ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б1-5-83-665

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 1983

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

В.М. Лебеденко

О ПОДАЛГЕБРАХ КОМПЛЕКСНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

г. Дубна, 1983 год.

I.

Ниже приводится описание всех комплексных подалгебр комплексной алгебры Ли группы Лоренца, которую мы будем обозначать через L. Оно получено путем несложных рассуждений, основанных на соображениях размерности и простоты.

Результаты даются в пункте 2 в виде таблиц, а их обоснование - в пункте 3. В разделе 4 указаны неабелевы двумерные подалгебры комплексной алгебры Ли группы $SO(3)$. Они фигурируют в предлагаемом описании. В пункте 5 указываются все тройки из той же алгебры типа: a, b, c, --
$[a,b]=c$, $[b,c]=a$, $[c,a]=b$.
Известно, что алгебра L разлагается в прямую сумму

$$L = L_1 \oplus L_2$$

двух идеалов L_1 и L_2, изоморфных комплексной алгебре Ли группы $SO(3)$. Будем использовать базисы L_1 и L_2 - x_k, y_k, z_k, соответственно, с коммутационными соотношениями

$$[x_k, y_k] = z_k, \quad [y_k, z_k] = x_k, \quad [z_k, x_k] = y_k \quad (k=1,2).$$

2. <u>Сводка результатов</u>

Подалгебры алгебры L размерностей n, $2 \le n \le 5$, исчерпываются <u>всевозможными</u> алгебрами одного из видов, указанных в следующих таблицах:

<u>Двумерные подалгебры L</u>

Номер типа	ВИД	Ограничения
2,I	Алгебра с базисом a_1, a_2	$a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$
2,2	A_1 или A_2	A_k - двумерная неабелева подалгебра из L_k $(k=1,2)$
2,3	Алгебра с базисом a, b	$a_k \neq 0 \neq b_k$, $k=1,2$
2,4	$[a, b] = a$, где $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $a_k, b_k \in L_k$,	$a_1 = 0$, $b_1 \neq 0$; $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$
2,5	$([a_k, b_k] = a_k)$ $k=1,2$	$a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$; $a_2 = 0$, $b_2 \neq 0$

Трехмерные подалгебры L

Номер типа	Вид	Ограничения
3,1	L_1 или L_2	–
3,2	алгебра с базисом x, y, z где $[x,y]=z$, $[y,z]=x$, $[z,x]=y$	$x = x'+x''$, $y=y'+y''$, $z=z'+z''$, $0 \neq x', y', z' \in L_1$, $0 \neq x'', y'', z'' \in L_2$ ($[x',y']=z'$, $[y',z']=x'$, $[z',x']=y'$, $[x'',y'']=z''$, $[y'',z'']=x''$, $[z'',x'']=y''$) *
3,3	$A_1 \oplus B_2$ или $B_1 \oplus A_2$	где A_k – двумерная неабелева паралгебра из L_k, B_k – одномерная подалгебра из L_k $(k=1,2)$
3,4	Алгебра с базисом a_1, a_2, b; $b = b_1 + b_2$, $a_k \in L_k$, $b_k \in L_k$	$a_k, b_k \neq 0$, $k=1,2$, $[a_1, b_1] = a_1$, $[a_2, b_2] = \alpha a_2$, $0 \neq \alpha \in C$

*) См. раздел 5

Четырехмерные подалгебры L

Номер типа	Вид	Ограничения
4,I	$L_1 \oplus B_2$ или $B_1 \oplus L_2$	B_k – одномерные подалгебры из L_k, $k=1,2$
4,2	$A_1 \oplus A_2$	A_k – двумерные неабелевы подалгебры из L_k $(k=1,2)$

<u>Пятимерные подалгебры из L</u>

Номер типа	ВИД	Ограничения
5,I	$L_1 \oplus A_2$ или $A_1 \oplus L_2$	A_k – двумерные неабелевы подалгебры из L_k .

3. Обоснования результатов

Описание одномерных подалгебр очевидно. Рассмотрим подалгебры размерности 2. Все они разрешимы. Прежде всего остановимся на абелевых двумерных подалгебрах L .

3.I. Алгебры L_1 и L_2 не содержат двумерных абелевых подалгебр

Это вытекает из свойств произведения в L_k , которое ведет себя как векторное произведение. Действительно, покажем, например, что L_1 не содержит таких подалгебр. Пусть

$a = kx_1 + ly_1 + mz_1$, $b = k'x_1 + l'y_1 + m'z_1$ – элементы L_1 и $[a, b] = 0$. Так как $[x_1, y_1] = z_1$, $[y_1, z_1] = x_1$, $[z_1, x_1] = y_1$ то

$$0 = [a, b] = \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} k & m \\ k' & m' \end{vmatrix} y_1 + \begin{vmatrix} k & l \\ k' & l' \end{vmatrix} z_1 .$$

Отсюда видно, что a и b линейно зависимы.

3.2. Двумерные абелевы подалгебры L

В алгебре $L = L_1 \oplus L_2$ содержатся всевозможные двумерные абелевы подалгебры вида 2.I (см. таблицы) , т.е. алгебры с базисами вида a_1, a_2 , где $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$, $a_1 \neq 0 \neq a_2$. Покажем, что других алгебр такого типа в L нет. Пусть A – абелева двумерная подалгебра $L = L_1 \oplus L_2$. Из утверждения п. 3.I вытекает, что $\dim(A \cap L_k) < 2$, $k = 1, 2$.Из того же утверждения вытекает, что $\dim(A \cap L_k) \neq 0, k=1,2$. , например, при $A \cap L_1 = 0$, фактор-алгебра $\underset{L_2}{\underset{\cong}{L/L_1}} \supset (A+L_1)/L_1 \cong A$. Итак, остается случай

$$\dim(A \cap L_1) = \dim(A \cap L_2) = 1 \text{ .}$$

уже рассмотренный выше.

3.3. Двумерные неабелевы подалгебры L

Такие алгебры можно задавать коммутационными соотношениями типа $[a, b] = a$. Все такие подалгебры комплексной алгебры Ли группы $SO(3)$ будут описаны в пункте 4. Их достаточно много. Произвольные подалгебры L типов 2,2 - 2,5, указанные в таблице, являются подалгебрами рассматриваемого вида из L . Покажем, что других подалгебр подобного вида L не содержит. Пусть A -- двумерная неабелева подалгебра из L . Если $A \subset L_1$ или $A \subset L_2$, то это алгебра типа 2.2. Если A не содержится ни в L_1 , ни в L_2 , то A имеет базис a, b ,

$$[a, b] = a \text{ ,}$$

$$a = a_1 + a_2 \text{ , } b = b_1 + b_2 \text{ , } a_k, b_k \in L_k \text{ и}$$

$$[a_k, b_k] = a_k \text{ , } k = 1,2 \text{ .}$$

Тут возможны три случая:

1) $a_k \neq 0 \neq b_k$,

2) $a_1 = 0, b_1 \neq 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$,

3) $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0, a_2 = 0, b_2 \neq 0$.

Поэтому мы получаем алгебры оставшихся типов 2.3 - 2.5

3.4. Трехмерные подалгебры L

Всевозможными трехмерными подалгебрами типов, указанных в таблице, исчерпываются такие подалгебры L. В этом мы убедимся ниже. Из соображений размерности вытекает, что такие подалгебры должны быть или простыми или разрешимыми. Опишем сначала простые подалгебры.

3.5. Простые трехмерные подалгебры L

В таблице указаны такие подалгебры. Это алгебры типа 3.I и 3.2. Они изоморфны комплексной алгебре Ли группы $SO(3)$ Покажем, что других простых трехмерных подалгебр в L нет. Пусть A - простая трехмерная подалгебра в $L = L_1 \oplus L_2$. Так как L_1 и L_2 идеалы в L, то из простоты A вытекает, что

$$A \cap L_k = \begin{cases} 0 \\ L_k \end{cases}, \quad k = 1, 2 .$$

Одна возможность нам дает, что

$$A = \begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} .$$

Остается случай, когда $A \cap L_k = 0, k=1,2$. Следовательно $A \cong (A + L_1)/L_1 \cong L_2$ - изоморфна комплексной алгебре Ли группы $SO(3)$.

Тогда у алгебры A есть базис x, y, z $(x, y, z \neq 0)$ $[x, y] = z$, $[y, z] = x$, $[z, x] = y$,

$$x = x' + x'', \quad y = y' + y'', \quad z = z' + z'',$$

$$x', y', z' \in L_1, \quad x'', y'', z'' \in L_2 .$$

В силу наших предположений

$x', y', z' \neq 0$, $x'', y'', z'' \neq 0$, так как

$[x', y'] = z'$, $[y', z'] = x'$, $[z', x'] = y'$,

$[x'', y''] = z''$, $[y'', z''] = x''$, $[z'', x''] = y''$

Мы получили, что A --алгебра типа 3.2.

Тройки x' , y' , z' ; x'' , y'' , z'' являются базисами L_1 и L_2 , соответственно. Таких троек достаточно много. Например, в L_1 всякий базис, состоящий из элементов с действительными коэффициентами относительно x_1 , y_1 , z_1 можно рассматривать как тройку действительных векторов. Если эта тройка ортонормирована, в обычном смысле, и левая, то указанный базис удовлетворяет нашим требованиям. Описание всех таких троек дается в пункте 5.

3.6. Разрешимые трехмерные подалгебры L

Все подалгебры типов 3,3 и 3.4 приведенные в таблице являются разрешимыми. Покажем, что других подалгебр этого вида в L нет. Пусть A –трехмерная разрешимая подалгебра $L = L_1 \oplus L_2$. Тогда, в силу простоты L_1 и L_2 , $\dim(A \cap L_k) = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$. Если

$$\dim(A \cap L_1) = 2 \quad , \quad \dim(A \cap L_2) = 1$$

или

$$\dim(A \cap L_1) = 1 \quad , \quad \dim(A \cap L_2) = 2 \quad ,$$

то мы приходим к алгебрам типа 3.3 (см. таблицу). Остается случай, когда

$$\dim(A \cap L_1) = 1 = \dim(A \cap L_2) .$$

Пусть $A\cap L_1 \ni a_1 \neq 0$, $A \cap L_2 \ni a_2 \neq 0$. тогда в A существует такой элемент $b = b_1 + b_2$, $b_1 \in L_1, b_2 \in L_2$, $\cancel{a_1, b_2}$ a_1, a_2, b – базис A. В силу предположений $b_1 \neq 0 \neq b_2$, так как $A\cap L_1$, $A\cap L_2$ – идеалы в A, то

$$[a_1, b] = [a_1, b_1] = k a_1, \quad k \in C,$$

$$[a_2, b] = [a_2, b_2] = l a_2, \quad l \in C$$

и $k, l \neq 0$, так как L_1 и L_2 не содержит двумерных абелевых подалгебр (см. п. 3.I). Без ограничения общности можно считать, что

$$[a_1, b_1] = a_1, \quad [a_2, b_2] = \alpha a_2, \quad 0 \neq \alpha \in C.$$

Мы получили, что A – алгебра типа 3,4 (см. таблицу).

3.7. Четырехмерные подалгебры L

Из соображений размерности вытекает, что такие подалгебры или разрешимы или не разрешимы и не полупросты. Покажем, что все четырехмерные подалгебры L исчерпываются всевозможными алгебрами видов, приведенных в таблице.

3.8. Неполупростые и неразрешимые четырехмерные подалгебры L

Пусть A – такая алгебра. Из соображений размерности и простоты вытекает, что ее радикал одномерен. Поэтому A имеет ненулевое пересечение с каждым из идеалов L_1 и L_2.

Если $A\cap L_1=L_1$, то $A\cap L_2=B_2$, $\dim B_2=1$ и $A=L_1\oplus B_2$. Аналогичное получится, если $A\cap L_2=L_2$. Т.е. мы получаем, что A – алгебра вида 4.I (см. таблицу). Далее $\dim(A\cap L_k)\neq 2$, $k=1,2$ иначе бы A содержала двумерный разрешимый идеал $A\cap L_k$. Случай $\dim(A\cap L_1)=\dim(A\cap L_2)=1$ не возможен, поскольку тогда $A\cap L_1\oplus A\cap L_2$ – двумерный абелев идеал A. Отсюда видно, что алгебра A может иметь только вид 4.I.

3.9. Разрешимые четырехмерные подалгебры L

Покажем, что всевозможными подалгебрами вида 4.2, приведенными в таблице исчерпываются все такие подалгебры.

Пусть A – четырехмерная разрешимая подалгебра $L=L_1\oplus L_2$. Тогда из соображений размерности вытекает, что $A\cap L_1\neq 0\neq A\cap L_2$, так как A –разрешима, то

$$\dim(A\cap L_k)\neq \begin{cases}1\\3\end{cases}$$

Отсюда вытекает, что

$$A=A\cap L_1\oplus A\cap L_2$$

где $A\cap L_k$ – неабелевы двумерные подалгебры L_k, $k=1,2$. (см. п. 3.I), т.е. A -

3.I0. Пятимерные подалгебры L

Покажем, что пятимерные подалгебры L исчерпываются всеми алгебрами вида 5.I из таблицы.

Из соображений размерности и простоты вытекает, ято такие подалгебры не могут быть разрешимыми и полупростыми. Пусть A – пятимерная подалгебра L. Тогда по тем же соображениям

$$\dim(A\cap L_k)=\begin{cases}2\\3\end{cases},\ k=1,2$$

Очевидно, что возможны только два случая:

$\dim(A\cap L_1)=3$, $\dim(A\cap L_2)=2$, $A\cap L_2$ – неабелева двумерная подалгебра L_2.

$\dim(A\cap L_1)=2$, $\dim(A\cap L_2)=3$, $A\cap L_1$ – неабелева двумерная подалгебра L_1.

(см. п. 3.I). Мы приходим к уже описанным подалгебрам.

4. Описание двумерных неабелевых комплексных подалгебр комплексной алгебры Ли группы $SO(3)$

Пусть x, y, z – базис комплексной алгебры Ли группы $SO(3)$,

$$[x,y]=z,\ [y,z]=x,\ [z,x]=y.$$

Для требуемого описания, очевидно, достаточно описать все пары a, b; $a,b\neq 0$,

$$[a,b]=a \tag{$*$}$$

содержащиеся в ней.

Из свойств обычного векторного произведения вытекает, что не существует таких пар с действительными коэффициентами относительно x, y, z.

Будем искать такие пары в виде

$$\mathfrak{A} = kx + ly + mz \quad ,$$
$$\mathfrak{B} = k'x + l'y + m'z$$

Условия (ж) можно записать в виде системы уравнений относительно k', l', m' :

$$\begin{cases} \qquad -ml' + lm' = k \\ -mk' \qquad + km' = -l \\ -lk' + kl' \qquad = m \end{cases}$$

она имеет требуемое решение
тогда и только тогда, когда $k^2+l^2+m^2=0$. $|k|+|l|+|m|\neq 0$
Приведем следующее описание этих пар: при $m\neq 0$ это все пары вида

$$\mathfrak{A} = kx + ly + mz \quad (k^2+l^2+m^2=0, \; |k|+|l|+|m|\neq 0),$$
$$\mathfrak{B} = k'x + l'y + m'z \quad ,$$

При $k\neq 0$

$$k' = t \;, \quad l' = \frac{m+lt}{k} \;, \quad m' = \frac{-l+mt}{k} \;, \quad t\in C \;,$$

при $l\neq 0$

$$k' = \frac{-m+kt}{l} \;, \quad l' = t \;, \quad m' = \frac{k+mt}{l} \;, \quad t\in C \;,$$

при $m \neq 0$

$$k' = \frac{l + kt}{m}, \quad l' = \frac{-k + lt}{m}, \quad m' = t, \quad t \in C.$$

5. Описание троек вида a, b, c, $[a,b] = c$, $[b,c] = a$, $[c,a] = b$

Пусть в комплексной алгебре Ли группы $SO(3)$ дан базис x, y, z, $[x,y] = z$, $[y,z] = x$, $[z,x] = y$. Тройки a, b, c с $[a,b] = c$ $(a, b, c \neq 0)$ $a = kx + ly + mz$, $b = k'x + l'y + m'z$ $(k, l, m, k', l', m' \in C)$ с соотношениями

$$[b,c] = a, \quad [c,a] = b$$

исчерпываются такими, у которых

$$k^2 + l^2 + m^2 = 1 = k'^2 + l'^2 + m'^2,$$
$$kk' + ll' + mm' = 0$$

Здесь доказательство можно провести так же, как и для векторного произведения в действительном евклидовом пространстве E_3. Наметим только некоторые его детали. Пусть

$$\ell^2 + m^2 = 1 = k'^2 + \ell'^2 + m'^2,$$
$$kk' + \ell\ell' + mm' = 0$$

гда $[b, c] = a$. Действительнс ,

$$c = [a, b] = \begin{vmatrix} \ell & m \\ \ell' & m' \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} k & m \\ k' & m' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} k & \ell \\ k' & \ell' \end{vmatrix} z,$$

$$c] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ k' & \ell' & m' \\ \begin{vmatrix} \ell & m \\ \ell' & m' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} k & m \\ k' & m' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & \ell \\ k' & \ell' \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

ссмотрим, например, первую компоненту. Она равна

$$\begin{vmatrix} k & \ell \\ k' & \ell' \end{vmatrix} + m' \begin{vmatrix} k & m \\ k' & m' \end{vmatrix} = \ell'(k\ell' - \ell k') + m'(km' - k'm) =$$
$$(\ell'^2 + m'^2) - k'(\ell\ell' + mm') = k(1 - k'^2) - k'(-kk') = k.$$

алогично можно рассмотреть и остальные компоненты и показать, о $[c, a] = b$.

другой стороны, пусть

$$a, b] = c, \quad [b, c] = a, \quad [c, a] = b$$

и $k^2+l^2+m^2=\alpha$, $k'^2+l'^2+m'^2=\beta$,

$$kk'+ll'+mm'=\gamma.$$

Так как $a,b,c\neq 0$ и

$[a,b]=c$, $[b,c]=a$, $[c,a]=b$

то, в силу простоты рассматриваемой алгебры a,b,c – ее базис. Следовательно элементы a и b линейно независимы. как и ранее, из условия $[b,c]=a$, получаем, что

$$k(\beta-k'^2)-k'(\gamma-kk')=k$$
$$l(\beta-l'^2)-l'(\gamma-ll')=l$$
$$m(\beta-m'^2)-m'(\gamma-mm')=m$$

то есть

$$(\beta-1)k-\gamma k'=0$$
$$(\beta-1)l-\gamma l'=0$$
$$(\beta-1)m-\gamma m'=0$$

В силу линейной независимости a и b : $\beta=1$, $\gamma=0$

Аналогично доказывается, что и $\alpha=0$.

Литература:

I. Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, И.Т. Тодоров.
Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля.
Издательство "Наука", Москва, I969.

2. Н. Джекобсон. Алгебры Ли, Издательство "Мир", Москва, I964.