ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б1-5-83-214

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 1983

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

В.М. Лебеденко

О СУПЕРАЛГЕБРАХ ЛИ, ПОРОЖДАЕМЫХ ОДНИМ ЭЛЕМЕНТОМ

Рукопись поступила
в издательский отдел
04.04.83г.

г. Дубна, 1983 год.

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Постановка вопроса и краткая сводка результатов

Будем рассматривать супералгебры Ли над произвольными полями характеристики 0 (в частности, над полями R и C) или любой ненулевой характеристики отличной от 2 и 3

В отличие от алгебр Ли неодномерные супералгебры Ли могут обладать одним образующим элементом. Примером может служить всякая супералгебра Ли с соотношениями типа:

$$[b,b]=a \quad , [a,b]=0$$

(Здесь образующим элементом является элемент b).

Приведем ее двумерную реализацию в линейной алгебре $l(1,1)$:

$$b=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$[b,b]=2bb=2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=a$$ (по определению

В разделе 3 указаны все линейные реализации этой алгебры. Там же показано, что этими и одномерными алгебрами исчерпываются все супералгебры Ли с одним однородным образующим элементом.

Возникает вопрос: может ли супералгебра Ли размерности больше двух порождаться одним неоднородным элементом?

Оказывается, что да. Пока мы не обладаем описанием всех таких алгебр, но располагаем примерами таких алгебр размерности 4 и 8 . Их описание приведено в разделе 4 .(Примеры таких алгебр больших размерностей даются в дополнениях).

Три приведенные там четырехмерные алгебры изоморфны но реализации их в $\ell(2,1)$ и $\ell(2,2)$ различны. Там же показано, что 8-мерная линейная алгебра в $\ell(2,1)$ обладает одним неоднородным образующим элементом. Приводится серия многомерных реализаций этой алгебры в $\ell(n,1)$ $(n\geqslant 2)$. Далее мы приводим еще одну 8-мерную подалгебру из $\ell(2,2)$.

Не все супералгебры Ли обладают одним образующим элементом. Например, такая простая алгебра, как $\ell(1,1)$ не обладает таким элементом (см. раздел 5.I). Никакая трехмерная супералгебра Ли не обладает одним образующим элементом. (см. раздел 5.2). В разделе 5 приводится ряд классов супералгебр Ли, которые заведомо не обладают одной образующей. В частности, более, чем двумерные супералгебры Ли с одномерной или абелевой четной частью не обладают системой образующих, состоящей из одного элемента. Эти и многие другие случаи объединяет условие

$$[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] \subseteq Z(G_{\bar 0})$$

, $Z(G_{\bar 0})$- центр $G_{\bar 0}$, при выполнении, которого супералгебра Ли $G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}$ не обладает образующим элементом (например, при $[G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] = 0$). Алгебры с одномерной нечетной частью обладают тем же свойством.

Обладание образующим элементом, естественно, наследуется при факторизации. Поэтому всякое расширение супералгебры Ли с помощью супералгебры не имеющей образующего элемента само не обладает элементом такого рода (см. раздел 5.3).

С другой стороны, прямая сумма супералгебр, рассмотренного выше, типа с соотношением

$$[b, b] = a \quad , [a, b] = 0$$

не обладает одним образующим элементом (см. раздел 5.3). На стр. 38 приводится пример бесконечномерной супералгебры без образующего элемента.

Мы не обладаем примерами супералгебр Ли с одним образующим достаточно больших размерностей. При отказе от лиевости получается ряд простых примеров (см. раздел 6): существуют супералгебры произвольно больших размерностей с одним образующим. Любая супералгебра (в частности, супералгебра Ли) изоморфно вкладывается в супералгебру с одним образующим. Недостатком этих примеров с точки зрения нашей темы является то, что фигурирующие там супералгебры не являются супералгебрами Ли.

Отметим, что основной трудностью построения примеров супералгебр с одним образующим элементом является то, что подалгебра, порожденная одним элементом может оказаться неградуированной.

2. Обозначения и основные соотношения

Будем рассматривать алгебры над полями нулевой характеристики (в частности, над R и C) или над полями ненулевой характеристики, отличной от 2 и 3).

Будем считать, что в каждой из рассматриваемых супералгебр введена единая билинейная операция $[\ ,\ ]$.
Алгебру G будем называть супералгеброй, если она представима в виде прямой суммы своих подпространств $G_{\bar 0}$ и $G_{\bar 1}$ (четной и нечетной части, соответственно):

$$G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}$$

(элементы, принадлежащие $G_{\bar 0}$ или $G_{\bar 1}$ называют четными или нечетными, соответственно. Все такие элементы называют однородными).

Причем

$$[G_\alpha, G_\beta] \subseteq G_{\alpha+\beta}$$ для любых $\alpha, \beta \in Z_2$

Здесь $\alpha, \beta \in Z_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ – кольцо вычетов по модулю 2 $(Z_2 = Z/2Z)$. Супералгебра $G = G_{\bar{0}} \oplus G_{\bar{1}}$ называется супералгеброй Ли, если для любых ее однородных элементов a, b, c выполняются тождества:

$$[a, b] = -(-1)^{\alpha\beta}[b, a] \tag{I}$$

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\alpha\beta}[b, [a, c]] \tag{2}$$

,

где $a \in G_\alpha$, $b \in G_\beta$

(обобщенное тождество Якоби)
(условимся считать, что $(-1)^{\bar{0}} = 1$, $(-1)^{\bar{1}} = -1$).

Важным классом супералгебр Ли являются линейные алгебры типа $\ell(m, n)$ $(m, n \geqslant 1)$, состоящие из всех $(m+n) \times (m+n)$ матриц. Тут четными элементами являются все матрицы вида

$$\begin{array}{c|c} & \overbrace{\qquad}^{m} \; \overbrace{\qquad}^{n} \\ m\{ & \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right) \}n \end{array}$$

а нечетными все матрицы вида

$$\begin{array}{c|c} & \overbrace{\qquad}^{m} \; \overbrace{\qquad}^{n} \\ m\{ & \left(\begin{array}{c|c} 0 & \gamma \\ \hline \delta & 0 \end{array}\right) \}n \end{array}$$

В алгебрах $l(m,n)$ вводится билинейная операция ,
которая для однородных элементов удовлетворяет условиям:

$[a,b]=ab-ba$, если a или b – четный элемент

$[a,b]=ab+ba$, если a и b – нечетны

в частности

$[b,b]=2bb$ (так как характеристика основного поля не равна 2, то этот элемент не обязан равняться нулю)

Подпространство, натянутсе на множество A будем обозначать через $\{A\}$. Подалгебру, порожденную элементом g будем обозначать через $\{g\}^{x}$.

Именно о таких алгебрах пойдет речь ниже.
Тут возникает ряд трудностей. Например, не всякая подалгебра A супералгебры $G=G_{\bar{0}}\oplus G_{\bar{1}}$ градуирована, т.е. представима в виде

$$A=(A\cap G_{\bar{0}})\oplus(A\cap G_{\bar{1}})$$

, обычно рассматривают такие подалгебры супералгебр Ли.

Пусть супералгебра Ли

$$G=G_{\bar{0}}\oplus G_{\bar{1}}\ni g=a+b$$

$$a\in G_{\bar{0}}\quad,\quad b\in G_{\bar{1}}$$

Тогда $\underline{[g,g]=[b,b]}\in G_{\bar{0}}$. Действительно,

$$[g,g]=[a+b,a+b]=[a,a]+([a,b]+[b,a])+[b,b]$$

но

$[a,a]=0$, $[a,b]=-[b,a]$ в силу соотношения (I)

Далее заметим, что для любого элемента $b \in G_{\bar{1}}$

$$[b,[b,b]] = [[b,b],b] = 0 \qquad (4)$$

в силу соотношений (I) и (2).

Действительно, применяя соотношения (I) и (2) получаем, что

$$[b,[b,b]] = [[b,b],b] - [b,[b,b]] = -2[b,[b,b]]$$

то есть $3[b,[b,b]] = 0$

и, следовательно, $[b,[b,b]] = 0$

(так как характеристика основного поля не равна 3). Аналогично доказывается второе равенство.

Поэтому в дальнейшем мы будем писать, например, что при $g = a + b$ $(a \in G_{\bar{0}},\ b \in G_{\bar{1}})$,

$$[g,[g,g]] = [a,[b,b]]$$

Отметим еще, что центр алгебры A будем обозначать через $Z(A)$.

3. Алгебры с одним однородным образующим элементом и их линейные реализации

Одномерными супералгебрами и супералгебрами типа $A = \{a\} \oplus \{b\}$ с соотношениями

$[b,b] = a$, $[a,b] = 0$ $(A = \{b\}^{\times})$

исчерпываются все ненулевые супералгебры Ли с одним однородным образующим элементом.

Действительно, пусть супералгебра Ли

$G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1} \ni b$ – однородный элемент и

$G = \{b\}^\times$

Если $[b,b]=0$, то $G = \{b\}^\times = \langle b \rangle$, $\dim G = 1$,

Пусть $[b,b] = a \neq 0$, тогда элемент b нечетен, элемент a – четен.

Элементы

$$[b,[b,b]] = [[b,b],b] = [[b,b],[b,b]] = 0$$

(см. (4)) и далее, очевидно, что и произвольные произведения такого рода равны нулю. Итак, $\{b\}^\times = \{a,b\} \cong A$.
Утверждение доказано.

Отметим, что алгебры типа A обладают и неоднородными образующими:

$$A = \{a+b\}^\times \quad \left([a+b, a+b] = [b,b] = a\right)$$

Приведем еще одну реализацию алгебр A в алгебрах f(2.I) :

$$b = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\left([b,b] = 2bb = 2\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right)$$

Легко описать вообще все линейные реализации этих алгебр: для произвольной алгебры $\ell(m,n)$ всякий нечетный элемент b с $[b,b] = a \neq 0$ порождает требуемую алгебру. Аналогично можно поступить с произвольной супералгеброй Ли.

4. Примеры супералгебр Ли размерностей 4 и 8 с одним неоднородным образующим элементом

4.1. Подалгебра в $\ell(2,1)$

Пусть

$$a = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \in \ell(2,1), \quad b = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \in \ell(2,1)$$

и $g = a + b = \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Тогда (см. п.2)

$$[g,g]=[b,b]=2bb=2\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}=a_1$$

(по определению).

$$[g,[g,g]]=[a+b,[b,b]]=[a,a_1]=$$

$$=\left[\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right]=-\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=-2a$$

То есть $\langle g \rangle^{\times}$ содержит элемент a, следовательно, и b ($a=k[g,[g,g]]$, $b=g-k[g,[g,g]]$, где k некоторый элемент основного поля, - для полей R и C $k=\frac{1}{2}$)

Далее из этих элементов получаем элемент

$$[a,b] = \left[\begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&-1&0 \end{pmatrix} = b_1$$

(по определению) .

Итак, подалгебра $\{g\}^{x}$ содержит 4 линейно-независимых элемента

$$a = \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 2&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&-1&0 \end{pmatrix}$$

Вычисления показывают, что это базис $\{g\}^{x}$. Выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered} [a,a_1] = -2a, \quad [b,b] = a_1, \quad [b_1,b_1] = 0, \\ [a,b] = b_1, \quad [a,b_1] = 0, \quad [a_1,b] = 0, \\ [a_1,b_1] = 2b_1, \quad [b,b_1] = -a . \end{gathered} \tag{5}$$

Приведем недостающие выкладки

$$[b_1, b_1] = 2b_1 \cdot b_1 = 2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix} = 0,$$

$$[a, b_1] = \left[\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\right] = 0,$$

$$a_1, b] = \left[\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix} = 0,$$

$$b, b_1] = bb_1 + b_1b = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = -a,$$

$$a_1, b_1] = \left[\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-2&0\end{pmatrix} = 2b_1.$$

Таким образом, получена четырехмерная супералгебра Ли с одним образующим элементом g .

Эта алгебра 3 – разрешима:

Пусть $\{g\}^{x} = G$, тогда из соотношений (5) получаем, что

$$G'^{(1)} = [G, G'] = \{a, a_1, b_1\}$$

$$G'^{(2)} = [G'^{(1)}, G'^{(1)}] = \{a, b_1\} \neq 0$$

$$G'^{(3)} = [G'^{(2)}, G'^{(2)}] = \{[a, b_1]\} = 0$$

В то же время алгебра G не является нильпотентной:

$$G'_{(1)} = G'^{(1)} = [G, G] = \{a, a_1, b_1\}$$

$$G'_{(2)} = [G, G_{(1)}] = \{a, b_1\} \neq 0$$

$$G'_{(3)} = [G, G_{(2)}] = G_{(2)} = G_{(4)} = \ldots = G_{(n)} = \ldots$$

С другими реализациями этой алгебры мы еще встретимся позже (см. п. 4.2 и 4.3).

4.2. Подалгебра в $\ell(2,2)$

Эта алгебра изоморфна предыдущей и реализация ее очень похожа на предыдущую. Поэтому о ней мы будем говорить кратко. Пусть g $\ell(2,2)$

$$a=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad g=a+b=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

Тогда аналогично предыдущему

$$[g,g]=[b,b]=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}=a_1$$ (по определению)

$$[g,[g,g]]=[a,a_1]=-2a$$

$$[a,b]=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=b_1$$ (по определению)

Элементы a, a_1, b, b_1 линейно независимы и удовлетворяют соотношениям (5). Т.е. полученная алгебра изоморфна предыдущей,

4.3. Еще одна подалгебра в $\ell(2,2)$

Эта алгебра изоморфна алгебре, построенной в разделе 4.I, но по виду ее матрицы отличаются от предыдущих , Пусть в $l(2,2)$

$$a=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad g=a+b=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Тогда $[g,g]=[b,b]=2\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=a_1$$

(по определению) ,

$$[g,[g,g]]=[a,a_1]=\left[\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right]=$$

$$=-\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=-2a$$

Отсюда видно, что $a,b\in\langle g\rangle^{\times}$, $a_1=[b,b]\in\langle g\rangle^{\times}$.

Далее

$$[a,b]=\left[\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right]=$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = b_1$$

(по определению)

Элементы

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

линейно независимы и удовлетворяют соотношениям (5) Поэтому полученная алгебра dgl^x изоморфна двум предыдущим.

Для контроля приведем недостающие выкладки

$$[b_1, b_1] = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$[a, b_1] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$[a_1, b_1] = \left[\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 2&2&0&0\\ 0&0&2&2\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ -2&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = 2b_1$$

$$[a_1, b] = [[b, a], b] = 0 \quad (\text{см. п. } 2)$$

$$[a, b_1] = \left[\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}\right] = 0 \; ,$$

$$[b, b_1] = b b_1 + b_1 b = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&1&1\\ 1&1&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&1&1\\ 1&1&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = -a \; .$$

4.4. Восьмимерная подалгебра в $l(2,1)$, порожденная одним элементом, и ее многомерные реализации

Пусть в алгебре $l(2,1)$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g = a + b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда подалгебра $\{g\}^{x}$, порожденная элементом g имеет базис:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(независимость этих элементов обсуждается ниже при рассмотрении многомерных реализаций, рассматриваемой алгебры).

Действительно,

$$[g,g]=[b,b]=2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=2a_1,$$

$$[g,[g,g]]=[a+b,2a_1]=2[a,a_1]=$$

$$=2\left[\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]=2\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)=$$

$$=2\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=2a_2$$

$$[[g,g],[g,[g,g]]]=[2a_1,2a_2]=4[a_1,a_2]=$$

$$=4\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]=-4\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=-4a.$$

Отсюда видно, что $a, b \in \alpha\beta\zeta^{\times}$.

Из элементов a, b, a_1, a_2 получаются все остальные из приведенных выше:

$$[a, b] = b_1, \quad [a, a_2] = 2a_3, \quad [a_2, b] = b_2,$$

$$[a, b_2] = b_3$$

Все полученные элементы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[a, a_1] = a_2, \quad [a, a_2] = 2a_3, \quad [a, a_3] = 2a_2,$$

$$[a_1, a_2] = -a, \quad [a_1, a_3] = 0, \quad [a_2, a_3] = 2a,$$

$$[b, b] = 2a_1, \quad [b_1, b_1] = 2a_3 - 2a_1, \qquad (*)$$

$$[b_2, b_2] = 2a_1 - 2a_3, \quad [b_3, b_3] = 2a_1,$$

$$[b, b_1] = a_2, \quad [b, b_2] = a, \quad [b, b_3] = 0,$$

$$[b_1, b_2] = 0, \quad [b_1, b_3] = -a, \quad [b_2, b_3] = -a_2,$$

$$[a, b] = b_1, \quad [a_1, b] = 0, \quad [a_2, b] = b_2$$

$$[a, b_1] = b, \quad [a_1, b_1] = -b_2, \quad [a_2, b_1] = -b_3$$

$$[a, b_2] = b_3, \quad [a_1, b_2] = -b_1, \quad [a_2, b_2] = -b$$

$$[a, b_3] = b_2, \quad [a_1, b_3] = 0, \quad [a_2, b_3] = b_1$$

$$[a_3, b] = b_3, \quad [a_3, b_1] = -b_2, \quad [a_3, b_2] = -b_1,$$

$$[a_3, b_3] = b$$

Из этой таблицы видно, что полученная алгебра не является разрешимой, так как она совпадает со своим коммутантом.

Полученная алгебра допускает изоморфные реализации в алгебрах $\ell(n,1)$ $(n \geqslant 2)$. При записи элементов $\ell(n,1)$ будем пользоваться сокращениями – пропускать нули, а на характерные места ставить единицы или -I. Так, например, запись

$$\left(\begin{array}{cc|c} & 1 & \\ 1 & & \\ \hline & & \end{array}\right)$$

сзначает матрицу $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{array}\right)$,

а $\left(\begin{array}{cc|c} & & \\ & & 1 \\ \hline & 1 & \end{array}\right)$ – матрицу $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ из $\ell(n,1)$

Пусть в алгебре $\ell(n,1)$

$$a = \left(\begin{array}{ccc|c} & & 1 & \\ 1 & & & \\ \hline & & & \end{array}\right), \quad b = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & 1 \\ \hline & & 1 & \end{array}\right),$$

$$g = a + b = \left(\begin{array}{ccc|c} & & 1 & \\ 1 & & & 1 \\ \hline & & 1 & \end{array}\right)$$

Тогда, как и в случае $\ell(2,1)$, подалгебра, порожденная элементом g – восьмимерна и имеет базис:

$$a = \left(\begin{array}{ccc|c} & & 1 & \\ 1 & & & \\ \hline & & & \end{array}\right), \quad a_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right),$$

$$a_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} & & 1 & \\ -1 & & & \\ \hline & & & \end{array}\right), \quad a_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & \end{array}\right),$$

$$b = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & 1 \\ \hline & & 1 & \end{array}\right), \quad b_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & & & \\ \hline -1 & & & \end{array}\right),$$

$$b_2 = \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & \end{array}\right), \quad b_3 = \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline -1 & \end{array}\right)$$

Подтвердим линейную независимость приведенных элементов. Первые четыре элемента независимы от последних четырех. Группа a, a_2 независима от группы a_1, a_3. Пара a, a_2 – независимы, пара a_1, a_3 тоже.

Далее

$$\{b, b_3\} \ni \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline -1 & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline & \end{array}\right),$$

$$\{b_1, b_2\} \ni \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline 1 & \end{array}\right)$$

То, что элемент

$$f = \left(\begin{array}{cc|c} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ \hline & 1 & \end{array}\right)$$

порождает все эти элементы показывается точно так же, как и в случае $f(2,1)$. Аналогично показывается, что элементы $a, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3$ удовлетворяют соотношениям ж .

4.5. Восьмимерная подалгебра в $\ell(2,2)$, порожденная одним элементом

Пусть в $\ell(2,2)$

$$a = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0&0&1&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \end{pmatrix}, \quad g = a+b = \begin{pmatrix} 0&0&1&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

Тогда элемент g порождает восьмимерную подалгебру в $\ell(2,2)$ со следующим базисом:

$$a = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} -1&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1&2&0&0 \\ -1&-1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 0&0&1&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0&0&1&1 \\ 0&0&-1&-1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix},$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Линейную независимость этих элементов мы подтвердим позднее, см. стр. 29)

Действительно,

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = [b, b] = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2a_1,$$

$$\mathfrak{g},[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]] = [a, 2a_1] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2a_2 \quad ,$$

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],[\mathfrak{g},[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]]] = [2a_1, 2a_2] = 4[a_1, a_2] =$$

$$4\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = 4\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4a_3 ,$$

$$[g,[g,[\rho,g]]] =$$

$$= [a+b, 2a_2] = 2[a, a_2] +$$

$$+ 2[b, a_2] = -4a + 2b_1,$$

поскольку

$$[a, a_2] = \left[\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1&0&0&0\\ 1&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ -2&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = -2a,$$

$$[b, a_2] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = b_1 \quad ,$$

и, наконец,

$$\left[[g, [f, f]] , [f, [f, [f, f]]] \right] =$$

$$= [2a_2 \, , -4a + 2b_1] = -8[a_2, a] +$$

$$+ 4[a_2, b_1] = -16a - 4b \quad ,$$

так как $[a_2, a] = 2a$,

$$[a_2, b_1] = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = -b .$$

Поскольку $\{a+b, 16a+4b\} \ni a, b$, то в подалгебре $\{g\}^x$ содержатся элементы a и b . Кроме того в ней содержатся и элементы

$$a_1 \in \{[b, b]\}, \quad a_2 = [a, a_1],$$

$$b_1 = [b, a_2], \quad a_3 = [a_1, a_2] .$$

Далее получаем еще элементы $\{g\}^x$:

$$b_2 = [a, b] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = [a_3, b] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь показано, что все 8 элементов , указанных выше, содержатся в $\{g\}^x$.

Покажем, что они линейно независимы. Группы (a, a_1, a_2, a_3) , (b, b_1, b_2, b_3) линейно независимы. Элемент

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

линейно не зависит от элементов

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$a_2 + a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 - a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то элементы a_1 , a_2 , a_3 линейно независимы, как и элементы

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&2&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \in \{a, a_2, a_3\}$$

Пусть $e_1 = \begin{pmatrix} 0&0&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$,

$e_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}$

Тогда $b = e_1 + e_3 + e_4$, $b_2 = e_2 - e_3$

$b_1 = e_1 - e_2 + e_4$, $b_3 = e_1 - e_2 - e_4$

Определитель, составленный из коэффициентов при e_i элементов b , b_1 , b_2 , b_3 равен

$$\left|\begin{matrix} 1&0&1&1\\ 1&-1&0&1\\ 0&1&-1&0\\ 1&-1&0&-1 \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} 1&0&0&0\\ 1&-1&-1&0\\ 0&1&-1&0\\ 0&-1&-1&-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1&-1&0\\ 1&-1&0\\ -1&-1&-2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2&0\\ 0&2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Отсюда видно, что элементы b, b_1, b_2, b_3 линейно независимы.

Элементы a, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3, порожденные $\dot{\gamma}$ действительно являются базисом подалгебры $\mathcal{L}\gamma\zeta^{x}$, поскольку они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[a,a_1]=a_2, \qquad [a_1,a_2]=a_3,$$
$$[a,a_2]=-2a, \qquad [a_1,a_3]=a_2,$$
$$[a,a_3]=2a_2, \qquad [a_1,b]=0,$$
$$[a,b]=b_2, \qquad [a_1,b_1]=-b_3,$$
$$[a,b_1]=b_2, \qquad [a_1,b_2]=b_1, \qquad (**)$$
$$[a,b_2]=0, \qquad [a_1,b_3]=-b_1,$$
$$[a,b_3]=b-b_1, \qquad [a_2,a_3]=-2a_3-2a,$$
$$[a_3,b]=b_3$$
$$[a_2,b]=-b_1, \qquad [a_3,b_1]=-b_2-b_3,$$
$$[a_2,b_1]=-b, \qquad [a_3,b_2]=b+b_1,$$
$$[a_2,b_2]=b_2, \qquad [a_3,b_3]=-b,$$
$$[a_2,b_3]=-b_2-b_3$$

$$[b, b_1] = a_3, \quad [b, b_2] = a_2, \quad [b, b_3] = -a_2,$$

$$[b_1, b_2] = a_2, \quad [b_1, b_3] = 0,$$

$$[b_2, b_3] = 2a - 2a_1 + a_3,$$

$$[b, b] = 2a_1, \quad [b_1, b_1] = 2a + 2a_3 - 2a_1,$$

$$[b_2, b_2] = -2a, \quad [b_3, b_3] = 2a_1 - 2a_3 - 2a.$$

Из приведенной таблицы $(**)$ видно, что построенная 8-мерная супералгебра Ли, как и предыдущая подалгебра из $l(2,1)$, не разрешима.

5. Об алгебрах заведомо не имеющих одного образующего элемента

(В этом разделе будем рассматривать супералгебры размерности больше 2).

5.I. Алгебры с условием $[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] \subseteq Z(G_{\bar 0})$

Это условие возникает, например, для алгебр с $[G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] = 0$ Действительно, пусть $[G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] = 0$, $a \in G_{\bar 0}$, $b_1, b_2 \in G_{\bar 1}$ Тогда из тождества Якоби вытекает, что

$$[a, [b_1, b_2]] = [[a, b_1], b_2] + [b_1, [a, b_2]] = 0$$

(т.е. $[b_1, b_2] \in Z(G_{\bar 0})$). так как

$$[a, b_1], [a, b_2] \in [G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] = 0$$

Супералгебры Ли с условием $[G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] = 0$ легко поддаются описанию (см., например, работу Деп. ОИЯИ. БI-5-80-686) - - Это все супералгебры вида $G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}$,в которых

$G_{\bar 0}$ - алгебра Ли, $[G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] = 0$, для любых $b_1, b_2 \in G_{\bar 1}$ $[b_1, b_2] \in Z(G_{\bar 0})$. Покажем, что супералгебры Ли, удовлетворяющие условию $[G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] \subseteq Z(G_{\bar 0})$ не обладают системами образующих состоящих из одного элемента. Однородными образующими они не обладают, как следует из рассмотрений раздела 3. Предположим, что такая алгебра

$$G = G_{\bar 0} + G_{\bar 1} = \mathcal{L}\{\xi\}^{\times},$$

где

$$g = a + b, \quad a \in G_{\bar 0}, \quad b \in G_{\bar 1}.$$

Но тогда

$$[g,g] = [b,b] \in Z(G_{\bar 0}) \quad \text{и}$$

$$[g,[g,g]] = [a,[b,b]] = 0 = [[g,g],g] = [[b,b],a].$$

Далее, с помощью индукции по количеству пар скобок, можно легко показать, что все остальные произведения, скомбинированные из элемента g – нули. То есть $\{g, [g,g]\} = \{g\}^{x}$, но $\dim G > 2$. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

Отсюда вытекает, что всякая более чем двумерная супералгебра Ли, удовлетворяющая одному из условий

1) $[G_{\bar 0}, G_{\bar 0}] = 0$ ($G_{\bar 0}$ – абелева алгебра Ли)
2) $[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] = 0$
3) $[G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] = 0$

не порождается одним элементом.

Отметим еще как следствие, что супералгебра $l(1,1)$ (четная часть ее – абелева) и супералгебры с одномерной четной частей не обладают системами образующих, состоящими из одного элемента. В качестве примера алгебра последнего типа можно привести алгебры Гейзенберга, т.е. алгебры типа

$$G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}, \quad \text{где} \quad G_{\bar 0} = \{e\}$$

$$G_{\bar 1} = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}, \quad n \geq 1,$$

$$[a_i, b_i] = e = [b_i, a_i]$$

(остальные произведения - нули)

5.2. Алгебры с одномерной нечетной частью

Пример такой алгебры:

$$G = G_{\bar 0} + G_{\bar 1}, \quad [G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] = 0$$

$$G_{\bar 0} = \{a, b, c\}, \quad G_{\bar 1} = \{d\}, \quad [a, b] = c$$

$[d, d] = c$ (остальные произведения - нули)

Никакая супералгебра (боле, чем двумерная с одномерной нечетной частью не обладает порождающим элементом

Действительно, пусть $G = G_{\bar 0} + G_{\bar 1}$

$\dim G > 2$, $\dim G_{\bar 1} = 1$, $G_{\bar 1} = \{b\}$ и

$g = a + kb$, $a \in G_{\bar 0}$. (Пусть ещё $[kb, kb] = a_1$, $[a, b] = lb$) Тогда $[g, g] =$
$= [kb, kb] = a_1$ и

$$[g, [g, g]] = [a, [kb, kb]] = [a, a_1] =$$

$$= [[a, kb], kb] + [kb, [a, kb]] = 2k^2 l a_1 \text{ — кратно } a_1$$

Аналогично и $[[\rho, g], \rho]$ кратно a_1 .
Покажем, с помощью индукции, что и всевозможные произведения, составленные из элемента g кратны a_1 .

Предположим, что уже все также произведения, в которых меньше $2n$ скобок $(n \geq 3)$ кратны a_1 . Рассмотрим произведение, содержащее $2n$ скобок, типа $[x, y]$. Если x и y произведения рассмотренного типа, то $[x, y] = 0$. Если только одно из них равно g , например $x = g$, то

$$[x, y] = [g, ma_1] = [a + b, ma_1] = m[a, a_1] -$$

- опять кратно a_1 ,как уже было показано выше.
Утверждение доказано.

Из последнего утверждения и рассуждений раздела 5.I вытекает, что
трехмерные супералгебры не обладают системами образующих состояниями из одноно элемента, поскольку всякая трехмерная алгебра $G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}$ должна удовлетворять одному из условий:

или $\dim(G_{\bar 0}) = 1$

или $\dim(G_{\bar 1}) = 1$

5.3. Расширения с помощью супералгебр не обладающих одним образующим элементом

Всякая фактор-алгебра супералгебры с одним образующим элементом должна обладать элементом такого типа:

если $G=\{g\}^\times \supset A$ (идеал G) и $\bar{g}$ – образ g в G/A, то

$$G/A=\{\bar g\}^\times$$

Отсюда видно, что, если супералгебра Ли имеет фактор-алгебру не обладающую порождающим элементом, то и сама она не обладает таким элементом. В частности это относится к супералгебрам, разлагаемым в прямую сумму супералгебры Ли и супералгебры Ли, не обладающей порождающим элементам. В качестве последних можно взять, например, алгебры из разделов 5.I. и 5.2. Так как $G/[G,G]$ – абелева алгебра, то супералгебра Ли G может обладать одним порождающим элементом, если

$$\dim[G,G]+1 \geqslant \dim G$$

Аналогичное утверждение справедливо и для так называемого квазипроизводного идеала

$$J=[G_{\bar 1},G_{\bar 1}]+G_{\bar 1}$$

(Здесь G/J – алгебра Ли) Например, если G минимальное спинорное расширение алгебры Пуанкаре, то G/J изоморфна алгебре Ли группы Лоренца. Поэтому G не обладает одной образующей (но может быть обладает двумя; известно, что обладает тремя).

Заметим. что прямая сумма двух супералгебр, обладающих порождающим элементом может и не обладать таким элементом. В качестве примера рассмотрим прямую сумма двух алгебр уже рассмотренного типа (см. п. 3)

$$G=\{a,b\}\oplus\{a_1,b_1\}$$

$$[b,b] = a \quad , \quad [b_1, b_1] = a_1$$

Пусть $g = ka + k_1 a_1 + lb + l_1 b_1$, тогда

$$[g,g] = l^2[b,b] + l_1^2[b_1,b_1] = l^2 a + l_1^2 a_1$$

а остальные произведения, составленные из g – нули. Получается, что $\dim \mathfrak{g}^{x} \leq 2$, но $\dim G = 4$. Аналогично и прямые суммы таких алгебр с бо́льшим количеством слагаемых не обладают порождающими элементами.

6. Ряд косвенных примеров

(Супералгебры с одним образующим элементом, рассматриваемые ниже не являются супералгебрами Ли)

Пример I. Для любых m и n $(m, n \geq 1, \ n \geq m)$ существует следующая супералгебра G с одним образующим элементом,

$$G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}$$, где $G_{\bar 0} = \{a_1, \ldots, a_m\}$

$G_{\bar 1} = \{b_1, \ldots, b_n\}$, со следующими соотношениями

$$[a_i, a_j] = a_i - a_j \quad , \quad [b_i, b_i] = \begin{cases} a_i \ , & 1 \leq i \leq m \\ 0 \ , & i > m \end{cases}$$

(если такие номера есть)

$$[b_i, a_1] = [a_1, b_i] = \begin{cases} b_{i+1} \ , & i < n \\ 0 \ , & i = 1 \end{cases}$$

(остальные произведения – нули).

Пусть $\rho = b_1$, тогда $[\rho, \rho] = a_1$,

$$[[\rho, \rho], \rho] = b_2, \ldots, [[\rho; \rho], b_{n-1}] = b_n$$

$$[b_2, b_2] = a_2, \ldots, [b_m, b_m] = a_m,$$

то есть $G = \langle \rho \rangle^{*}$.

Пример 2. Пусть дана супералгебра Ли

$$A = A_{\bar 0} \oplus A_{\bar 1}, \quad A_{\bar 0} = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle, \quad A_{\bar 1} = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$$

Определим супералгебру $G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}$ так:

$$G_{\bar 0} = A_0, \quad G_{\bar 1} = \langle A_{\bar 1}, c_1, \ldots, c_{m+n} \rangle$$

сохраняя операцию в A положим, что

$$[c_i, c_i] = a_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$[a_1, c_i] = \begin{cases} c_{i+1}, & i < m+n \\ 0, & i = m+n \end{cases}$$

$$[a_m, c_i] = b_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

(остальные произведения - нули).

Пусть $\rho = c_1$, тогда $[\rho, \rho] = a_1$,

$$[[\rho, \rho], \rho] = c_2, \ldots, [[\rho, \rho], \ldots] = c_{m+n}.$$

далее получаем элементы

$$a_i = [c_i, c_i], \quad i = 2, \dots, m \quad \text{и}$$

$$b_i = [a_m, c_i], \quad i = 1, \dots, n$$

Получаем, что супералгебра Ли A вкладывается в супералгебры $G = \langle f \rangle^{\times}$, причем $A_0 = G_{\bar 0}$, $A_1 \subset G_{\bar 1}$

Пример 3. (он немного выходит за рамки наших рассмотрений) Бесконечномерные супералгебры с одним образующим элементом.

Пусть

$$G_{\bar 0} = \langle a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$$

$$G_{\bar 1} = \langle b_1, \dots, b_n, \dots \rangle$$

$$G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}, \quad [a_i, a_j] = a_i - a_j, \quad [b_i, b_i] = a_i$$

$(i = 1, 2, \dots)$, $[a_1, b_i] = b_{i+1}$ (остальные произведения – нули)

Пусть $f = b_1$.

Тогда аналогично предыдущему получается, что $G = \langle f \rangle^{\times}$.

Пример 4. Пример бесконечномерной супералгебры Ли с двумя образующими (a и b_1)

$$G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}, \text{ где } G_{\bar 0} = \langle a \rangle, \quad [a, a] = 0$$

$$G_{\bar 1} = \langle b_1, \dots, b_n, \dots \rangle, \quad [a, b_i] = -[b_i, a] = b_{i+1},$$

$[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] = 0$ (из последнего условия вытекает, что G не имеет одного образующего)

Остальные произведения - нули.

Проверка выполнения тождества Якоби для троек базиса без оно, очевидно, выполняется, так как

Для тройки a, b_i, b_j

$$[a,[b_i,b_j]]=0 \quad , \quad [[a,b_i],b_j]=0 \quad , \quad [b_i,[a,b_j]] = [b_i, b_{j+1}] = 0$$

Для тройки a, a, b_i

$$[a[a,b_i]] = [a, b_{i+1}] = b_{i+2}, \quad [[a,a], b_i] = 0, \quad [a,[a,b_i]] = b_{i+2}$$

Пример 5. Бесконечномерное обобщение супералгебры Гейзенберга - супералгебра Ли без одного образующего

$$G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1} \quad , \quad G_{\bar 0} = \{e\}$$

$$G_{\bar 1} = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, b_1, b_2, \dots, b_i, \dots\},$$

$$[e,e]=0 \quad , \quad [G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] = [G_{\bar 1}, G_{\bar 0}] = 0$$

$$[b_i, a_i] = [a_i, b_i] = e \qquad i = 1, 2, \dots$$

, остальные произведения - нули

Дополнения

I) В каждой супералгебре Ли содержится подалгебра с одним образующим элементом (см. раздел 3). Однако не всякая подалгебра супералгебры Ли с одной образующей должна обладать одной образующей. Достаточно рассмотреть четную часть $G_{\bar 0}$ некоторой супералгебры Ли $G = \langle p \rangle^{x}$. $(\dim G_{\bar 0} > 1)$ Менее тривиальной пример дает четырехмерная алгебра G из раздела 4.I, обладающая одной образующей. Ее подалгебра $G^{(1)}$ имеет одномерную нечетную часть и поэтому не имеет образующего элемента.

Однако, прямое слагаемое супералгебры $G = \langle p \rangle^{x}$ должно обладать образующим элементом:

при $G = A \oplus B$, $p = a + b$, $a \in A$, $b \in B$ $([A, B] = 0)$

, очевидно, что $A = \langle a \rangle^{x}$

2) Свойство быть супералгеброй Ли с одной образующей очевидно сохраняется при факторизации.

3) Однако, как показано в примере из раздела 5.3, прямая сумма двух супералгебр с одной образующей может не иметь образующего элемента. То есть это свойство может не сохраняться при расширениях.

Но прямая сумма двух супералгебр с одним образующим может порождаться одним элементом. Действительно. Рассмотрим прямую сумму

$G \oplus G'$, где G 8-мерная подалгебра из $l(2,1)$ с одним образующим элементом (см. п. 4.4) $g = a + b$, а $G' = \{b'\}^{\times}, [b',b'] = a'$ -двумерная супералгебра Ли. Тогда $g' = a + b + b' = g + b'$ – образующий элемент этой 10 мерной алгебры, так как

$$[g', g'] = a' + 2a_1$$

$$[g', [g', g']] = [g + b', a' + 2a_1] =$$

$$= [b', a'] + [g, a' + 2a_1] = 2a_2 ,$$

т.е. $a_2 \in \{g'\}^{\times}$,

$$[[g', g'], [g', [g', g']]] = [a' + 2a_1, 2a_2] =$$

$$= [a', 2a_2] + [2a_1, 2a_2] = -4a$$

т.е. $a \in \{g'\}^{\times}$, далее $[a, g'] = [a, b] =$

$= b_1 \in \{g'\}^{\times}$,

тогда и $[a_2, b_1] = -b_3$, $[a, b_3] = b_2$, $[a_2, b_2] = -b$

принадлежат $\{g'\}^{\times}$

т.е. g и b' принадлежат $\{g'\}^{\times}$

Мы получили I0-мерную супералгебру. Рассмотрев прямую сумму

$$G \oplus \lambda e_4$$

той же 8-мерной алгебры $G \left([G, G] = G \right)$, или какой либо другой супералгебры G с $[G, G] = G$, с одномерной алгеброй λe_4 получаем еще ряд примэров. Если $G = \lambda y_4^{x}$, то $G \oplus \lambda e_4 = \lambda y + e_4^{x}$, так как

$$[G \oplus \lambda e_4, G \oplus \lambda e_4] = [G, G] = G$$

В частности, мы получаем 9 -мерную алгебру с одной образующей.

4) Разрешимая супералгебра Ли с I – образующей не разлагается в прямую сумму. Прямая сумма двух разрешимых супералгебр Ли не может иметь образующего элемента. В противном случае эти алгебры имели бы в качестве фактор-алгебры абелеву алгебру размерности не менее двух.

5. Никакая линейная супералгебра Ли над полем характеристики 2 не может обладать одним образующим элементом. Действительно, если $y = a + b$ (a – четный элемент, b – нечетный элемент) элемент такой алгебры, то

$$[y, y] = [b, b] = 2(bb) = 0$$

(здесь $b \cdot b$ – **матричное** произведение).

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность В.Г. Кадышевскому за инициирование этой работы, Ю.А. Бахтурину и Я.А. Смородинскому за внимание к работе и ценные советы.

Литература:

I. V.G. Kac. Lie Superralgebras. Advanses in Mathematics 26, 8-96 (I977).

2. В.М. Лебеденко. Алгебры суперсимметрий с заданной четной частью. Депонированная публикация ОИЯИ, Деп БI-5-80-686.