ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б1-5-80-686

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 1980

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

В.И. Лебеденко

АЛГЕБРЫ СУПЕРСИММЕТРИЙ С ЗАДАННОЙ ЧЕТНОЙ ЧАСТЬЮ

Дубна, 1980

I. Введение

Настоящая работа может быть полезной физикам-теоретикам, исследования которых связаны с теорией суперсимметрий. В ней часто возникает вопрос о том, какими расширениями обладает та или иная алгебра Ли (см. /I-6/). Так, например, в работе Б.Г.Конопельченко/3/ исследуются расширения алгебры Пуанкаре и дается описание всех ее спинорных расширений коразмерности 2.

Ниже, в разделе 3 приводится формулировка задачи о линейных расширениях и показывается, как ее можно свести к задаче о произвольных расширениях алгебр Ли. Последняя задача рассматривалась в работе Р.П.Зайкова и Н.Т.Петрова/6/. В ней выводятся уравнения для структурных констант супералгебры Ли с заданной четной частью и получаются решения таких уравнений при специальных ограничениях. Мы рассмотрим эту задачу несколько иначе, ~~и~~ не накладывая указанных ограничений. Нетривиальные расширения мы разделим на три типа (см. п. 2) и приведем некоторые свойства расширений каждого типа. В частности, будут указаны расширения минимальных размерностей для отдельных видов алгебр Ли.

2. Обозначения и терминология

Расширением алгебры Ли L будем называть супералгебру Ли (см./I-2/)

$$G = G_{\bar{0}} \oplus G_{\bar{1}},$$

где $G_{\bar{0}}$ – четная, а $G_{\bar{1}}$ – нечетная часть G, причем $G_{\bar{0}} \cong L$. Ниже билинейную операцию, заданную в абстрактной супералгебре Ли G, будем обозначать скобками: $[\ ,\ ]$.

Основные соотношения и тождества для таких супералгебр будем использовать в виде:

$$[G_\alpha, G_\beta] \subseteq G_{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in Z_2 \qquad (I)$$

$$[a, b] = -(-1)^{\alpha\beta}[b, a], \qquad (2)$$

где $a \in G_\alpha$, $b \in G_\beta$,

$$[a,[b,c]] = [[a,b],c] + (-1)^{\alpha\beta}[b,[a,c]] \qquad (3)$$

где $a \in G_\alpha$, $b \in G_\beta$ (тождество Якоби).

Условимся считать здесь, что

$$(-1)^{\bar 0} = 1, \quad (-1)^{\bar 1} = -1$$

Через $\{A\}$ будем обозначать линейное подпространство алгебры G, натянутое на подмножество $A \subseteq G (A \neq \emptyset)$. В частности, $\{a\}$ – одномерное подпространство. Для обозначения прямой суммы будем пользоваться знаком „$\oplus$".

Все утверждения, приводимые ниже, справедливы для алгебр над полями R и C. Однако легко заметить, что большинство из них справедливы и для алгебр над другими полями.

Всякая алгебра Ли L имеет тривиальное расширение

$$G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1} \quad \text{с} \quad [G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] = 0 = [G_{\bar 1}, G_{\bar 1}]$$

с любой размерностью $G_{\bar 1}$. Будем разделять нетривиальные расширения алгебр Ли на три типа, соответственно характеризуемых условиями:

1) $[G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] \neq 0, \ [G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] = 0$

2) $[G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] = 0, \ [G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] \neq 0$

3) $[G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] \neq 0, \ [G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] \neq 0$

3. О линейных расширениях

Упомянутая выше задача состоит в следующем. Фиксируем некоторую алгебру Ли $S \neq 0$ и рассмотрим пары (L, T), где L - линейная алгебра Ли, изоморфная S, действующая в некотором линейном пространстве, $0 \neq T$ - линейная оболочка некоторого конечного множества линейных операторов, действующих в том же пространстве. Причем

$$[L, T] \subseteq T, \quad 0 \neq \{T, T\} \subseteq L$$

Вопрос состоит в том, каковы эти пары, в частности, какова минимальная размерность T *). Для некоторых алгебр Ли он рассматривался ранее (см. [3-5]). Так, например, в работе Б.Г.Конопельченко[3] показано, что для алгебры Пуанкаре указанная размерность, для случая спинорных расширений равна 2. Там же найдены все спинорные расширения этой алгебры коразмерности 2. Можно рассмотреть эту задачу для произвольных алгебр Ли, не накладывая специальных ограничений на L и T. Она сводится к абстрактной задаче исследования супералгебр с фиксированной четной частью. Действительно, в силу теоремы Адо, каждая конечномерная (комплексная) супералгебра Ли имеет точное линейное представление (см.[2]). Поэтому, в частности, минимум размерности линейных расширений данной алгебры Ли S совпадает с минимумом размерности

*) Эту задачу нам любезно предложил Е.А.Иванов.

абстрактных супералгебр Ли, четная часть которых изоморфна S.
В силу сказанного, далее можно иметь дело только с абстрактными супералгебрами Ли, теперь мы перейдем к исследованию различных типов расширений, указанных в разделе 2.

4. Соотношения для элементов расширений типа I) и 3)

Расширения типов I) и 3) объединяет соотношение

$$[G_{\bar{0}}, G_{\bar{1}}] \neq 0$$

Пусть $G = G_{\bar{0}} \oplus G_{\bar{1}}$ - некоторая супералгебра Ли, удовлетворяющая этому соотношению и $[e_1, \ldots, e_n]$ - базис $G_{\bar{1}}$ $(n \geq 1)$. Очевидно, что действие $G_{\bar{0}}$ на $G_{\bar{1}}$ однозначно определяется линейными формами $\lambda_{ij}(x)$ на $G_{\bar{0}}$, $1 \leq i, j \leq n$, где

$$[x, e_i] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(x) e_j = -[e_i, x] \tag{4}$$

В силу тождеств (2) и (3) получаем, что все эти формы для любых элементов $b, c \in G_{\bar{0}}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\lambda_{ik}([b, c]) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(c) \lambda_{jk}(b) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(b) \lambda_{jk}(c) \tag{5}$$

(для доказательства достаточно в тождестве (3) заменить a на e_i). В частности, при $n = 1$ получаем соотношения

$$\lambda([b, c]) = \lambda_{11}([b, c]) \equiv 0 \tag{5'}$$

Убедимся в справедливости обратного. Пусть $\lambda_{ik}(x)$ какие-то линейные формы на некоторой алгебре Ли L, удовлетворяющие соотношениям (5). Построим супералгебру

$$G = G_{\bar{0}} \oplus G_{\bar{1}}$$

так, что $G_{\bar{0}} = L$, $G_{\bar{1}} = \{e_1\} \oplus \ldots \oplus \{e_n\}$, $[G_1, G_1] = 0$, а действие $G_{\bar{0}}$ на $G_{\bar{1}}$ $([G_{\bar{0}}, G_1] \neq 0)$ определяется этими формами указанным выше способом (см. (4)). Тогда легко проверить, что для элементов G выполняются тождества (2) и (3). То есть, алгебра G является супералгеброй Ли, и, следовательно, расширением алгебры Ли L типа I).

5. О расширениях типа I) и 3) с одномерной нечетной частью

Из соотношений (5') вытекает, что алгебры Ли L, удовлетворяющие условию $[L, L] = L$, не обладают расширениями типов I) и 3) с одномерной нечетной частью. Это еще вытекает и из того простого факта, что алгебры Ли L с условием $[L, L] = L$ не обладают нетривиальными одномерными представлениями. Это относится, в частности, ко всем полупростым алгебрам Ли и к алгебре Пуанкаре. Противоположными свойствами обладают алгебры Ли L с $[L, L] \neq L$. Эти алгебры обладают расширениями типа I) с одномерной нечетной частью. Приведем описание всех таких расширений.

Пусть L - алгебра Ли с $[L, L] \neq L$ и $L = [L, L] \oplus \{a_1\} \oplus \cdots \oplus \{a_m\}$. Построим теперь супералгебры $G = G_{\bar{0}} + G_{\bar{1}}$ так:

$$G_0 = L, \quad G_1 = \{e\}, \quad [e, e] = 0, \quad [x, e] = -[e, x] = \lambda(x) e$$

для любого $x \in L$, где $\lambda(x) \not\equiv 0$ - некоторая линейная форма на L, удовлетворяющая условию $\lambda([L, L]) = 0$ (можно задать

$\lambda(a_i), 1\leq i\leq m$, произвольно). Не трудно проверить, что G суперялгебра Ли, то есть расширение алгебры L типа I). С другой стороны, выше уже показано, что все расширения L с одномерной нечетной частью должны иметь указанный вид.

С расширениями типа I) бо́льших коразмерностей для алгебр Ли L с $[L,L]=L$ дело обстоит сложнее. Заметим только, что, как следует из результатов работы [3] , алгебра Пункаре обладает расширениями типа I) коразмерности 2.

6. Описание расширений типа 2)

Покажем, что если алгебра Ли L имеет расширение типа 2), то ее центр $Z(L)$ не равен нулю. Действительно, пусть $G=G_{\bar 0}\oplus G_{\bar 1}$ – расширение типа 2) алгебры Ли L и $x,y\in G_{\bar 1}$ – такие два элемента $G_{\bar 1}$, что $0\neq[x,y]=z\in G_{\bar 0}$. Тогда, в силу тождества Якоби, для любого элемента $a\in L$

$$[a,z]=[a,[x,y]]=[[a,x],y]+[x,[a,y]]=0$$

так как $[a,x]$ и $[a,y]$ равны нулю по условию $[G_{\bar 0},G_{\bar 1}]=0$. Так как в качестве a можно взять любой элемент L , то $z\in Z(L)$. Поскольку $z\neq 0$, получаем, что $Z(L)\neq 0$.

Из сказанного вытекает, что если центр алгебры Ли равен нулю, то она не обладает расширениями типа 2).

Убедимся в том, что если центр $Z(L)$ алгебры Ли L не равен нулю, то она обладает расширениями типа 2) любой коразмерности. Более того, можно дать полное описание всех таких расширений. Пусть супералгебра $G=G_{\bar 0}\oplus G_{\bar 1}$, где $G_{\bar 0}=L$,

$\mathcal{G}_{\bar{1}} = \{e_1\} \oplus \cdots \oplus \{e_n\}$ задается следующими соотношениями:

$$[\mathcal{G}_{\bar{1}}, \mathcal{G}_{\bar{0}}] = [\mathcal{G}_{\bar{0}}, \mathcal{G}_{\bar{1}}] = 0 \;, \; [e_i, e_j] = z_{ij} \in Z(L)$$

($0 \neq z_{ij}$ – произвольные элементы $Z(L)$). Тогда легко проверить, что для элементов $\mathcal{G}$ выполняются тождества (2) и (3). Следовательно, это расширение требуемого типа. Выше было показано, что все расширения типа 2) имеют указанный вид.

7. <u>О расширениях типа 3)</u>

Типичным примером расширения типа 3) является алгебра, называемая минимальным спинорным расширением алгебры Пуанкаре (см.[5]). Она имеет вид $\mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$, где $[\mathcal{G}_{\bar{1}}, \mathcal{G}_{\bar{1}}] = P$ (P – подалгебра трансляций). Известно, что P – идеал в $\mathcal{G}_{\bar{0}}$. Это не случайно. Как отмечено в работе[7], для любой супералгебры $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$ всегда $[\mathcal{G}_{\bar{1}}, \mathcal{G}_{\bar{1}}]$ – идеал в $\mathcal{G}_{\bar{0}}$. Заметим, что это вытекает из тождества

$$[a, [x, y]] = [[a, x], y] + [x, [a, y]], \; a \in \mathcal{G}_{\bar{0}}; \; x, y \in \mathcal{G}_{\bar{1}}$$

Как мы увидим ниже, не любой идеал алгебры Ли может выступать в этой роли. Коснемся расширений типа 3) с одномерной нечетной частью. Как показано выше, алгебры Ли L с $[L, L] = L$ не обладают такими расширениями. Из предыдущего вытекает, что <u>если алгебра Ли имеет такое расширение, то у нее есть одномерный идеал</u>. Уточним это утверждение. <u>Алгебра Ли L с $[L, L] \neq L$ обладает расширением типа 3) с одномерной нечетной частью тогда</u>

и только тогда, когда у нее есть такой одномерный идеал $\{z\}$ и такая линейная форма $\lambda(x)\ (x\in L)$, что $\lambda([L,L])=0$, $[x,z]=\lambda(x)z$ для любых $x\in L$ (т.е. $z\in Z([L,L])$). Пусть $G=G_{\bar 0}\oplus G_{\bar 1}$ – требуемое расширение алгебры Ли L с $G'_{\bar 1}=\{e\}$ и $[x,e]=\lambda(x)e$ для любого $x\in G'_{\bar 0}$. Тогда (см. (5')) $\lambda([G_{\bar 0},G_{\bar 0}])=0$, $[e,e]=z\in G_{\bar 0}$, $\{z\}$ – идеал в $G'_{\bar 0}$ и для любого $x\in G_{\bar 0}$

$$[x,z]=[x,[e,e]]=[[x,e],e]+[e,[x,e]]=$$

$$=2\lambda(x)[e,e]=2\lambda(x)z=\lambda'(x)z$$

Отсюда видно, что любое расширение типа 3) алгебры L с $\dim(G_{\bar 1})=1$ удовлетворяет нашим требованиям. С другой сторонв, если $\lambda(x)$ и z – требуемая линейная форма и элемент L ($[x,z]=\lambda(x)z$ для всех $x\in L$), то для всех можно построить расширение L типа 3) $G=G_{\bar 0}\oplus G_{\bar 1}$, положив $G'_{\bar 0}=L$, $G_{\bar 1}=\{e\}$, $[x,e]=-[e,x]=\frac{1}{2}\lambda(x)e$ для всех $x\in L$, $[e,e]=z$.

Примером такой алгебры является всякая алгебра Ли вида $L=\{a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n\}\ (m,n\geqslant 1)\ [a_i,b_j]=\tau_{ij}a_i$

Здесь роль z может играть любой элемент a_i. Пусть $z=a_i$. Положим $\lambda(b_j)=\tau_{ij}$, $\lambda(a_k)\equiv 0$, $k=1,\dots,m$. Линейная форма $\lambda(x)$ на L, определяемая этими условиями является требуемой.

Для расширений типа 3) с нечетными частями больших размерностей дело обстоит сложнее. Известно, что алгебра Пуанкаре обладает такими расширениями с двумерной нечетной частью (см. [3]. Рассмотрим произвольное расширение алгебры Ли L типа 3) с $\dim(G'_{\bar 1})=n\ (n>1)$. Пусть супералгебра Ли $G=G'_{\bar 0}\oplus G_{\bar 1}$, $G'_{\bar 0}\cong L$, $G_{\bar 1}=\{e_1\}\oplus\dots\oplus\{e_n\}$. Положим $[e_i,e_j]=z_{ij}\ (z_{ij}=z_{ji})$, $[x,e_i]=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ik}(x)e_k$.

Тогда формы $\lambda_{ik}(x)$ должны удовлетворять соотношениям (5) и, ввиду тождества Якоби (см. (3)), быть связанными с элементами z_{ij} соотношениями

$$[a, z_{ij}] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik}(a) z_{kj} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk}(a) z_{ik} \qquad (6)$$

для любых $a \in G_{\bar{0}}$.

Верно и обратное. Если формы на алгебре Ли L $\lambda_{ik}(x)$ и элементы $z_{ij} \in L$ удовлетворяют соотношениям (5) и (6), то супералгебра

$$G = G_{\bar{0}} + G_{\bar{1}}, \text{ где } G_{\bar{0}} = L$$

$$G_{\bar{1}} = \langle e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle \quad \text{при условиях} \quad [e_i, e_j] = z_{ij}$$

$$[x, e_i] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik}(x) e_k = -[e_i, x]$$

является, как легко проверить (см. (2), (3), (6)), расширением L типа 3) с $\dim(G_{\bar{1}}) = n$.

Условия (6) в общем случае обозреть довольно трудно. Ясно, что элементы z_{ij} должны порождать идеал специального типа размерности, не превосходящей $\frac{n(n+1)}{2}$. В частном случае, когда $n=2$, получаем, что при $z_{11} = z_1$, $z_{22} = z_2$, $z_{12} = z_3$, должны выполняться соотношения

$$[a, z_1] = 2\lambda_{11}(a) z_1 + 2\lambda_{12}(a) z_3$$

$$[a, z_2] = 2\lambda_{22}(a) z_2 + 2\lambda_{21}(a) z_3$$

$$[a, z_3] = \lambda_{21}(a) z_1 + \lambda_{12}(a) z_2 + (\lambda_{11}(a) + \lambda_{22}(a)) z_3$$

Элементы z_1, z_2, z_3 должны порождать идеал алгебры Ли L размерности, не превосходящей 3. Эта ситуация требует дополнительных исследований. Пока можно сказать, например, что простые алгебры Ли размерности большей, чем 3, не обладают расширениями типа 3) с двумерной нечетной частью. Близкое к этому утверждение можно сделать и для полупростых алгебр Ли. Отметим, что существование расширений алгебры Ли L коразмерности 2 с $[L,L]=L$ типа 3 во многом зависит от наличия у этих алгебр неприводимых двумерных представлений. Для других алгебр и других размерностей нечетной части может быть полезной информация об их конечномерных представлениях.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность В.Г.Кадышевскому за инициирование этой работы, Е.А.Иванову и Р.П.Зайкову за постановку ряда вопросов и внимание к работе, Д.А.Лейтесу за постоянную помощь, Г.Тодоровой, П.Экснеру, А.С.Сорину за внимание к работе и ценные советы.

Литература

1. V.G.Kac. A Sketch of Lie Superalgebras Theory. Commun.Math.Phys., 53, 31-64, (1977).
2. V.G.Kac. Lie Superalgebras. Advances in Mathematics, 26, 8-96, (1977).
3. Б.Г.Конопельченко. О расширениях алгебры Пуанкаре спинорными генераторами. Ядерная физика, т. 23, вып. 4, 1976, с. 911-916.
4. Б.Г.Конопельченко. Группы симметрий в квантовой теории поля. ЭЧАЯ, т. 8, вып. 1, 1977, стр. 135-174.

5. В.И.Огиевецкий, Л.Мезинческу. Успехи физических наук, т. II7, вып. 4, стр. 637-683.

6. Н.Т.Петров, Р.П.Зайков, Доклады Болгарской Академии наук, т. 29, №9, I976, стр. I24I-I243.

7. Ф.А.Березин, В.С.Ретах. О строении супералгебр с полупростой четной частью. Вестник Московского университета. Матем., мех., №5, I978, стр. 63-67.