

875/93

C133.2a

Катышев Ю.В.  
Б1-5-92-584

+



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б1-5-92-584

**ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ**

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
Лаборатория вычислительной техники и автоматизации

Б1-5-92-584

Ю.В.Катышев

СОЛИТОНЫ 80-Х ГОДОВ: ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

31. 12. 92

Дубна, 1992

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
БИБЛИОТЕКА

## Введение

"Солитонный бум" продолжается. Например, в 1980 году в мире было опубликовано 1353 работы по солитонам. Распределение по странам выглядит следующим образом:

США	348	Болгария	10
СССР	322	Бразилия	10
Япония	143	Нидерланды	9
Италия	79	Югославия	8
ФРГ	76	Австралия	8
Франция	63	ГДР	7
Великобритания	41	ЧССР	6
Дания	32	Финляндия	6
Индия	26	Бельгия	6
Канада	22	Венгрия	5
Швейцария	22	Мексика	4
Испания	21	Швеция	4
Польша	20	Марокко	3
Ирландия	14	ЮАР	3
Израиль	12	Другие страны	12
КНР	11		

Эти данные вместе с данными работы Ичикавы и др., содержащей сведения о числе солитонных исследований в мире до 1977 года включительно, указывают на то, что экспоненциальный рост, начавшийся в 1971 году, продолжается. Предсказание авторов указанной работы о постоянстве этого числа в период 1978–80 г.г. не подтвердилось.

При сборе указанной нами статистики мы использовали, в частности, информацию системы ИНИС о работах, содержащих дескриптор "СОЛИТОНЫ".

В настоящем кратком обзоре мы рассматриваем области применения солитонов в публикациях 80-х годов. Особенностью этого периода является очень большой рост числа лабораторных физических экспериментов по реальным солитонам, начиная с рассеяния нейтронов конденсированными средами и плазменных исследований и кончая полиацетиленом и мелкой вращающейся жидкостью, а также работ, интерпретирующих эти эксперименты.

Другой особенностью последних лет является выход солитонного подхода из цикла физических наук к другим наукам (химия, биология, астрономия, океанография, синергетика), а также охват новых областей физики (ускорители заряженных частиц, магнитная гидродинамика, физика планет и Солнца<sup>ж)</sup>, молекулярная физика, теория упругости, теория гравитации, лазеры, кристаллофизика, нелинейная акустика, космология, суперсимметричные теории, метеорология, физика атмосферы и магнитосферы, радиофизика и др.) и техники (нелинейные линии передачи, волоконная оптика). Солитонная наука все шире применяется к реальным системам. Концепция солитонов получила универсальный характер.

Перейдем к краткому описанию конкретных областей применения солитоники и начнем с биологии.

### Биология и биофизика

/21,24,42/

А.С.Давыдов предложил солитонную модель<sup>жж)</sup> экспериментально наблюдаемого переноса энергии и заряда вдоль длинных белковых молекул. В этой модели белковая молекула аппроксимируется молекулярной цепью, образованной пептидными группами, которые соединены между собой водородными связями.

Показано, что движение дополнительного электрона вдоль одномерной молекулярной цепи стабилизируется его взаимодействием с локальной деформацией. Образование звуковых солитонов, движущихся со скоростью, превышающей скорость звука, возможно в молекулярных цепях с кубической ангармоничностью.

Давыдов и его группа доказали возможность образования в биологических молекулярных цепочках экситонных состояний солитонного типа и выяснили их роль в функционировании белковых структур, исследовали солитонный механизм переноса энергии вдоль альфа-спиральных белков и движение протонов в квазидномерных молекулярных цепочках с водородной связью (солитонная модель протонного транспорта).

Теорию рассеяния ультрахолодных нейтронов на давидовских солитонах развивала Брижик.

Брижик и Давыдов рассматривали спаривание электросолитонов в мягких молекулярных цепях. Они разработали теорию эффективного

---

<sup>ж)</sup> Солитоны в солнечной плазме.

<sup>жж)</sup> Молекулярные (или давидовские) солитоны.

переноса спаренных электронов от доноров к акцепторам в таких цепях.

Миура исследовал математическую модель нелинейных волн в нейронных корковых структурах, описывающую явление "распространяющейся депрессии" как распространение нелинейных волн в популяции нейронов.

Взаимодействие нервных импульсов в живых организмах рассматривалось Скоттом и Вота Пинарди. Распространение по аксону нервных импульсов  $th(x-at)$  моделируется уравнением *Fitzhugh-Nagumo*:

$$\varphi_t = \frac{1}{2} \varphi_{xx} + (a - \varphi)(\varphi^2 - 1), \quad -1 < a < 0.$$

Укажем здесь также на книгу "Синергетика мозга", где описывается использование теории солитонов.

Появилась новая наука-биоматематика (см. книгу *Biomathematics in 1980*).

В биологических экспериментах на сердечной мышце наблюдались нелинейные спиральные волны.

Возбуждения типа доменных стенок в ДНК рассматривались Сараем.

#### Солитоны в волоконно-оптической связи

В последние годы бурно развивается новое направление техники связи - оптические кабели-световоды. Здесь распространение солитонов по длинному гибкому стекловолоконному световоду описывается нелинейными уравнениями типа Шредингера. Передача информации цугом солитонов увеличивает скорость передачи данных.

Молленауэр и др. экспериментально наблюдали пикосекундные солитоны в оптических одномодовых световодах (волоконнооптические солитоны) длиной 700 м.

Передача сигналов оптическими солитонами в одномодовом волокне исследовалась также Хасэгавой и Ксдама.

Солитонный режим распространения импульсов в каналах связи характеризуется однозначной связью между энергией и шириной импульса.

#### Линии передачи

Солитоны в нелинейных  $LC$ -линиях передачи лестничного типа исследовались в работах Йошинаги и Какутани. Они описываются уравнениями типа Кортевега-де Вриса.

#### Ускорители

Укажем на работы Мазманишвили, Наугольного, Хьюза и Отта.

### Планетарные солитоны

Петвиашвили предложил нелинейную модель, согласно которой знаменитое Большое Красное Пятно Юпитера представляет собой антициклонический солитон<sup>ж)</sup> Россби юпитерианской атмосферы. От солитонной модели, разработанной американскими специалистами Максурски и Редеккопом, модель Петвиашвили отличается простотой и, кроме того, тем, что ее легче экспериментально проверить.

Эксперимент качественно подтвердил теоретическую модель.

Незлин разработал бароклинную модификацию модели Пятна.

### Геофизика

Истомин и др. предложили механизм радиоизлучения Земли, который включает в себя возможное образование трехмерных солитонов циклотронными волнами<sup>жж)</sup>, возбуждаемыми быстрыми электронами. Интенсивность электрического поля в солитонах может быть такой большой, что становится возможной эффективная генерация радиоволн на второй гармонике (генерация километрового излучения Земли циклотронными солитонами).

Теория электромагнитных волн полярного сияния также использует солитонный механизм.

В физике ионосферы важную роль играют вистлеровские (геликонные) солитоны, а также модифицированные электронно-звуковые солитоны.

Эффект нелинейностей на эволюцию баротропных восточных волн Россби исследовался численно Шапиро.

Николсон и др. исследовали ионосферный нагрев с помощью численного решения модифицированных уравнений Захарова и показали, что модуляционная неустойчивость, завершающаяся образованием солитонов, может быть более важна, нежели ранее рассмотренная параметрическая распадная неустойчивость.

Теорию радиолокационного обнаружения солитонов во время ионосферного нагрева разрабатывали Шпарин и Николсон.

Волны Россби в геофизике описываются  $RLW$ -уравнением.

Внутренние солитоны в Андаманском море рассматривались в работе Осборна и др.

<sup>ж)</sup> Этот солитон дрейфует в атмосфере планеты на запад и вращается вокруг собственной оси против глобального вращения Юпитера (дрейфовый солитон).

<sup>жж)</sup> См. также работу Коула и Похотелова.

### Солнце

Советский ученый Могилевский предположил, что в предвспышечный период на уровне фотосферы возникают нелинейные возмущения магнитного поля и скорости — МГД-солитоны, являющиеся источниками вспышечного процесса. Модель Могилевского представляет интерес в связи с обнаружением Зириним (США) кратковременных изменений знака в продольном магнитном поле фотосферы.

Робертс и Мэнгени рассматривали трубчатые и внешние солитоны, которые могут распространяться в фотосфере и хромосфере.

Применение нелинейных вистлеровских волн к плазме солнечного ветра рассматривали Шукла и др.

### Радиофизика / 77 /

Солитонные исследования охватывали здесь следующие направления:

- 1) нелинейные теории распространения радиоволн в ионосфере;
- 2) радиоэмиссия циклотронных солитонов (Похотелов и др.);
- 3) физика Солнца;
- 4) электромагнитные солитоны в нелинейных дискретных линиях;
- 5) солитоны в волноводах.

### Пульсары

Релятивистский ленгмюровский солитон в магнитосфере пульсаров рассматривался Г.Меликидзе и А.Патарая. Генерация ленгмюровскими солитонами инфракрасного излучения пульсара № 0532 изучалась Мамрадзе и др. Ломинадзе и Патарая рассматривали нелинейные механизмы излучения пульсарами на основе теории релятивистской электрон-позитронной плазмы в сильном магнитном поле.

### Гравитационные солитоны

Солитонные гравитационные волны уравнений Эйнштейна исследовались Ривеллесом. Летельер, используя метод обратной задачи теории рассеяния, нашел двухсолитонное решение уравнений Эйнштейна для аксиально-симметричного пространства-времени.

Статистические гравитационные солитоны рассматривались Алексеевым и Белинским.

### Черные дыры

Черные дыры играют роль солитонов (см., например, работы Хаджичека).

165/

Синергетика

Солитоны находят применение и в такой науке как синергетика<sup>ж)</sup>. Эта молодая наука, лежащая на стыке биологии, химии и физики, изучает самоорганизационное поведение больших открытых систем, которое приводит к образованию различных структур в этих системах. Мы отсылаем читателя к работам Данилова и Кадомцева, Забуского, а также к книге Г.Хакена и обзору Маханькова.

В 1982 году в Лос-Аламосе состоялась международная конференция по порядку в хаосе (хаос в детерминистских системах).

Нелинейная оптика. лазерная физика. квантовая электроника

Адамашвили рассмотрел самоиндуцированную прозрачность в ЭПР-диапазоне частот, описываемую системой уравнений Блоха-Максвелла.

Солитонами могут быть мощные лазерные импульсы, распространяющиеся в различных средах.

Интенсивные электромагнитные уединенные импульсы в плазме рассматривались Шуклой.

В последние годы исследовалась интегрируемая система, описывающая стимулированное рамановское (или комбинационное) рассеяние света

Взаимодействия оптического излучения с многоуровневыми системами

Большов, Лиханский и Персианцев рассмотрели нелинейные задачи, возникающие при изучении многочастотного распространения и взаимодействия импульсов света в резонансных многоуровневых средах и получили точные аналитические решения методом обратной задачи рассеяния для самоиндуцированной прозрачности и параметрического взаимодействия многочастотных импульсов.

Захаров с помощью метода обратной задачи исследовал распространение усиливающегося импульса в двухуровневой среде.

Сверхизлучение.

В.И.Рупасов и В.И.Юдсон доказали полную интегрируемость квантовой модели сверхизлучения Дике с дискретными атомами. Ранее Рупасов с помощью метода квантовой обратной задачи рассеяния доказал полную интегрируемость квантовой модели сверхизлучения Дике протяженных эффективно одномерных систем.

<sup>ж)</sup> Я.Б.Зельдович определял ее как науку о переходах между различными структурами, об упорядоченности внутри хаоса.



Конденсированные среды

Применение солитонов в физике конденсированных сред развивалось по следующим направлениям:

- 1) существование солитонных колебательных состояний в ангармонических кристаллах;
- 2) стационарные волны в нелинейных, периодически модулированных средах с большим групповым замедлением;
- 3) звуковые волны в ангармонических решетках;
- 4) волны плотности заряда;
- 5) атомные и ионные столкновения в твердых телах (прохождение частиц через вещество);
- 6) доменные стенки и фазовые переходы в сегнетоэлектриках;
- 7) дифракционные плоскости и доменные стенки в сверхтекучем гелии - 3;
- 8) магнитные солитоны в квазиодномерной ферромагнитной системе  $Cs Ni F_3$ ;
- 9) солитоны в ферромагнетиках и антиферромагнетиках, находящихся в магнитном поле;
- 10) электронный парамагнитный резонанс;
- 11) гидродинамика квантовых жидкостей;
- 12) распространение тепловых импульсов в кристаллах, например, в  $Na F$ ;
- 13) распространение кристаллических дислокаций, описываемое синус уравнением Гордона или двойным СГ-уравнением;
- 14) доменные стенки в нематиках;
- 15) динамика магнитных солитонов (солитонов  $n$ -текстуры,  $n$ -солитонов) в  ${}^3He-B$ ;
- 16) солитонное распространение нулевого звука в сверхтекучем  ${}^3He-B$ ;
- 17) пайерлсовские диэлектрики с наведенной димеризацией;
- 18) солитонная проводимость в полиацетилене;
- 19) Солитоны в аморфных магнетиках;
- 20) цепочки Гейзенберга;
- 21) фазовые переходы смещения;
- 22) структурные фазовые переходы в несоразмерные фазы;
- 23) механизм сокращения мышц на молекулярном уровне и переноса энергии через белковые молекулы (давидовские солитоны в молекулярных системах);

- 24) солитонная проводимость волны зарядовой плотности в новом квазидвумерном проводнике капронате таллия  $\text{CH}_3-(\text{CH}_2)_4-\text{CO}_2 \text{Te}$  ;
- 25) солитоны в стратифицированных жидкостях;
- 26) зарождение фазовых доменов на примесях;
- 27) солитоны в несоизмеримых кристаллах;
- 28) уединенные волны зарядовой плотности в твердых телах, описываемые синус-уравнением Гордона;
- 29) фазовые солитоны в кристаллах и сегнетоэлектриках;
- 30) модель Изинга в присутствии магнитного поля;
- 31) солитоны в квазиодномерных проводниках;
- 32) нелинейный транспорт в твердых телах;
- 33) дрожащие кинки ( *wobbling kinks* );
- 34) устойчивые кинки дробного заряда в квазиодномерных системах
- 35) проводящие полимеры;
- 36) инфракрасная активность пайерловских систем;
- 37) вистлеровские (геликонные) солитоны в физике твердых тел;
- 38) солитонная решетка в кристалле  $\alpha\text{-Zn P}_2$  ;
- 39) теория дифракции волновых пучков в анизотропных средах (кристаллы);
- 40) вихревые солитоны в жидком гелии;
- 41) хаотически зацепленные солитоны в несоизмеримом  $\text{Rb}_2\text{ZnCl}_4$ ;
- 42) электросолитоны в сверхпроводимости молекулярных кристаллов
- 43) плазменные солитоны в полупроводниках;
- 44) обобщение спиновой модели Лейзенберга на случай нескольких компонентов;
- 45) описание коллективных возбуждений и их статистических свойств в системах с несколькими сортами спинов.

121

Химическая физика

Перчаком и др. изучались эффекты топологических солитонов на автокорреляционные функции для цепочек связанных осцилляторов с помощью компьютерного моделирования броуновской динамики. Рассмотрены три модельных системы, в том числе синус-гордоновская цепочка.

Скиннер и Воллес предложили синус-гордоновскую модель локализованных дефектов в кристаллическом полиэтилене.

### Проводники низкой размерности

О применении солитонного механизма для описания свойств одномерного проводящего полимера полиферроценилена см. работу Бема.

Легированные органические полимеры стали очень интересной областью физики конденсированных сред, где нелинейные явления играют очень важную роль.

Но наибольшее внимание как теоретиков, так и экспериментаторов было обращено на солитоны в полиацетилене  $(\text{CH})_x$ .

#### Полиацетилен (солитонная модель) <sup>182/</sup>

Большое число работ посвящено солитонным и биволновым возбуждениям в такой электрон-фононной системе как полиацетилен  $(\text{CH})_x$ . Оно включает в себя как теоретические, так и экспериментальные исследования, а также прямое численное моделирование.

Наблюдения, связанные с ЭСР – анализом нейтральных магнитных дефектов в нелегированном или слегка легированном органическом полимере  $(\text{CH})_x$ , привели к появлению понятия солитонное легирование. Рассматривались как заряженные, так и нейтральные солитоны (кинки), причем одномерные модели полиацетилена с солитоном имеют большое сходство с релятивистскими теоретико-полевыми квантовыми солитонными моделями (появление кинков с дробным зарядом и др.). Так сошлись теория конденсированных сред и релятивистская теория поля.

Теоретические модели кинкообразных (топологических) солитонов в полиацетилене предсказывают также существование солитонов поляронного типа как в цис-, так и в транс-полиацетилене.

Два смежных полярона неустойчивы относительно образования двух бесспиновых заряженных солитонов.

Учет эффектов трехмерности в одномерной солитонной модели  $(\text{CH})_x$  был выполнен Меле и Райсом.

Солитонный механизм легирования полиацетилена рассматривался в работах Бланше и др.

Существование нейтральных кинков в полиацетилене было подтверждено численными расчетами Су.

Передача электрического заряда<sup>\*</sup> в  $(\text{CH})_x$  осуществляется посредством образования заряженных солитонов (солитонный транспорт заряда).

<sup>\*</sup> Полиацетилен  $(\text{CH})_x$  является квазиодномерным органическим полупроводником (проводящим полимером).

Подвижные объекты, ответственные за проводимость  $(\text{CH})_x$  при низких концентрациях легирования, являются заряженными бесспиновыми солитонами.

Солитонная одноэлектронная модель полиацетилена  $SSH$  использовала теорию Хюккеля и аргументы угругой энергии. Эта модель объяснила многие оптические, инфракрасные и магнитные данные, особенно, когда включались поляронные состояния (связанные пары заряженной солитон - нейтральный антисолитон).

Теория инфракрасной активности  $(\text{CH})_x$ , индуцируемой солитонами, развивалась в работе Меле и Райса.

Большой обзор экспериментальных результатов по солитонам в полиацетиле  $(\text{CH})_x$  был сделан Хиджером и Мак Дайрмидом, в 1981 году.

Солитонная модель полиацетилена получила экспериментальное подтверждение при анализе магнитных, инфракрасных, транспортных и фототранспортных свойств слегка легированных образцов.

Интерпретация электронных и магнитных свойств тран- $(\text{CH})_x$  в терминах солитонной модели стимулировала интенсивные исследования.

В полиацетиле заряженные солитоны  $S^\pm$  ( $Q = \pm e$ ) не имеют спина<sup>ж)</sup>, нейтральные  $S^0$  - спин  $1/2$ . Существование последних было доказано лабораторными экспериментами по измерению статической магнитной восприимчивости. Нейтральные и заряженные солитоны определяют магнитные, электрические и оптические свойства нелегированного и слегка легированного полиацетилена (электрическую проводимость, диффузию спина, оптическое поглощение, фотопроводимость, магнитные резонансы).

Лабораторные эксперименты показали, что в нелегированном трансполиацетиле концентрация  $S^0$ -кинков порядка нескольких сот на миллион.

Этемад и др. предложили прямую фотогенерацию  $S^+S^-$ -пар.

Спектроскопические исследования слегка легированного тран- $(\text{CH})_x$  были проведены в работах Бланше и др.

Су и Шриффер продемонстрировали, что фотогенерированная электрон-дырочная пара распадается на пару солитонов  $S^+S^-$  за время сравнимое с оптическим фононным периодом  $10^{-13}$  с.

Фотопроводимость  $(\text{CH})_x$  экспериментально исследовалась в работах Этемада и др.

<sup>ж)</sup> Электроны и дырки имеют спин  $1/2$ .

Заряженные солитоны играют решающую роль в фотопроводимости трансполиацетилена.

Экспериментально наблюдалась солитонная фотопроводимость трансполиацетилена. Фотопроводимость в транс-(CH)<sub>x</sub> отсутствует.

Информация о свойствах и динамике нелинейных (солитонных) возбуждений (CH)<sub>x</sub> была получена в ряде экспериментов по фотоиндуцированному поглощению.

Прямую фотогенерацию **заряженных солитонов** в (CH)<sub>x</sub> экспериментально исследовали Бланше и др., а также Уэйнбергер. Порог фоторождения солитонов расположен ниже края поглощения. Фотоиндуцированные солитонные пары  $S^+S^-$  диссоциируют при температурах выше 150 К. Заряженные солитоны вносят важный вклад в фотопроводимость полиацетилена.

Солитонный механизм переноса заряда объясняет сильный рост (на 10 порядков) электрической проводимости полиацетилена с легированием. Подвижность электронов в полиацетиленах Су, Шриффером и Хиджером, а также Кайвелсоном и Хэлмом.

Эффект облучения энергичными ионами углерода C<sup>+6</sup> (энергия 56 МэВ) на транспортные свойства транс-(CH)<sub>x</sub> и транс-(CD)<sub>x</sub> экспериментально изучался Кауффером и др.

Фототранспортные эффекты в полиацетиленах исследовались в лабораторном эксперименте Тани и др. (металлическое состояние (CH)<sub>x</sub>, а переход полупроводник-металл в легированном полиацетиленах - Меле и Райсом.

Хикксом и Вассерманом изучалось оптическое поглощение для полиацетиленовой цепочки определенной длины с одним солитоном. Касовским и др. развивалась зонная теория металлического полиацетилена.

Солитонный транспортный механизм электронной прыжковой проводимости транс-полиацетилена рассматривался Кайвелсоном. Структурное определение параметра нарушения симметрии в транс-(CH)<sub>x</sub> проведено Финчером и др.

Генерация солитонных пар в полиацетиленах в подходе решеточной релаксации изучалась авторами из КНР.

Ультрафиолетовая фотоэлектронная спектроскопия оптически возбужденных состояний в транс-полиацетиленах исследовалась Саланеком и др. Данные обсуждения в контексте теоретических моделей оптически индуцированного полярона и образования солитонов.

Образование солитонных экситонов рассматривалось Райсом, а вибрационное возбуждение заряженных солитонов — Меле и Райсом.

Парк и др. экспериментально исследовали электрический транспорт в легированном  $(\text{CH})_x$ .

Вычисление оптического поглощения  $(\text{CH})_x$  было проведено Хоровицем и Кайвелсоном и др. на основе континуумной модели полиацетилена.

Аномальное поведение магнитной восприимчивости легированного полиацетилена наблюдалось в работе Икехаты и др.

Монте-Карловское моделирование полиацетиленовых цепочек, описываемых гамильтонианом Су-Шриффера-Хиджера, провели Хирш и Грабовский. Они установили, что солитон всегда возникает в такой системе, даже в присутствии кулоновского взаимодействия.

Зацепление (*pinning*) солитонов в  $(\text{CH})_x$  обсуждалось в работах Бланше и др.

В некоторых работах утверждалось, что экспериментальных данных по  $(\text{CH})_x$  не достаточно для строгого доказательства существования солитонов в полиацетилене.

В экспериментальной работе, посвященной исследованиям проводимости  $(\text{CH})_x$ , легированного иодом и  $AsF_5$ , под действием миллиметрового и далекого инфракрасного излучений, утверждалось, что преобладающий механизм переноса электрического заряда в  $(\text{CH})_x$  не включает в себя движущихся солитонов. Солитоны подвижны только в трансацетилене.

### Цепочка Пайерлса и полиацетилен

Ломдаль и др. рассмотрели распространение кинка в модели ССХ димеризованной цепочки Пайерлса. Хоровиц исследовал инфракрасную активность пайерлсовских систем в применении к полиацетилену, а также смешанную пайерлсовскую фазу в аспекте металлического полиацетилена (устойчивость дефектов чередования связей в  $(\text{CH})_x$  и конденсат Пайерлса).

Полярны и доменные стенки для различных пайерлсовских систем изучались в работах Бразовского. Теория электронных структур и искажений решетки в полиацетилене, а также блуждающих систем Пайерлса развивалась японскими авторами.

Эффект кулоновских взаимодействий на неустойчивость Пайерлса теоретически и с помощью численного моделирования исследовали Хирш, а также Мазумдар и Диксит.

### Другие полимеры

Солитоны в поли (р-фенилине) (FPP) всегда связаны в пары (биполярны<sup>ж)</sup>).

Перескок биполяронов (пар заряженных солитонов) с одной полимерной цепочки на другую как модель электрического транспорта рассматривался в работе Чанса и др.

Биполяроны не несут спина.

### Сегнетоэлектрики

Такером разработан квантовый метод обратной задачи теории рассеяния для двумерного льда и сегнетоэлектрической (ферроэлектрической) решетки. Роль солитонов и фазонов в фазовых переходах несоизмерных сегнетоэлектриков изучалась Блинком. Уединенные волны в классической одномерной модели Изинга в поперечном поле рассматривались Жекшом и др.

Шнайдер и Штолль изучали свойства мягкой моды при структурных фазовых переходах.

Бабу Джозеф и Бейби отмечали применимость модели  $\varphi^6$  для описания сегнетоэлектрических фазовых переходов первого порядка.

### Молекулярная физика

Фаруэлл и Минами рассмотрели сдномерную молекулу Тоды и нашли общее решение.

Солитонную теорию электронов и экситонов в нелинейных молекулярных цепях развили Давыдов и Золстарук.

Солитоны в двух параллельных молекулярных цепочках рассматривались Сергиенко, а солитоны в стохастических молекулярных цепях — Абдуллаевым и др.

### Молекулярные кристаллы

Биекситоны как солитоны в одномерном молекулярном кристалле рассматривались югославскими авторами Сатаричем и др. Они исследовали критерии образования и существования биекситонов в виде солитонной волны в молекулярных цепочках, используя подход Давыдова.

### Жидкие кристаллы

Уединенные волны обеспечивают переход между двумя состояниями с противоположными поляризациями в киральных смектиках (расслоенных фазах).

<sup>ж)</sup> Двухзарядные дефекты.

### Экситоны\*

Здесь сошлемся на книгу Москаленко и др., посвященную солитонам и мутации в экситонной области спектра, и книгу Москаленко, рассматривающую теорию экситонов большой плотности.

Академик Л.В.Келдыш предсказал явление конденсации газа экситонов в капли (солитоны), которые могут перемещаться по кристаллу, например, с помощью электрического поля.

### Полупроводники

Укажем на книгу под редакцией Ферри и др., рассматривающую физику нелинейного транспорта в полупроводниках.

### Суперионные проводники

(твердые электролиты)

Здесь солитоном является система "вакансия + искажение", описываемая полем

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - ut}{v_0 \sqrt{1 - u^2/c_0^2}} \right) \right].$$

Солитонная модель объясняет быстрый захват носителей тока. Волны зарядовой плотности в суперионных проводниках рассматривались Н.М.Плакидой.

Применение модели Френкеля-Конторовой к одномерному суперионному проводнику К-голландиту изучалось в работе Ишии.

### Одномерные магнитные системы

(ферромагнетики)

Такие системы оказались удобным объектом для экспериментального и теоретического изучения магнитных солитонов (нелинейных локализованных волн намагниченности ферромагнетика), как динамических, так и топологических.

Подробно исследованы магнитные солитоны в ферромагнетиках с анизотропией типа "ось легкого намагничивания". Они могут быть интерпретированы как связанные состояния большого числа магнитов.

Непосредственным экспериментом было доказано существование нелинейных возбуждений (магнитных солитонов) в одномерной ферромагнитной цепочке  $\text{Cs Ni F}_3$  с помощью рассеяния нейтронов на этом ферромагнетике, помещенном в магнитное поле.

Хакенбрахт исследовал возможность создания нетепловых солитонов в одномерной магнитной синус-Гордонэвской системе.

\* ) Возбуждения, возникающие в кристаллах под действием света.



Бушер и др. наблюдали большой центральный пик для соответствующей солитонной модели квазиодномерного антиферромагнитного соединения ТММС в магнитном поле как при упругом, так и неупругом рассеянии нейтронов.

Сайн-гордоновский (СГ) анализ низкотемпературных экспериментов по теплоемкости ферромагнетика с легкой плоскостью  $CsNiF_3$  был выполнен в работе Хаммера и Шраунера в терминах конденсата эллиптических синоидальных СГ-волн.

Было показано, что одномерная антиферромагнитная планарная спиновая цепочка может быть сведена к синус-гордоновской полевой системе. Реализация такой системы и ее солитонные особенности в антиферромагнетике ТММС во внешнем магнитном поле были подтверждены в рассеянии нейтронов и в экспериментах по релаксации решетки ядерных спинов.

В 1982 году Борса измерил солитонный вклад в теплоемкость антиферромагнетика ТММС в магнитном поле. Анализ этого эксперимента был проведен в работе Хаммера и Шраунера.

Эксперимент по рассеянию нейтронов обнаружил существование бризеров синус-уравнения Гордона.

Точное интегрирование нелинейного уравнения Ландау-Лифшица проведено Боровиком.

Калибровочная эквивалентность уравнения Ландау-Лифшица и нелинейного уравнения Шредингера установлена Маханьковым и Пашаевым, в анизотропной и изотропной непрерывных гейзенберговских спиновых цепочек - Кунду и Пашаевым.

Обобщенная многокомпонентная гейзенберговская спиновая цепочка с фононным взаимодействием предложена Маханьковым и др.

Солитоны и магноны в классической непрерывной гейзенберговской цепочке (их спектр) исследовались в работах Фогедби и Лунда.

Барьяхтар и Иванов исследовали динамические солитоны в основном антиферромагнетике.

А.К.Звездин и А.Ф.Попков развивали нелинейную теорию магнито-статических спиновых волн в ферромагнитных пленках. Исходными уравнениями являлись уравнения Ландау-Лифшица и магнитостатики.

Тамметта и Ойтмаа провели численное исследование одномерного анизотропного\*) гейзенберговского ферромагнетика для оценки энергии основного состояния и внеплоскостной спиновой флуктуации при  $T=0$  и

\*) С анизотропией типа "легкая плоскость".

при конечной температуре. Для параметров, соответствующих  $CsNiF_3$  <sup>ж)</sup>, величина спиновой флуктуации такова, что ставит сомнения для применимости синус-Гордоновского приближения для этой системы.

Численно промоделирована спиновая динамика классической ферромагнитной цепочки с анизотропией легкая плоскость в магнитном поле. Найдены существенные отклонения от обычного СГ-описания для случаев распространения одиночного кинка, одиночного бiona и столкновений кинка с антикинком.

Накамурой, Сасадой и Бишопом развит формализм интегралов по путям для получения полуклассического квантового спектра импульсного солитона с внутренней степенью свободы в одномерном непрерывном гейзенберговском ферромагнетике с легкой осью.

Ф.Х.Абдуллаев исследовал эволюцию магнитных солитонов в квазиодномерных магнетиках под действием флуктуаций фононной системы.

Хороший обзор литературы по солитонам в одномерных магнитных системах был сделан Боннером и др.

#### Физика низких температур

Феноменологический подход к описанию равновесных характеристик "кинкового" газа на основе модели решеточного газа разработан Федяниным и Маханьковым.

#### Сверхпроводимость и сверхтекучесть

Распространение импульсов нулевого звука в сверхтекучем гелии-3 имеет солитоподобный характер.

Солитоны в сверхтекучем гелии-3-А экспериментально наблюдались Гоулдом, Бартолаком и Бозлером; Накаджима и др. Экспериментально исследовали солитоны в сверхтекучем  $^4\text{He}$ .

Аткин и Фокс изучали солитоны в гелии -II.

В последние годы создана бисолитонная теория высокотемпературной сверхпроводимости (Давыдов и др.).

#### Солитоны в джозефсоновских переходах (контактах)

Флюксоны (квантованные магнитные потоки) распространяются в джозефсоновской линии передачи как уединенные волны (солитоны). Такие линии могут описываться уравнениями типа синус-уравнения Гордона

Асламазов и Гурович исследовали закрепление солитонов абрикосовскими вихрями в распределенных джозефсоновских контактах. Наличие таких вихрей в сверхпроводящей пленке приводит к новому типу возмущения синус-уравнения Гордона.

<sup>ж)</sup> Система с единичным спином.

/11/

Нейтронная физика

Рассеяние нейтронов на солитонных возбуждениях описано в книге Изюмова и Черноплекова, в трудах международной конференции "Рассеяние нейтронов в конденсированном веществе", опубликованных в 1983 г.

Брижик разработала теорию упругого когерентного рассеяния ультрахолодных нейтронов на давидовских солитонах без учета теплового колебания атомов цепочки.

Деформация твердых тел

Отсылаем читателя к новой книге эстонского специалиста Ю. Энгелбрехта, посвященной нелинейным волновым процессам в этой области физики. Методы, изложенные в этой книге, применяются также в теории электромагнитных волн и в акустике.

Солитоны в плазме

/36, 79, 15/

Плазма является уникальной средой, в которой возникают многочисленные типы нелинейных волн. Солитоны формируются при распространении интенсивных волн в плазме.

Солитонные явления в физике плазмы включают в себя:

- 1) Альвеновские, магнитозвуковые верхне- и нижнегибридные волны в плазме и их динамика.
- 2) Ионосферный нагрев.
- 3) Ленгмюровскую турбулентность, взаимодействие ленгмюровских солитонов со звуком, с резонансными частицами.
- 4) Взаимодействие пучков с плазмой.
- 5) Нелинейное взаимодействие плазменных волн.
- 6) Слабо нелинейные ионно-звуковые волны с дисперсией, описываемые уравнением  $KdV$ .
- 7) Кавитоны (ямки плотности плазмы, заполненные высокочастотным внутренним полем).
- 8) Теория солитонов огибающих электромагнитных волн.
- 9) МГД - течения плазмы.
- 10) Электронные плазменные волны в волноводах, описываемые уравнением .
- 11) Генерация связанных многосолитонных структур (мультисолитонов) при сильной турбулентности параметрически неустойчивых верхнегибридных волн в плазме с неоднородными равновесными параметрами.
- 12) Отражение ионно-звуковых солитонов плазменными неоднородностями.

13) Распространение ионно-звуковых волн в холодной неоднородной плазме.

14) Нелинейное просветление неоднородного плазменного слоя в поле интенсивной электромагнитной волны.

15) Модуляционная неустойчивость в плазме.

16) Нелинейные электронные волны в сильно замагниченной плазме.

17) Ионно-звуковые солитоны большой и малой амплитуды в замагниченной плазме.

18) Уединенные электростатические поверхностные волны на плазменном цилиндре.

19) Нелинейное рассеяние вистлеровских волн электростатическими флуктуациями.

20) Резонансное взаимодействие двух сферических ионно-звуковых солитонов. Это взаимодействие приводит к образованию нового солитона большей амплитуды.

21) Ионные волны большой амплитуды.

22) Уравнение Кадомцева-Петвиашвили.

23) Ионно-звуковые солитоны в плазме с отрицательными ионами (модифицированное уравнение  $KdV$ ).

24) Пинч-фаза и фазы образования нейтронов в плазменном фокусе.

25) Солитоны в ионно-звуковых двойных слоях.

26) Деривативное нелинейное уравнение Шредингера.

27) Уравнение  $KdV$  в бесстолкновительной плазме.

28)  $RLW$ -уравнение как модель дрейфовых волн в плазме.

29) Косое соударение плоских ионно-звуковых солитонов.

Шаташвили и Цинцадзе разработали систематическую теорию получения обобщенной системы уравнений Захарова для бесстолкновительной изотропной сильно турбулентной плазмы с учетом нелинейного затухания Ландау и релятивистского эффекта. Они указали условия вывода нелинейного уравнения Шредингера из этой обобщенной системы, нашли новую ветвь модуляционной неустойчивости, показали, что взаимодействие волна-волна-частица ведет к развалу солитона.

В работе Бражника и др. численно исследовалась пространственно-временная эволюция солитонов, генерируемых однородным электрическим полем в области верхнего гибридного резонанса в неоднородной плазме.

Анализ использует кубическое уравнение Шредингера для амплитуды электрического поля верхнегибридной волны.

Влияние электромагнитного поля на самомодуляцию нелинейных нижегибридных волн в неоднородной плазме изучалось Хеу и Куалем.

#### Ленгмюровские солитоны

В работе Бути и Ю исследовались вопросы существования ленгмюровских солитонов в двухтемпературной плазме. Фабрикант рассмотрел динамику ленгмюровских солитонов в неизотермической плазме с учетом линейной и нелинейной диссипации. Он показал необходимость учета затухания ионного звука, которое приводит к замедлению солитонов.

#### Ионно-звуковые солитоны

Окутсу и Шотт экспериментально исследовали расходящиеся ионно-звуковые волны и сравнили опыт с результатами расчетов по уравнению  $KdV$ . Сферически-сходящиеся ионно-звуковые солитоны наблюдались в плазме Нагасавой и др.

Лотко исследовал динамическое взаимодействие между ионно-звуковым солитоном и адиабатически отраженными частицами. Отражение ионно-звуковых солитонов неоднородностями плазмы изучалось в работе.

Хазей и др. наблюдали распространение ионно-звукового солитона в движущейся ямке плотности и обнаружили, что затухание солитона в этой ямке происходит несколько слабее, чем в однородной плазме.

Габл, Балсон и Лоннгрэм возбуждали двумерный дискообразный ионно-звуковой солитон в бесстолкновительной плазме. Были выполнены эксперименты по косым соударениям двух ионно-звуковых солитонов.

Образование ионно-звукового двойного слоя в плазме под действием внешней разности потенциалов описывается модифицированным уравнением  $KdV$  при учете отражения электронов.

Слабо нелинейные одномерные ионно-звуковые волны описываются симметричным регуляризованным длинноволновым уравнением

$$u_{tt} - u_{xx} + \left(\frac{1}{2} u^2\right)_{xt} - u_{xxx} = 0.$$

#### Магнитозвуковые солитоны

Взаимодействие быстрых магнитозвуковых солитонов с верхне- и нижегибридными квазипотенциальными плазменными волнами<sup>\*)</sup> исследовалось горьковским автором Громовым.

<sup>\*)</sup> Распространяющимися поперек внешнего магнитного поля.

### Верхнегибридные солитоны

Верхнегибридные солитоны в плазме наблюдались ЧО и др.

В работе В.А.Бражника и др. исследовалась пространственно-временная эволюция солитонов, генерируемых однородным электрическим полем в области верхнего гибридного резонанса в неоднородной плазме (с помощью нелинейного уравнения Шредингера).

Дрейфовые волны в плазме описываются регуляризованным длинноволновым уравнением

$$u_t + u_x - uu_x - u_{xx}t = 0.$$

/68/

### Электрические разряды

Существование уединенных волн в наносекундных разрядах с предионизацией изучалось Трофимовым, а в импульсных разрядах с полым катодом — Хильдебрандтом.

Горшков, Миронов и Сергеев экспериментально наблюдали многопучковую самолокализацию плазменных волн в условиях ВЧ-разряда.

### Токамаки и стеллараторы

Дрейфовые волны в токамаке, как показали Тассо и Лербингер, удовлетворительно описывается уравнением  $KdV$ . Модифицированное уравнение  $KdV$  \*) с двумя дополнительными членами, определяющими электромагнитную поправку и неоднородность плазмы, для типичных параметров токамаков демонстрирует подавление образования солитонов (численный результат Хьюе и Куэля).

Химмелл исследовал поперечную устойчивость нижнегибридных солитонов в токамаках.

Применяются солитоны и в стеллараторах.

### Водяные нелинейные волны. Динамика жидкостей.

#### Гидродинамические солитоны /16/

Уравнение Кортевега-де Вриса, которое по праву можно назвать основным модельным уравнением солитонной науки, возникло при исследовании однонаправленных длинных волн на мелкой воде (опубликовано в 1895 году). Оно описывает также внутренние волны в двухслойной жидкости.

Длинные водяные волны моделируются регуляризованным длинноволновым уравнением, называемым иногда уравнением Бенджамина-Бонн-Мэйхони (ББМ) \*\*)

\*) Для случая возбуждения широким спектром.

\*\*\*) Это не интегрируемое обратным методом уравнение имеет только три полиномиальных закона сохранения. Несмотря на этот факт взаимодействие уединенных волн почти идеально.

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0,$$

а уравнением Бенджамина-Оно

$$u_t + 2uu_x + \frac{1}{\pi} \rho \partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x', t)}{x' - x} dx' = 0$$

— распространение длинных внутренних волн в жидкости большой глубины (в слоистой жидкости).

Распространение длинных внутренних волн в жидкости со слоями описывается также промежуточным длинноволновым уравнением<sup>\*</sup> (уравнением для конечных глубин):

$$u_t + uu_x - \frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x') \coth \frac{1}{2} \pi(x - x') dx' = 0.$$

Все эти уравнения интегрируемы.

Волны на мелкой воде с горизонтальным дном описываются нелинейной системой

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + h_x &= 0, \\ h_t + hu_x + uh_x &= 0. \end{aligned}$$

Законы сохранения для водных волн исследовались Бенджамином и Олвером. Уединенные водяные волны конечной амплитуды исследовались Амиком и Толандом.

Экспериментально обнаружены солитоны в жидкости с пузырьками газа и на поверхности глубокой воды.

Ветровые волны на глубокой волне исследовались Фабрикантом. Он же рассмотрел динамику солитонов в диссипативной среде (нелинейные волны на поверхности глубокой воды с учетом неровностей дна).

#### Физика океана. Океанология

Нелинейные длинные волны в мелкой воде, нелинейные волны при промежуточных и больших глубинах рассматривались в книге Мая.

В обзорной статье Вудса, список литературы которой содержит 40 названий, описываются внутренние волны в океане, турбулентная

<sup>\*</sup> Это уравнение предложено в 1977 году Джозефом.

диффузия, волны Россби<sup>\*)</sup>, вихри. Волну пунами можно во многих случаях рассматривать как солитон.

/76/

### Солитоны в квантовой механике

Применение солитонов и нелинейных волн в квантовой механике посвящена книга Берта.

### Нелинейная теория поля и физика элементарных частиц

/34, 17/

Солитонное направление в теории поля развивалось в следующих областях:

1. Изотопические модели фермионных полей с нарушенной симметрией.  $SU(2)$
2. Модель  $CP^{n-1}$ , являющаяся обобщением нелинейной сигма-модели с локальной  $U(1)$ -инвариантностью. Она привлекла большой интерес физиков в силу ряда своих необычных свойств.
3. Решеточная квантовая теория поля.
4. Синус-уравнение Гордона. /45/
5. Киральные солитонные модели нуклонов и дельта-резонансов.
6. Солитоны в квантовой гравитации и общей теории относительности (гравитационные солитоны).
7. Солитоны в нелинейных скалярных полевых теориях.
8. Решетка (или цепочка) Тоды.
9. Солитоны в нелинейных сигма-моделях.
10. Солитоны в калибровочных теориях. /81/

В работе Фитупатрика обсуждается вопрос, не являются ли кварки частицами, составленными из заряженных скалярнополевых солитонов огибающей.

Солитонные модели мешков разрабатывались во многих работах.

Численные решения для солитонной мешковой модели Фридберга-Ли 1977 года (уравнения движения для кварков и нетопологического солитонного сигма-поля) были найдены в работах Коппеля и др.

Модели мешков MIT и SLAC, как было показано в этих работах, являются предельными случаями модели Фридберга-Ли.

Солитонный мешок как модель квантовой хромодинамики рассматривался в обзоре Гоулдфлэма и Уилетса.

Барions как квантовохромодинамические солитоны изучались в работах Жерве, Сакиты, Уиттена, Адкина и др.

<sup>\*)</sup> Уединенные волны Россби в приближении "твердой крышки" движутся всегда на восток.



Было явно показано то, что топологический заряд может быть идентифицирован с барионным числом.

Барионы как черные солитоны обсуждались в работе Мильке. Солитонная модель барионов рассматривалась Казаковым и Мигдалом. Уиттен показал, что обычные барионы могут быть поняты как солитоны по эффективным лагранжианам алгебры токов. Барионы как топологические солитоны рассматривались в работе Хванга. В моделях Хванга топологический заряд принимает значения  $0, 1, 2/3, 5/6, 2/5$ .

Кинематика и статистика янг-миллсовских солитонов рассматривалась Фридманом и Соркиным.

Скирмионы исследовались в работах многих авторов. <sup>(1)</sup>

У модели Скирме есть солитонный сектор, который может быть отождествлен с барионами.

Модели протона типа модели Скирма описывают нуклоны как топологически устойчивые солитоны киральных полей.

Скирмионный лагранжиан при привлечении экспериментальных данных по  $\pi\pi$ -рассеянию предсказывает разумное значение массы протона.

Модель устойчивого солитона, аналогичного солитону Скирме, с топологическим барионным числом  $I$  была сконструирована в работах Балабандрана и др.

Успехи современных теорий типа расширенной супергравитации определяются в значительной степени запасом присущих им нелинейных образований типа монополей, солитонов, инстантонов, стенок и т.д.

### Теория поля $\varphi^4$

Су и др. нашли критическую температуру  $T_c$ , при которой исчезает кинкообразный солитон. В пределе слабой связи масса солитона

$$E_s|_{T=T_c} = \frac{1}{3\sqrt{3}} E_s|_{T=0}$$

и критическая температура

$$T_c = \frac{2}{3\sqrt{3}} E_s|_{T=0}$$

Модель  $\varphi^4$  применялась в 1975 году для описания фазовых переходов со смещением в сегнетоэлектриках Крумханслом и Шриффером для изучения термодинамических систем - Вентурой.

### Монополи

Большой цикл работ Форгача, Хорвата и Паллы посвящен монополярным решениям (генерирование одномонопольного решения при помощи преобразования Беклунна, конструирование аксиально-симметричных  $SU(N)$ -монополярных решений, метод генерирования решения для автодуальных монополей).

Джэкив и Ребби в 1976 году показали, что уравнение Дирака для фермиона с изоспином  $1/2$  в присутствии солитонного монополя имеет единственную нормированную нулевую моду, если фермион приобретает свою массу с помощью связи с изовекторным полем Хиггса, которое нарушает калибровочную симметрию  $SU(2)$ .

Уравнение для монополей рассматривалось в пределе Прасада-Зоммерфилда.

### Квантовые солитоны

Квантование солитона как протяженной частицы проведено Хираи.

Взаимодействие солитонов с квантовыми возбуждениями в нелинейных моделях скалярного поля в двумерном пространстве-времени рассматривалось Тверским.

Папастаматиу, Матсумото и Умегава провели каноническое квантование солитонов  $SG$ -модели в секторе бризеров и в многосолитонном секторе.

### Ядерная физика

Картавенко показал, что в квазиклассическом пределе уравнения ядерной гидродинамики с силами Скирма можно свести к нелинейному уравнению Шредингера

$$i\hbar u_t + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + \alpha |u|^2 u + \beta |u|^4 u + \lambda u = 0,$$

которое может быть использовано для анализа статических и динамических явлений физики тяжелых ионов.

17, 44/

### Математика нелинейных эволюционных уравнений

Большое развитие получил метод обратной задачи теории рассеяния. Этот метод точного интегрирования ряда нелинейных уравнений оказался сильным средством для анализа различных полностью интегрируемых систем.

Лезновым на примере синус-уравнения Гордона развит метод нахождения солитонных решений, не связанный с конкретной матричной реализацией  $L, A$ -пары Лакса, а апеллирующий непосредственно к свойствам алгебры внутренней симметрии нелинейных уравнений.

Теория возмущений для солитонов разрабатывалась Масловым, Косевичем, Кившарем, Карпманом, Сольевым, Бондесоном, а групповые подходы Ибрагимовым, Даниловым, Кузнецовым.

Захаров и Конопельченко разрабатывали теорию сильных и слабых рекурсионных операторов и показали, что уравнение Кадомцева-Петвиашвили не имеет регулярного рекурсионного оператора.

Датэ и др. изучали группы преобразований для солитонных уравнений (Кадомцева-Петвиашвили, Кортвега-де Вриса, Буссинеска).

### Преобразования Беклунда

Взаимосвязь преобразований Беклунда и метода обратной задачи исследовалась Ньюэллом, Датэ и др. изучали бесконечномерное преобразование Кортвега - де Вриса.

Свойства преобразований Беклунда исследовались также в работах Конопельченко и Дубровского.

Все полностью интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения допускают неабелеву пролонгацию. Додд и Форди показали, что уравнения класса

$$u_t + u_{xxx} + \varphi(u, u_x) = 0$$

допускают неабелеву пролонгационную структуру, когда функция  $\varphi$  является полиномом по  $u_x$ .

Шедвик, исследуя пролонгационную алгебру  $KdV$ , показал, что ассоциированные неабелевы алгебры Ли уравнения  $KdV$  бесконечномерны.

Пролонгационный анализ цилиндрического уравнения  $KdV$  провели Лео и др. Они же исследовали неабелевы пролонгации.

Гамильтонову структуру нелинейных эволюционных уравнений изучали Олвер, Лебедев, Чудновские, Конопельченко, Мохначев, Виласи.<sup>127/</sup>

Новая иерархия связанных уравнений  $KdV$  рассматривалась Леви и др.

Мэлфлайет предложил простой метод решения уравнения  $KdV$ . Абдель-Рахман слегка модифицировал этот метод для получения многосолитонных решений других нелинейных уравнений с дисперсией (модифицированное уравнение  $KdV$ ,  $RLW$  - уравнение, уравнение Буссинеска, модифицированное уравнение Буссинеска).

$\checkmark$  - солитонные решения различных нелинейных уравнений были получены также в работах Таджири.

Кауп исследовал трехволновое резонансное взаимодействие.

Асимптотические методы в теории нелинейных волн рассматривались в книге Джеффри и Кавахары.

Связь между обыкновенными дифференциальными уравнениями типа Пенлеве и полностью интегрируемыми нелинейными эволюционными уравнениями в частных производных исследовалась в работах Абловица и др.

В заключение хочу выразить искреннюю признательность профессору В.Г.Маханькову за предложение подготовить этот обзор и за многочисленные ценные советы.

### Литература

- I. В.Г.Маханьков, Ю.П.Рыбаков, В.И.Санжук. Модель Скирма и сильные взаимодействия (к 30-летию создания модели Скирма). Успехи физических наук, 1992, т.162, вып.2, с.1-61. Прекрасный обзор по применению солитоники в физике адронов.
2. В.В.Смирнов, Л.И.Маневич. Распространение эзотермических реакций в конденсированных средах. Химическая физика, 1992, т.II, вып.9, с.1269-1274.
3. Э.Коркоран. Оптические линии связи с меньшими потерями. В мире науки, 1992, № 6, с.81.  
О солитонных экспериментах Л.Молленауэра.
4. В.С.Львов. Нелинейные спиновые волны. М.: Наука, 1987, 270 с.
5. В.И.Сериков, О.А.Воронина. С.В.Воронин. Уединенные температурные волны, обусловленные солитоном поля, сопряженного параметру порядка. Физика твердого тела, 1992, т.34, вып.3, с.697-699.  
Работа выполнена в Липецком политехническом институте.
6. В.В.Киселев. Солитоны и трехволновой резонанс на фоне модулированной магнитной структуры антиферромагнетиков. Физика твердого тела, 1992, т.34, вып.3, с.769-778.
7. Р.Додд, Дж.Эйлбек, Дж.Гиббон, Х.Моррис. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. Пер. с англ. М.:Мир, 1988.
8. Ф.Калоджеро. Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Киев: Наукова думка, 1990.
9. Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев. Введение в нелинейную физику. М.:Наука, 1988, 368 с.
10. Т.А.Иванова, А.Д.Попов. Солитонные уравнения и автодуальные калибровочные поля. ОИЯИ, Е2-92-149, Дубна, 1992.
11. Д.А.Светогорски, В.К.Федянин. Теоретическое рассмотрение рассеяния нейтронов на солитонах в молекулярных цепочках. ОИЯИ, Р17-84-356, Дубна, 1984.
12. П.Бхатнагар.Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983.
13. Релятивистская ядерная физика и квантовая хромодинамика. XI Международный семинар по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1992, Е1,2-92-371, 118 с.
14. А.Т.Филиппов. Многоликий солитон. М.: Наука, 1986, 221 с.

15. Нелинейные электромагнитные волны. Под редакцией П.Усленги. М.:Мир, 1983, 312 с.
16. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981, 598 с.
17. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.:Мир, 1987, 480 с.
18. Фушич В.И., Штеленъ В.М., Серов Е.И.. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. К: Наукова думка, 1989, 335 с.
19. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. – 326 с ИЛЛ.
20. Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. М.: Мир, 1985. –472 с. ИЛЛ.
21. Давыдов А.С. Солитоны в квазиодномерных молекулярных структурах. УФН, 1982, т.138, с.603.
22. Золотовицкий А.В., Калашников В.И. Дисперсия и затухание голдстоуновской моды в многокомпонентной системе. ТМФ, 1981, т.49, с.273.
23. Ауслендер М.И. и др. Дисперсия и затухание акустических маггнонов в многокомпонентном коллинеарном магнетике при низких температурах. ТМФ, 1982, т.51, с.111.
24. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.
25. Петвиашвили В.И. Письма в ЖЭТФ, 1980, т.32, с.632.
26. Крат В.А., Касинский В.В. В кн.: Наука и человечество. М.: Знание, 1983, с.218.
27. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. – 528 с.
28. Жидков П.Е., Сакбаев В.Ж. Об одном нелинейном обыкновенном дифференциальном уравнении. ОИЯИ, Р5-92-306, Дубна, 1992.-10 с.
29. Горнаков В.С., Никитенко В.И., Грудников И.А. Нелинейная динамика монополярной доменной границы. Письма в ЖЭТФ, 1992, т.55, вып.1, с.44-47.
30. Данилов А.В. Быстрые магнитозвуковые волны конечной амплитуды в разреженной плазме. ЖЭТФ, 1992, т.101, вып.1, с.89-98.
31. Бразовский С.А., Матвеев С.И. Пространственно-временные распределения солитонов и дислокаций в волнах зарядовой плотности. ЖЭТФ, 1992, т.102, вып.1, с.146-162.

32. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория // УМН, 1989, т.44, вып.6, с.29-98.
33. Локшин А.А., Сагомоян Е.А. Нелинейные волны в механике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1989.
34. Лезнов А.Н., Савельев М.В. Суперсимметричные нелинейные волновые уравнения и классические супералгебры Ли. ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.3.
35. Дианов Е.М., Карасик А.Я., Мамышев П.В. и др. Письма в ЖЭТФ, 1985, т.41, с.242. Солитоны в волоконной оптике.
36. Захаров В.Е. Основы физики плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1984.
37. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983.
38. Хасилев В.Я. Взаимодействие и расщепление оптических солитонов. Письма в ЖТФ, 1992, т.18, вып.3, с.83-86.
39. Сахнович А.П. Нелинейное уравнение Шредингера на полуоси и связанная с ним обратная задача. УМЖ, 1990, т.42, вып.3, с.356-363.
40. Грузинов А.В. Контурная динамика уравнения Хасегавы-Мима. Письма в ЖЭТФ, 1992, т.55, вып.1, с.75-78.
41. Ермаков В.Н., Кручинин С.П., Понежа Е.А. Субструктура сверхпроводящих щелей в бисолитонной теории ВТСП. ИТФ-91-68Е, Киев, 1991.
42. Давыдов А.С. Время жизни молекулярных (давыдовских) солитонов. ИТФ-90-77Е, Киев, 1990.
43. Брижик Л.С. Динамика движения бисолитонов в системе параллельных цепочек с электрон-фононным взаимодействием. ИТФ-90-68Е, 1990.
44. Позняк Э.Г., Попов А.Г. Уравнение синус-Гордона: геометрия и физика. М.: Знание, 1991. - 48 с.
45. Проблема<sup>61</sup> квантовой теории поля. Труды IX Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Дубна: ОИЯИ, Д2-90-461, 1990. - 330 с.
46. Окунь Л.Б. Физика элементарных частиц. М.: Наука, 1988. - 272 с.
47. Жидков Е.П., Кирчев К.П. Устойчивость решений вида уединенных волн некоторых нелинейных уравнений математической физики. ЭЧАЯ, 1985, т.16, № 3, с.597.
48. Мельников В.К. Метод обратной задачи в теории нелинейных эволюционных уравнений. ЭЧАЯ, 1980, т.11, вып.5, с.1224-1272.
49. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. - М.: Наука, 1980. Прекрасная монография.

50. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. - М.:Наука, 1984.- 240 с.
51. С.Лима Монтенегро, В.Г.Маханьков. Нестационарные солитоны в модели И<sup>u</sup>дмори. Визуализация результатов. ОИЯИ, Р4-92-415, Дубна, 1992. - 10 с.
52. Наумкин П.И., Шишмарев И.А. Обобщенные решения для уравнения Узизема. Диф. уравнения, 1992, т.28, вып.1, с.121-126.  
Работа выполнена в МГУ. Библиография - 25 названий.
53. Михалаке Д. и др. Нелинейные направляемые волны в планарных структурах // ЭЧАЯ, 1992, т.23, вып.1, с.122-173.
54. Пискунов А.С. Некоторое 3+1 -мерное уравнение, допускающее представление Лакса. Изв. АН СССР, сер.матем. 1992, т.56, вып.1, с.229-238.
55. Докторов Е.В., Прокопеня И.Н. Распространение и излучение солитона в резонансном нелинейном световоде. ЖЭТФ, 1991, т.100, вып.4, с.1129-1139.
56. Митропольский И.А., Шуваев А.Г. Солитонные решения, описывающие распространение заряженных частиц в системе с самоиндукцией. ЖТФ, 1991, т.61, вып.10, с.1-7.
57. Булушев А.Г., Дианов Е.М., Охотников О.Г., Серкин В.Н. Эффект комбинационного самопреобразования спектра фемтосекундных оптических солитонов и его подавление в световодах и солитонных лазерах. Письма в ЖЭТФ, 1991, т.54, вып.11, с.615-618.
58. Взаимодействие экситонов с лазерным излучением /Отв.ред.С.А.Москаленко. - Кишинев: Штиинца, 1991, - 173 с. Нелинейные поверхностные волны.
59. Труды Всесоюзной конференции "Нелинейные явления" /Отв. ред. К.В.Фролов. - М.: Наука, 1991. - 214 с.
60. Мельников В.К. Рождение и уничтожение солитонов в нелинейных интегрируемых системах. ОИЯИ, Р2-91-473, Дубна, 1991. - 22 с.
61. Маланюк Т.М. Об одном классе точных решений уравнения Кадомцева-Петвиашвили. УМН, 1991, т.46, вып.3, с.193-194.
62. Лавкин А.Г. Исследование диссоциации бризера синус-Гордона во внешнем поле. ЯФ, 1991, т.54, вып.5, с.1290-1297.
63. Николаева Р.М., Николаев В.А., Ткачев О.Г. Форма легких ядер в модели солитонов кирального поля. Изв. АН СССР, сер.физ., 1991, т.55, вып.11, с.2236-2242.



64. Давыдов А.С. Нелинейная модель сверхпроводимости оксидных керамик. ИТФ-91-24Е, Киев, 1991.
65. Абдуллаев Ф.Х. Динамический хаос солитонов. Ташкент: ФАН, 1990. - 167 с.
66. Наугольных К.А., Островский Л.А. Нелинейные волновые процессы в акустике. - М.: Наука, 1990. - 237 с.
67. Бурмистров С.Н., Дубовский Л.Б. Диаманитный солитон на двойниковой границе. Письма в ЖЭТФ, 1990, т.51, вып.6, с.310-314.
68. Кобушкин А.П., Чепилко Н.М. Солитонная модель элементарного электрического заряда. ТМФ, 1990, т.82, вып.3, с.349-359.
69. Фаминский А.В. О задаче Коши для уравнения КП. УМН, 1990, т.45, вып.1, с.193-194.
70. Мохов О.И. О гамильтоновой структуре эволюции по пространственной переменной для уравнения К-дФ. УМН, 1990, т.45, вып.1, с.181-182.
71. Нелинейные волны. Динамика и эволюция. М.: Наука, 1989. - 398 с.
72. Котляров В.П. Асимптотические солитоны уравнения сайн-Гордон. ТМФ, 1989, т.80, вып.1, с.15-28.
73. Жидков П.Е. Об инвариантных мерах для некоторых бесконечномерных динамических систем. ОИЯИ, Е5-92-395, Дубна, 1992. 14 с.
74. Абдуллоев Х.О. Теоретическое исследование и математическое моделирование нелинейных явлений в магнитных системах. ОИЯИ, 17-92-433, Дубна, 1992. - 23 с.
75. Косевич А.М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. Киев: Наукова думка, 1989. - 304 с.
76. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980. - 408 с.
77. Руденко О.В., Хохлов Р.В. и физика нелинейных волн. Наука в СССР, 1988, вып.2, с.34-38.
78. Филиппов А.Т. Нетривиальные решения нелинейных задач теории поля. ЭЧАЯ, 1980, т.11, вып.3, с.735-801.
79. Вильгельмссон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М.: Энергоиздат, 1981. - 224 с.
80. Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981. - 239 с.
81. Коноплева Н.П., Попов В.Н. Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1980. - 240 с.
82. Солитоны в действии. Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. М.: Мир, 1981. - 312 с.
83. Солитоны. М.: Мир, 1983. - 408 с.