{A_i^2 \sin^2 \varphi + B_i^2 \cos^2 \varphi} \quad (17'')$$

где $i = 1, 2, \dots$ характеризует разные граничные эллипсы.

Точки граничного эллипса, соответствующие уравнению (17'') с параметрами $z_{m1} = 2,25$ см, $A_1 = 4$ см, $B_1 = 6$ см, показаны на

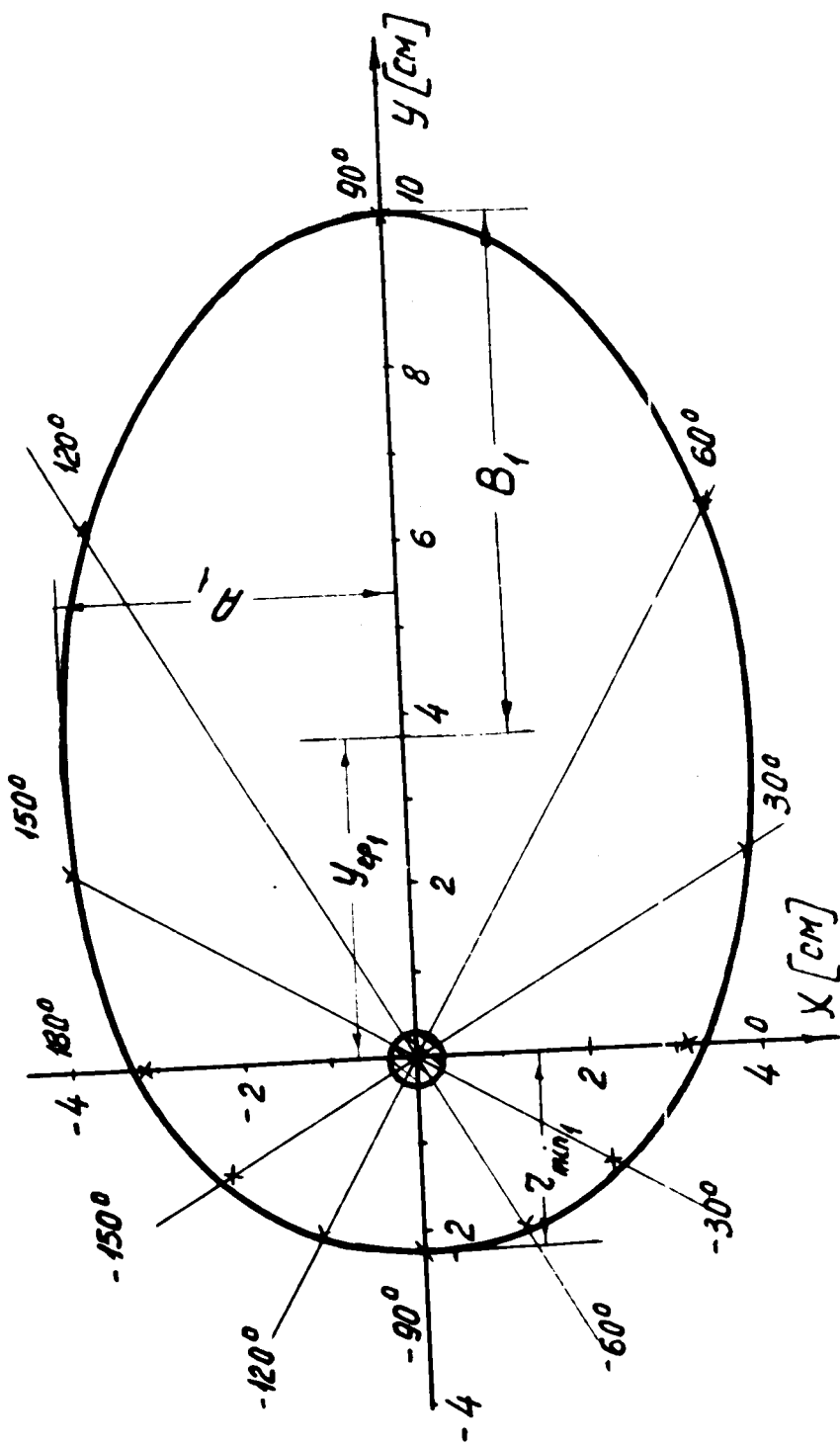


Рис. 12. Эквипотенциаль источника 0.9 Ц_g (—) и
аппроксимирующей её граничный эллипс (x x);
 Ц_g - потенциал дуганта.

рис. 12 крестиками. Видно хорошее совпадение с показанной сплошной линией эквипотенциалью источника $\psi_{\text{иизм}} = 0,9$.

В случае, когда центр источника совпадает с фокусом граничного эллипса, уравнение (17*) можно упростить, используя основное свойство эллипса: сумма расстояний от фокусов до любой точки эллипса равна удвоенной большой полуоси. Откуда легко получить $y_{\text{ф}} = \sqrt{B^2 - A^2}$ и следовательно:

$$z_{\text{ф}}(\varphi) = \frac{B + \sqrt{B^2 - A^2} \sin \varphi}{\sin^2 \varphi + \frac{B^2}{A^2} \cos^2 \varphi} \quad (17^{***})$$

Однако, формула (16) дает недостаточно хорошее совпадение с $\psi_{\text{иизм}}$, так как для бесконечного заряженного цилиндра граничное условие $E_z = 0$ выполняется только при $z \rightarrow \infty$.

Чтобы уменьшить погрешность, найдем зависимость от радиуса средней по азимуту величины $\bar{\eta}(z) = \psi_{\text{иизм}}(z, \varphi) / \psi_{\text{и1}}(z, \varphi)$. Она с достаточной точностью аппроксимируется формулой:

$$\eta_{\text{ан}} = 0,556 \left(1 + 1,5 \sqrt[3]{\frac{R_u}{z - R_u}} \right), \quad (18)$$

где $R_u = 0,3$ см. Значения $\bar{\eta}$ и $\eta_{\text{ан}}$ приведены в таблице VI.

Таким образом, выражение для потенциальной функции источника будет иметь вид:

$$\psi_{\text{и2}}(z, \varphi) = 0,9 \eta_{\text{ан}} \cdot \frac{\ln \frac{z}{R_u}}{\ln \frac{z_{\text{ф2}}(\varphi)}{R_u}}, \quad (19)$$

где η_{an} определяется формулой (18), а $z_{\varphi_2}(\varphi)$ формулой (17**), т.е. $z_{\varphi_2}(\varphi) = z_{\varphi_1}(\varphi)$.

Подсчитанные по формуле (19) значения $\psi_{u_2}(z, \varphi)$ достаточно хорошо совпадают с $\psi_{u_{изм}}$: на $z = 0,5 + 3$ см средняя погрешность составляет 2,6% (% ошибки = $|\psi_{u_{изм}} - \psi_{u_2}| \cdot 100\%$); на $z = 4 + 10$ см - 12,6% и на $z = 0,5 + 10$ см - 8,4%. В наиболее важной для расчета движения области около источника ионов погрешность не велика, а увеличение ее на больших радиусах объясняется превышением ψ_{u_2} над единицей на части азимутов. При расчете на ЭМ погрешность можно уменьшить, введя принудительное условие $\psi_{u_2}(z, \varphi) = 1$ при $\psi_{u_2}(z, \varphi) > 1$ (но следует забывать также обязательное условие $\psi_{u_2} = 0$ при $z < R_u$). При выполнении первого условия погрешность на $z = 4 + 10$ см уменьшается до 4,8%, а средняя до 3,3%, что вполне допустимо даже для количественных расчетов движения частиц в таком неоднородном электрическом поле.

Погрешность при аппроксимации $\psi_{u_{изм}}$ можно уменьшить, если в формуле (16) менять граничный эллипс в зависимости от радиуса. Для этого решим уравнение (16) относительно z_{φ_1} , положив $\psi_{u_1}(z, \varphi) = \psi_{u_{изм}}(z, \varphi)$. Построив затем семейство граничных эллипсов $z_{\varphi_3}(z, \varphi)$, найдем зависимость от радиуса полуосей $A_3(z)$, $B_3(z)$ и $z_{m3}(z)$. Эти зависимости в рассматриваемом случае достаточно хорошо описываются выражениями (см. таблицу У1):

$$\begin{aligned} A_3(z) &= 3,07 + 0,041 z^2, \\ B_3(z) &= 4,22 + 0,445 z, \\ z_{m3}(z) &= 0,75 + 0,625 z. \end{aligned} \quad (20)$$

ТАБЛИЦА VI

z [см]	0,5	1	2	3	4	6	8	10
$\bar{\eta}$	1,442	1,161	1,047	0,985	0,948	0,890	0,817	0,771
η_{an}	1,511	1,185	1,023	0,957	0,917	0,870	0,833	0,818
z_{m3}	1,063	1,375	2,000	2,625	3,250	4,500	5,750	7,000
A_3	3,080	3,111	3,234	3,430	3,726	4,546	5,694	7,170
B_3	4,443	4,665	5,110	5,555	6,000	6,890	7,780	8,670
z_{m4}	1,921	2,032	2,254	2,475	2,698	3,142	3,586	4,030
A_4	9,760	5,620	3,606	3,110	3,002	3,178	3,551	4,002
B_4	12,491	8,407	5,997	5,076	4,658	4,461	4,601	4,895

Значения $z_{rp3}(z, \varphi)$ определяются по формуле (17**), в которой вместо A_i, B_i и z_{mi} должны подставляться соотношения (20). Заменяя затем в уравнении (16) $z_{rp1}(\varphi)$ на $z_{rp3}(z, \varphi)$, получим $\psi_{из}(z, \varphi)$. При использовании такой методики погрешность на $z = 0,5 \div 3$ см уменьшается до 2,1%, на $z = 4 \div 10$ см до 1,8% и на $z = 0,5 \div 10$ см до 1,9%.

Ошибку можно еще уменьшить, если ввести зависимость граничного эллипса от радиуса в уравнении (19). Используя методику аналогичную вышеописанной, получим линейную зависимость z_{m4} от z , а подосей $A_4(z)$ и $B_4(z)$ в виде кривых второго порядка (способ нахождения кривой второго порядка по пяти точкам, из которых никакие три не лежат на одной прямой, описан в приложении):

$$\begin{aligned}
 z_{m4}(z) &= 1,81 + 0,222z, \\
 A_4(z) &= -172z + \sqrt{29682z^2 + 235z + 1632}, \\
 B_4(z) &= 14,34z + 15,66 - \sqrt{197,7z^2 + 414,7z - 150}.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Числовые значения приведены в таблице VI. Погрешность при нахождении ψ_{u4} с использованием формулы (19), уравнения (17**) при $i = 4$ и соотношений (21) составляет 1,3% на $z = 0,5 + 3$ см, 1,8% на $z = 4 + 10$ см и средняя на $z = 0,5 + 10$ см 1,6%.

Следует иметь в виду, что при аппроксимации ψ_{u3m} выражениями ψ_{u3} и ψ_{u4} , формулы для компонент электрического поля дуанта с источником ионов получаются значительно более сложными, чем при использовании выражения ψ_{u2} , поэтому, если допустима погрешность 5%, то следует пользоваться формулой (19) с условием $\psi_{u2}(z) = 1$ при $\psi_{u2}(z) > 1$.

Числовые значения ψ_{u2} , ψ_{u3} и ψ_{u4} в зависимости от z и φ приведены в таблице VII. Значения ψ_{ui} даны только для $\varphi = 0; \pm 30; \pm 60; \pm 90$; т.к. распределение потенциала симметрично относительно оси y (см. рис. 9).

Теперь, чтобы найти функции, аппроксимирующие с разной степенью точности измеренное при помощи электролитической ванны распределение электрического поля дуанта при наличии ионного источника $\psi_{3u3m}(z, \varphi)$, приведенное на рис. 9 и 10 и в таблице V, достаточно умножить формулы (4) и (7) на формулы (16) и (19) с соответствующими требуемой точности $z_{\varphi i}$, т.е.

$$\psi_{3ij}(z, \varphi) = \psi_{ui}(z, \varphi) \cdot \psi_{ij}(z, \varphi), \tag{22}$$

ТАБЛИЦА VII

φ	0,5	1	2	3	4	6	8	10	z [cm]
-90°	0,345	0,638	0,867	0,984	1,061	1,164	1,230	1,281	ψ_{u2}
	0,363	0,712	0,899	0,956	0,979	0,995	1,001	1,003	ψ_{u3}
	0,375	0,671	0,865	0,937	0,974	0,998	1,000	0,992	ψ_{u4}
-60°	0,341	0,631	0,858	0,973	1,049	1,152	1,217	1,267	ψ_{u2}
	0,345	0,691	0,895	0,965	0,995	1,016	1,014	1,010	ψ_{u3}
	0,355	0,647	0,865	0,952	0,992	1,016	1,014	1,003	ψ_{u4}
-30°	0,326	0,602	0,819	0,930	1,002	1,100	1,162	1,210	ψ_{u2}
	0,298	0,631	0,863	0,963	1,008	1,037	1,031	1,014	ψ_{u3}
	0,314	0,593	0,844	0,956	1,007	1,037	1,031	1,017	ψ_{u4}
0	0,297	0,548	0,746	0,846	0,912	1,001	1,058	1,102	ψ_{u2}
	0,242	0,543	0,735	0,910	0,971	1,016	1,014	0,999	ψ_{u3}
	0,243	0,513	0,780	0,908	0,969	1,013	1,014	1,003	ψ_{u4}
30°	0,257	0,476	0,647	0,734	0,791	0,863	0,918	0,956	ψ_{u2}
	0,193	0,448	0,687	0,808	0,878	0,944	0,962	0,961	ψ_{u3}
	0,198	0,431	0,675	0,805	0,874	0,938	0,955	0,957	ψ_{u4}
60°	0,218	0,403	0,549	0,623	0,671	0,737	0,778	0,810	ψ_{u2}
	0,156	0,366	0,573	0,684	0,756	0,842	0,886	0,915	ψ_{u3}
	0,169	0,360	0,561	0,679	0,753	0,842	0,884	0,901	ψ_{u4}
90°	0,200	0,369	0,502	0,570	0,614	0,674	0,712	0,741	ψ_{u2}
	0,141	0,331	0,561	0,620	0,692	0,785	0,847	0,891	ψ_{u3}
	0,160	0,328	0,502	0,612	0,691	0,791	0,847	0,873	ψ_{u4}

где $i = 1, 2, 3$ и 4 , а $j = 1$ и 2 .

Запишем уравнение (22) для более точного случая с $j = 2$ и любых i :

$$\psi_{3i2}(z, \varphi) = \frac{0,9}{\pi} \eta \frac{\ln \frac{z}{R_u}}{i \ln \frac{z_{epi}}{R_u}} \cdot \operatorname{arccctg} \left\{ \frac{z \sin \varphi + 0,5}{D_1} 2,25 \left[1 + \frac{(z \sin \varphi + 0,5)^2}{D_1^2} \right] \right\}, \quad (22^*)$$

где $D_1 = 5$ см, $\eta_1 = \eta_3 = 1$, $\eta_2 = \eta_4 = \eta_{ap}$ и аппроксимируется уравнением (18); z_{epi} определяется уравнением (17"), причем $z_{M1} = z_{M2} = 2,25$; $A_1 = A_2 = 4$ см; $B_1 = B_2 = 6$ см, а A_3, B_3, z_{M3} и A_4, B_4, z_{M4} соответственно соотношениями (20) и (21).

В таблице УИ приведены $\psi_{12}(z, \varphi)$, $\psi_{332}(z, \varphi)$ и погрешность аппроксимации $(\psi_{343M} - \psi_{332}) \cdot 100\%$ (ψ_{343M} берется из таблицы У). Значения показаны на рис. 10 кружочками. Средняя погрешность для этого случая: 0,2%. Для $\psi_{322} = \psi_{12} \cdot \psi_{42}$ ошибка составляет 1,3% (при условии, что $\psi_{42} = 1$, если $\psi_{42} > 1$), а для $\psi_{342} = \psi_{12} \cdot \psi_{44} - 1,0\%$.

При аппроксимации электрического поля малого дуанта при наличии и полного источника и полукруглой заземленной рамки (см. рис. 5), причем в качестве антидуанта выступает основной дуант, относительный потенциал в зависимости от z и φ выражается произведением трех функций: ψ_{ui} - функции источника (формулы (16) или (19)); ψ_{ij} - функции малого дуанта, электрическое поле которого рассматривается (формулы (4) или (7)), и ψ_p - функции заземленной рамки (формула (II)). То есть

ТАБЛИЦА УШ

φ	0,5	1	2	3	4	6	8	10	z [см]
-90°	0,500 0,182 -2,1	0,571 0,407 2,2	0,702 0,631 -0,2	0,803 0,768 -0,3	0,872 0,854 -0,7	0,943 0,938 0,2	0,971 0,972 1,5	0,984 0,987 2,4	ψ_{12} ψ_{332} $(\psi_{343M} - \psi_{332}) 100\%$
-60°	0,491 0,161 -2,3	0,552 0,381 1,1	0,669 0,599 0,4	0,766 0,739 0,1	0,839 0,835 0,2	0,922 0,937 1,7	0,959 0,972 2,2	0,971 0,987 2,7	ψ_{12} ψ_{332} $(\psi_{343M} - \psi_{332}) 100\%$
-30°	0,464 0,138 -3,7	0,500 0,316 -0,2	0,571 0,496 0,6	0,639 0,615 0,7	0,702 0,708 1,3	0,803 0,833 1,6	0,872 0,899 1,2	0,915 0,928 0,6	ψ_{12} ψ_{332} $(\psi_{343M} - \psi_{332}) 100\%$
0	0,429 0,104 -2,3	0,429 0,233 -1,2	0,429 0,341 -0,1	0,429 0,390 -0,1	0,429 0,417 -0,1	0,429 0,436 -0,4	0,429 0,435 -0,9	0,429 0,429 -1,6	ψ_{12} ψ_{332} $(\psi_{343M} - \psi_{332}) 100\%$
30°	0,394 0,076 -0,8	0,361 0,162 -0,8	0,298 0,205 -0,6	0,243 0,196 -0,7	0,197 0,173 -0,3	0,128 0,121 0,1	0,085 0,082 0,5	0,058 0,056 0,4	ψ_{12} ψ_{332} $(\psi_{343M} - \psi_{332}) 100\%$
60°	0,370 0,058 -0,7	0,314 0,115 -0,5	0,221 0,127 0,1	0,152 0,104 0,1	0,105 0,079 0,2	0,053 0,045 -0,1	0,030 0,027 -0,5	0,018 0,016 -0,9	ψ_{12} ψ_{332} $(\psi_{343M} - \psi_{332}) 100\%$
90°	0,361 0,051 -0,7	0,298 0,099 -0,3	0,197 0,102 0	0,128 0,079 0,4	0,085 0,059 0,4	0,040 0,031 -0,2	0,021 0,018 -0,7	0,012 0,010 -1	ψ_{12} ψ_{332} $(\psi_{343M} - \psi_{332}) 100\%$

$$\Psi_m(z, \varphi) = \Psi_{ui}(z, \varphi) \cdot \Psi_j(z, \varphi) \cdot \Psi_p(z) = \Psi_{zij}(z, \varphi) \cdot \Psi_p(z), \quad (23)$$

где i и j выбираются в зависимости от требуемой точности аппроксимации. Значения Ψ_{ij} , Ψ_p , Ψ_{ui} и Ψ_{zij} приведены в таблицах I, II, III и IV.

5. Вращающиеся компоненты электрического поля в полярной системе координат

В полярной системе координат компоненты электрического поля выражаются через относительный потенциал следующим образом:

$$\begin{aligned} E_z(z, \varphi) &= -U_0 \frac{d\psi(z, \varphi)}{dz}, \\ E_\varphi(z, \varphi) &= -\frac{U_0}{z} \frac{d\psi(z, \varphi)}{d\varphi}, \end{aligned} \quad (24)$$

где U_0 - потенциал дуанта относительно земли, а $\psi(z, \varphi)$ - относительный потенциал, рассмотренных конфигураций дуантов.

Рассмотрим вначале более простой случай двух дуантов с заземленной рамкой и без нее. Без учета влияния источников ионов и заземленной рамки при положительном напряжении на нижней дуанте (см. рис. 4) $\psi(z, \varphi)$ выражается формулой (9), перед первой частью которой должен стоять знак минус, что соответствует при ускорении принятому отсчету углов от оси X против часовой стрелки. Переходя затем в полярную систему координат и вынося

$1/D_2^2$ во скобках, получим:

$$\Psi_{22}(z, \varphi) = -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(a_2 D_2^2 + b_2 z^2 \sin^2 \varphi) z \sin \varphi}{D_2^3} \quad (9^*)$$

После дифференцирования по z и по φ имеем:

$$\frac{d\Psi_{22}}{dz} = \lambda \sin \varphi, \quad (25)$$

$$\frac{d\Psi_{22}}{d\varphi} = z \lambda \cos \varphi,$$

где

$$\lambda = -\frac{2 D_2^3 (a_2 D_2^2 + 3 b_2 z^2 \sin^2 \varphi)}{\pi [D_2^6 + (a_2 D_2^2 + b_2 z^2 \sin^2 \varphi)^2 z^2 \sin^2 \varphi]}, \quad (26)$$

причем $a_2 = 2,62$, $b_2 = 2,5$, а D_2 - апертура дуантов.

В случае использования более простой (хотя и менее точной) аппроксимационной формулы (8) компоненты поля аналогичны использовавшимся в работах (5), (6) и (7):

$$\frac{d\Psi_{21}}{dz} = \frac{2,1}{D_{\text{эф}}} \cdot \frac{\sin \varphi}{1 + \frac{\pi^2 z^2 \sin^2 \varphi}{D_{\text{эф}}^2}} = \frac{2,1}{D_{\text{эф}}} \cdot \frac{\ell^2 \sin \varphi}{\ell^2 + z^2 \sin^2 \varphi}, \quad (27)$$

$$\frac{d\Psi_{21}}{d\varphi} = \frac{2,1}{D_{\text{эф}}} \cdot \frac{z \cdot \cos \varphi}{1 + \frac{\pi^2 z^2 \sin^2 \varphi}{D_{\text{эф}}^2}} = \frac{2,1}{D_{\text{эф}}} \cdot \frac{\ell^2 z \cos \varphi}{\ell^2 + z^2 \sin^2 \varphi},$$

где $\ell = \frac{D_{\text{эф}}}{\pi}$, $D_{\text{эф}} = 1,2 D_2$ - эффективная апертура дуанта.

При наличии заземленной рамки относительный потенциал выражается формулой (10*), а компоненты имеют вид:

$$\frac{d\Psi_{20}}{dz} = \frac{d\Psi_{2j}}{dz} \cdot \Psi_P + \frac{d\Psi_P}{dz} \cdot \Psi_{2j}; \quad \frac{d\Psi_{20}}{d\varphi} = \frac{d\Psi_{2j}}{d\varphi} \cdot \Psi_P, \quad (28)$$

где $j = 1$ или 2 при меньшей или большей точности, соответственно, а ψ_p для удобства счета на ЭВМ выражен через arctg .
т.е.

$$\psi_p(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{arctg} \frac{(a_p D_2^2 + b_p z_1^2) z_1}{D_2^3}, \quad (29)$$

причем для рассматриваемого случая $a_p = 2,78$, $b_p = 2,18$,
 $z_p = z - R_0$, $R = 51$ см, $D_2 = 6$ см. Из (29) видно, что ψ_p не
зависит от азимута, поэтому в уравнениях (28) используется
только $\frac{d\psi_p}{dz}$ в виде:

$$\frac{d\psi_p}{dz} = - \frac{(a_p D_2^2 + 3b_p z_1^2) D_2^3}{\pi [D_2^6 + (a_p D_2^2 + b_p z_1^2)^2 z_1^2]}. \quad (30)$$

При R_0 больших 3-4 апертур дуга до $z = R_0/2$ можно пользо-
ваться только формулами (25) и (26) или (27), т.е. взаимно
равны на этих радиусах пренебрежимо мало, а для $z > R_0/2$
необходимо использовать формулы (28), (29), (30) в зависимости
от требуемой точности. Если R_0 больше примерно трех апертур
дуга, то надо сразу пользоваться формулами, учитывающие
влияние заземленной решетки (т.е. последний случай).

Выражения для компонент электрического поля одного дуга
с мощным источником, антридуэтом и заземленной решеткой получае-
тся значительно более сложными, так как относительный потенциал,
как видно из формулы (23), выражается в виде произведения трех
потенциальных функций: источника, дуга и решетки. Соответствен-
но получаем:

$$\frac{d\psi_{10}}{dz} = \frac{d\psi_{ui}}{dz} \psi_{ij} \psi_p + \frac{d\psi_{ij}}{dz} \psi_{ui} \psi_p + \frac{d\psi_p}{dz} \psi_{ui} \psi_{ij}, \quad (31)$$

$$\frac{d\psi_{10}}{d\varphi} = \frac{d\psi_{ui}}{d\varphi} \psi_{ij} \psi_p + \frac{d\psi_{ij}}{d\varphi} \psi_{ui} \psi_p,$$

где выражения для Ψ_p и $\frac{d\Psi_p}{dz}$ такие же как и в случае двух дуантов и описываются формулами (29) и (30).

Для более грубой аппроксимации поля дуанта ($j = 1$) формулу (4) запишем в виде, более удобном для счета на ЭВМ:

$$\Psi_{11} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\alpha_1}{D_1} (z \sin \varphi + y_0). \quad (4^*)$$

Дифференцируя (4*) по z и по φ , получим:

$$\frac{d\Psi_{11}}{dz} = - \frac{\alpha_1 \sin \varphi}{\pi D_1} \cdot \frac{1}{1 + [\alpha_1 (z \sin \varphi + y_0) / D_1]^2}, \quad (32)$$

$$\frac{d\Psi_{11}}{d\varphi} = - \frac{\alpha_1 z \cos \varphi}{\pi D_1} \cdot \frac{1}{1 + [\alpha_1 (z \sin \varphi + y_0) / D_1]^2}.$$

В более точном случае ($j = 2$) используем несколько преобразованную формулу (7):

$$\Psi_{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{a_1}{D_1} (z \sin \varphi + y_0) \left[1 + \frac{(z \sin \varphi + y_0)^2}{D_1^2} \right] \right\} \quad (7^*)$$

и, соответственно:

$$\frac{d\Psi_{12}}{dz} = - \frac{a_1 \sin \varphi}{\pi D_1} \cdot \frac{1 + 3(z \sin \varphi + y_0)^2 / D_1^2}{1 + \left\{ \frac{a_1}{D_1} (z \sin \varphi + y_0) \left[1 + (z \sin \varphi + y_0)^2 / D_1^2 \right] \right\}^2}, \quad (33)$$

$$\frac{d\Psi_{12}}{d\varphi} = - \frac{a_1 z \cos \varphi}{\pi D_1} \cdot \frac{1 + 3(z \sin \varphi + y_0)^2 / D_1^2}{1 + \left\{ \frac{a_1}{D_1} (z \sin \varphi + y_0) \left[1 + (z \sin \varphi + y_0)^2 / D_1^2 \right] \right\}^2}.$$

Функцию источника Ψ_{ii} запишем в виде, аналогичной формуле (19), введя коэффициент $0,3$ в выражение для η_i , т.е.

$$\Psi_{ui} = \eta_i \frac{\ln z/R_u}{\ln z_{\varphi i}/R_u}, \quad (19^*)$$

причем самое грубое приближение ($i = 1$) не будем рассматривать, а для $i = 2, 3$ и 4 имеем:

$$\eta_2 = 0,5 \left(1 + 1,5 \sqrt[3]{\frac{R_u}{z - R_u}} \right); \quad (34)$$

для случая, когда начало координат совпадает с фокусом граничного эллипса,

$$\eta_2' = \left(0,55 + 0,75 \sqrt[3]{R_u/z} \right); \quad (34^*)$$

$$\eta_3 = 0,9; \quad \eta_4 = \eta_2. \quad (35)$$

$z_{\varphi i}$ выражается формулой (17^{''}), а в случае совпадения начала координат с фокусом граничного эллипса для $i = 2$ формулой (17^{'''}).

Дифференцируя формулу (19[']), в общем случае получаем:

$$\frac{d\Psi_{ui}}{dz} = \frac{\ln z/R_u}{\ln z_{\varphi i}/R_u} \frac{d\eta_i}{dz} + \frac{\eta_i}{z \ln z_{\varphi i}/R_u} - \frac{\ln z/R_u}{(\ln z_{\varphi i}/R_u)^2} \frac{\eta_i}{z_{\varphi i}} \frac{dz_{\varphi i}}{dz}, \quad (36)$$

$$\frac{d\Psi_{ui}}{d\varphi} = - \frac{\ln z/R_u}{(\ln z_{\varphi i}/R_u)^2} \frac{\eta_i}{z_{\varphi i}} \frac{dz_{\varphi i}}{d\varphi},$$

где

$$\frac{d\eta_2}{dz} = - \frac{0,25}{z - R_u} \sqrt[3]{\frac{R_u}{z - R_u}}; \quad \frac{d\eta_2'}{dz} = - \frac{0,25}{z} \sqrt[3]{\frac{R_u}{z}}; \quad (37)$$

$$\frac{d\eta_3}{dz} = 0; \quad \frac{d\eta_4}{dz} = \frac{d\eta_2}{dz}.$$

Дифференцируя формулы (17^н) и (17^{***}) по z и по φ , получаем для $i = 3$ и 4:

$$\frac{dz_{\varphi i}}{dz} = \frac{z_{\varphi i}}{A_i^2} \cdot \frac{A_i \rho_i (\rho_i - B_i) \frac{dA_i}{dz} + [z_{\varphi i}^2 B_i \cos^2 \varphi - A_i^2 \rho_i] \frac{dB_i}{dz} + A_i^2 (\rho_i - B_i) \frac{dz_{mi}}{dz}}{(\rho_i - B_i) z_{mi} - \rho_i B_i}, \quad (38)$$

$\frac{dz_{\varphi 2}}{dz} = 0$, т.к. A_2, B_2 и z_{m2} не зависят от z .

$$\frac{dz_{\varphi i}}{d\varphi} = \frac{z_{\varphi i}^2 \cos \varphi (\rho_i - B_i) A_i^2 - z_{\varphi i} B_i^2 \sin \varphi}{A_i^2 (\rho_i - B_i) z_{mi} - \rho_i B_i}, \quad \frac{dz'_{\varphi 2}}{d\varphi} = \frac{z'_{\varphi 2} \cos \varphi \sqrt{B_2'^2 - A_2'^2}}{A_2'^2} \quad (39)$$

В формулах (38) и (39) обозначено $\rho_i = z_{\varphi i} \sin \varphi + z_{mi}$, $A_2 = 4$ см, $B_2 = 6$ см, $z_{m2} = 2,25$ см, а $A_3 \cdot B_3 \cdot z_{m3}$ и $A_4 \cdot B_4 \cdot z_{m4}$ определяются формулами (20) и (21), соответственно.

Дифференцируя выражения (20) и (21) по z , получаем:

$$\frac{dA_3}{dz} = 0,082z ; \quad \frac{dB_3}{dz} = 0,445 ; \quad \frac{dz_{m3}}{dz} = 0,625 ; \quad (40)$$

$$\frac{dA_4}{dz} = -172 + \frac{59364z + 235}{2\sqrt{29682z^2 + 235z + 1632}} ; \quad (41)$$

$$\frac{dB_4}{dz} = 14,34 - \frac{395,4z + 414,7}{2\sqrt{197,7z^2 + 414,7z - 150}} ;$$

$$\frac{dz_{m4}}{dz} = 0,222 .$$

Таким образом, для получения компонент электрического поля для случая одного (малого) дуанта с заземленной рамкой по полукруглой части, антидуантом (основным дуантом) и полным источником надо в выражении (24) подставить формулы (31), (29), (30),

(4') и (32) или (7') и (33), (19') с соответствующими (34), (34') или (35), а также (36), (37), (38), (39), (20), (21), (40) и (41) с соответствующими выбранной точности аппроксимации i и j .

Для $i = 2$, т.е. при независимых от радиуса $A_2 \cdot B_2$ и z_{M2} производные от функции источника описываются достаточно простыми выражениями:

$$\frac{d\psi_{u2}}{d\varphi} = -\psi_{u2} \cdot \frac{\sqrt{B_2^2 - A_2^2}}{A_2^2} \cdot \frac{z_{\varphi 2}}{\ln z_{\varphi 2}/R_u} \cdot \cos \varphi, \quad (42)$$

где ψ_{u2} и $z_{\varphi 2}$ берутся в виде формул (19'), (34') и (17''') для случая, когда начало координат совпадает с фокусом граничного эллипса, и в виде формул (19'), (34) и (17'') в противном случае.

Соответственно:

$$\frac{d\psi'_{u2}}{dz} = \frac{\psi'_{u2}}{z} \left(\frac{1}{\ln z/R_u} - \frac{1}{3 + 2,2 \sqrt[3]{z/R_u}} \right); \quad (43)$$

$$\frac{d\psi_{u2}}{dz} = \frac{\psi_{u2}}{z} \left[\frac{1}{\ln z/R_u} - \frac{4z(z-R_u) \cdot \sqrt[3]{R_u}}{8 \sqrt[3]{(z-R_u)^7} + 3z^2 \sqrt[3]{R_u}} \right], \quad (44)$$

где для величин со штрихом фокус граничного эллипса совпадает с началом координат.

В заключение мне хочется поблагодарить В.И. Данилова и С.Б. Воронцова за полезные обсуждения и ценные критические замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Построение кривых второго порядка по 5 точкам для аппроксимации зависимости полуосей граничного эллипса от радиуса

В общем виде запишем кривую 2-го порядка следующим образом (II):

$$y^2 = axy + by + cx + dx^2 + e \quad (II)$$

Откуда, решая квадратное уравнение относительно y , получим:

$$y = \frac{a}{2}x + \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + d\right)x^2 + \left(\frac{ab}{2} + c\right)x + \frac{b^2}{4} + e} \quad (III)$$

Обозначая Z через X , а A_4 через Y , возьмем для нахождения кривой следующие 5 точек, из полученных после построения граничных эллипсов, найденных решением уравнения (II) относительно $Z_{гр2}$ при условии $\psi_{ч2} = \psi_{ч3M}$:

Z	0,00	0,75	2,00	4,00	8,00	X
A_4	9,70	7,00	3,60	3,00	3,55	Y

Подставляя X_i и Y_i в уравнение (II), получим систему 5 уравнений с 5 неизвестными:

$$4,85a + 9,7b + 0,5c + 0,25d + e = 94,09 \quad (IV)$$

$$5,25a + 7b + 0,75c + 0,56d + e = 49$$

$$7,2a + 3,6b + 2c + 4d + e = 12,96$$

$$12a + 3b + 4c + 16d + e = 9$$

$$28,4a + 3,55b + 8c + 6,4d + e = 12,6$$

Решив эту систему алгебраических уравнений, находим значения коэффициентов:

$$a = -344,18, \quad b = -1,16, \quad c = 235,21, \quad d = 98,03 \text{ и } e = 1632,48$$

Округляя до целых чисел и подставляя в уравнение (2II), получим:

$$A_4 = -172z + \sqrt{2968,2z^2 + 235z + 1632}, \quad (4II)$$

где членом с коэффициентом b оказалось возможным пренебречь, ввиду малости коэффициента b по сравнению с a, c, d и e . Отличие от контрольных точек при этом только во втором знаке после запятой.

Аналогичным образом находится зависимость от радиуса большой полуоси граничного эллипса:

$$B_4 = 14,34z + 15,66 - \sqrt{197,7z^2 + 414,7z - 150} \quad (5II)$$

Зависимости A_4 и B_4 от радиуса представляют собой повернутые и смещенные относительно осей координат гиперболы.

А. В. Зотов

ЛИТЕРАТУРА

1. И.Б.Вичевич, Г.Й.Пепчев, А.Н.Сафонов. Расчет ускоряющего электрического поля синхротрона. Препринт ОИЯИ 1854.52-1776 Дубна, 1964. Оpubл. в "Изв. на физ. инст. с АНБ" (Болг.), т. XIII, кн.1(1965)111.
2. А.М.Страшкевич. Электронная оптика электростатических полей не обладающих осевой симметрией. Ф.-М., Москва. (1959) 239.
3. С.Б.Борокцов. Расчет трехмерных электростатических полей методом сеток. Сообщения ОИЯИ Р9-6755, Дубна, 1972.
4. А.Н.Сафонов, А.В.Шестов. Исследование электрического поля в центральной области синхротрона ОИЯИ при помощи электролитической ванны.
Депонированное сообщение ОИЯИ В1-1543, Дубна, 1963.
5. Б.П.Пронин, А.Н.Сафонов. Измерение электрического поля в центральной области синхротрона ОИЯИ методом наведенного тока. Сообщение ОИЯИ Р9-4851, Дубна, 1969.
6. В.И.Данилов, И.Б.Вичевич, Д.М.Новиков, Э.А.Молдеров, А.Н.Сафонов, Б.В.Феоктистов. Расчет начальной области устойчивых фазовых колебаний в синхротроне. Препринт ОИЯИ Р-1448, Дубна, 1963.
7. В.И.Данилов, И.В.Пузынин, А.Н.Сафонов, Б.В.Феоктистов. Ограничение тока пучка пространственным зарядом в синхротроне ОИЯИ. Препринт ОИЯИ Р-2912, Дубна, 1966.
8. В.И.Данилов, П.А.Полубярова, А.Н.Сафонов, Б.В.Феоктистов. Зависимость формы пучка в центральной области синхротрона от ускоряющего напряжения и спада магнитного поля. Сообщение ОИЯИ Р9-5945, Дубна, 1971.

9. В.М.Данилов, И.В.Пузынин. Электрическое поле в центральной области синхротрона. Препринт ОИЯИ Р9-3497, Дубна, 1967.
10. В.М.Данилов, И.Б.Вичевич, Б.Н.Марченко, Э.А.Полдеров, А.Н.Садопов, А.В.Шестов. Увеличение тока внутреннего пучка синхротрона ОИЯИ введением дополнительной электростатической фокусировки. Препринт ОИЯИ Р-1353, Дубна, 1964. Опубликовано в журнале "Известия на физический институт с АНБ" (Болгария), том XIV (1966) 5.
11. Г.М.Герштейн. Моделирование полей методом электростатической индукции (наведенного тока). Наука, Москва, 1970, 24.
12. В.М.Данилов, И.В.Пузынин. Электростатическое поле равномерно заряженных объемов цилиндрической конфигурации. Препринт ОИЯИ Р-2131, Дубна, 1965.
13. И.Н.Бронштейн и К.А.Семендяев. Справочник по математике. ГИТТЛ, Москва (1956), 213, 148.